Я. І. Перельман

Цікава Алгебра

За редакцією
і з доповненнями
В. Г. Болтянського
Переклад
з 12-го російського стереотипного
видання
Т. І. Чумаченко

ВИДАВНИЦТВО
«ТЕХНІКА»
КИЇВ
1973

512
П27

УДК 512.0=83

Занимательная алгебра. Перельман Я. И. «Техніка», К., 1973, 188 стр. (На украинском языке).

Подобно прочим произведениям данной серии «Занимательная алгебра» — не учебное пособие, а книга для вольного чтения. Читатель, которого она имеет в виду, должен обладать некоторыми познаниями, хотя бы смутно усвоенными или полузабытыми. Цель книги — уточнить, воскресить и закрепить эти разрозненные сведения, а главное — воспитать в читателе вкус к занятию алгеброй и возбудить охоту самостоятельно пополнить по учебным книгам пробелы в своей подготовке.

Чтобы придать предмету привлекательность и повысить к нему интерес, автор пользуется в книге разнообразными средствами: задачами с необычными сюжетами, подстрекающими любопытство, занимательными экскурсиями в область истории математики, неожиданными применениями алгебры к практической жизни и т. п.

Рассчитана на широкий круг читателей.

Редакція літератури з важкої промисловості

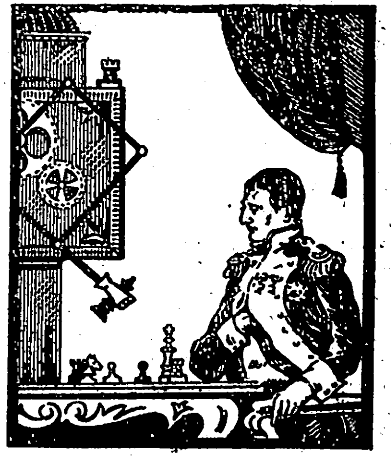
Завідуючий редакцією інж. *В. І. Краєць*

КИЇВСЬКА КНИЖКОВА ФАБРИКА

П $\frac{0763-076}{М202(04)-73}$ 176-73

РОЗДІЛ I

П'ЯТА МАТЕМАТИЧНА ДІЯ



П'ята дія

Алгебру нерідко називають «арифметикою семи дій», підкреслюючи, що до чотирьох загальновідомих математичних операцій вона приєднує три нові: піднесення у степінь і дві йому обернені дії.

Наші алгебраїчні бесіди розпочнуться з «п'ятої дії» — піднесення у степінь.

Чи викликана потреба у цій новій дії практичним життям? Безперечно. Ми дуже часто зустрічаємося з нею у реальній дійсності. Пригадаймо численні випадки обчислення площ та об'ємів, де звичайно доводиться підносити числа у другій і третій степені. Далі: сила всесвітнього тяжіння, електростатична та магнітна взаємодії, світло, звук послаблюються пропорціонально другому степеню відстані. Тривалість обертання планет навколо Сонця (і супутників навколо планет) пов'язана з відстанями від центра обертання також степеневою залежністю: другі степені часів обертання відносяться один до одного, як треті степені відстаней.

Не треба думати, що практика наштовхує нас тільки на другі і треті степені, а вищі показники існують тільки у вправах алгебраїчних задачників. Інженер, роблячи розрахунки на міцність, часто-густо має справу з четвертими степенями, а при інших обчисленнях (наприклад, діаметра паропроводу) — навіть з шостим степенем. Досліджуючи силу, з якою вода, що тече, несе каміння, гідротехнік натрапляє на залежність також шостого степеня: якщо швидкість течії в одній річці у чотири рази більша, ніж в іншій, то швидка річка здатна перекочувати по своєму ложу камені у 4^6, тобто у 4096 раз важчі, ніж повільна*.

З ще вищими степенями ми зустрічаємося, вивчаючи залежність яскравості розжареного тіла — наприклад, нитки розжарення в електричній лампочці від температури. Загальна яскравість росте при білому жарі з дванадцятим степенем температури, а при червоному жарі — з тридцятим степенем температури («абсолютної», тобто такої, яка відлічується від мінус 273°). Це означає, що тіло, нагріте, наприклад, від 2000 до 4000° (абсолютних), тобто у два рази більше, яскравішає у 2^{12}, тобто більше як у 4000 раз. Про те, яке значення має ця своєрідна залежність у техніці виготовлення електричних лампочок, ми ще говоритимемо в іншому місці.

Астрономічні числа

Ніхто, мабуть, не користується так широко п'ятою математичною дією, як астрономи. Дослідникам всесвіту на кожному кроці доводиться зустрічатися з величезними числами, які складаються з однієї-двох значущих цифр і довгого ряду нулів. Зображення звичайним способом подібних числових велетнів, які справедливо називаються «астрономічними числами», неминуче призводило б до великих незручностей, особливо при обчисленнях. Відстань, наприклад, до туманності Андромеди, записана звичайним способом, дорівнює такому числу кілометрів:

95 000 000 000 000 000 000.

При виконанні астрономічних обчислень доводиться до того ж часто виражати небесні відстані не у кілометрах або більших одиницях, а в сантиметрах. Згадана відстань зображується в цьому випадку числом, яке має на п'ять нулів більше:

9 500 000 000 000 000 000 000 000.

---

*Докладніше про це див. у книзі Я. І. Перельмана «Занимательная механика», М., «Наука», 1970.

Маси зір подаються ще більшими числами, особливо якщо їх виражати, як потрібно для багатьох розрахунків, у грамах. Маса нашого Сонця у грамах дорівнює:

1 983 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000.

Можна уявити собі, як важко було б робити обчислення з такими громіздкими числами і як легко було б при цьому помилитися. Адже тут наведено далеко ще не найбільші астрономічні числа.

П'ята математична дія дає обчислювачам простий вихід з цього становища. Одиниця, яка супроводжується рядом нулів, являє собою певний степінь десяти:

$100 = 10^2$, $1000 = 10^3$, $10\,000 = 10^4$ і т. д.

Тому наведені раніше числові велетні можна подати у такому вигляді:

перший . . . . $950 \cdot 10^{22}$,
другий . . . . $1983 \cdot 10^{30}$.

Це треба робити не тільки для економії місця, а й для полегшення розрахунків. Якщо треба було б, наприклад, обидва ці числа перемножити, то досить було б знайти добуток $950 \cdot 1983 = 1\,883\,850$ і поставити його спереду множника $10^{22+30} = 10^{52}$:

$950 \cdot 10^{22} \cdot 1983 \cdot 10^{30} = 188\,385 \cdot 10^{52}$.

Це, звичайно, значно зручніше, ніж виписувати спочатку число з 22 нулями, потім з 30 і, нарешті, з 52 нулями,— не тільки зручніше, але й надійніше, бо при написанні десятків нулів можна прогавити один-два нулі й одержати невірний результат.

Скільки важить усе повітря?

Щоб переконатися, наскільки полегшуються практичні обчислення при застосуванні степеневого зображення великих чисел, виконаємо такий розрахунок: визначимо, у скільки разів маса земної кулі більша від маси всього повітря, яке її оточує.

На кожний квадратний сантиметр земної поверхні повітря тисне, як ми знаємо, з силою близько одного кілограма. Це означає, що вага того стовпа атмосфери, який спирається на 1 *кв. см*, дорівнює 1 *кг*. Атмосферна оболонка Землі ніби складена вся в таких повітряних стовпів; їх стільки, скільки квадратних сантиметрів має поверхня нашої планети; стільки ж кілограмів важить вся атмосфера. Заглянувши у довідник, ми узнаємо, що величина поверхні земної кулі дорівнює 510 млн. *кв. км*, тобто. $51 \cdot 10^7$ *кв. км.*

Обчислимо, скільки квадратних сантиметрів у квадратному кілометрі. Лінійний кілометр містить 1000 *м*, по 100 *см* у кожному, тобто дорівнює 10^5 *см*, а квадратний кілометр містить $(10^5)^2 = 10^{10}$ *кв. см.* У всій поверхні земної кулі міститься

$$51 \cdot 10^7 \cdot 10^{10} = 51 \cdot 10^{17} \text{ кв. см.}$$

Стільки ж кілограмів важить і атмосфера Землі. Перевівши в тонни, одержимо:

$$51 \cdot 10^{17} : 1000 = 51 \cdot 10^{17} : 10^3 = 51 \cdot 10^{17-3} = \\ = 51 \cdot 10^{14}.$$

Маса ж земної кулі виражається числом

$$6 \cdot 10^{21} \text{ тонн.}$$

Щоб визначити, у скільки разів наша планета важча від її повітряної оболонки, виконуємо ділення:

$$6 \cdot 10^{21} : 51 \cdot 10^{14} \approx 10^6,$$

тобто маса атмосфери становить приблизно мільйонну частку маси земної кулі*.

Горіння без полум'я і жару

Якщо ви запитаєте хіміка, чому дрова або вугілля горять лише при високій температурі, він скаже вам, що сполучення вуглецю з киснем відбувається, строго кажучи, при будь-якій температурі, але при низьких температурах цей процес відбувається дуже повільно (тобто в реакцію вступає дуже незначна кількість молекул) і тому є непомітним для спостерігача. Закон, який визначає швидкість хімічних реакцій, свідчить, що із зниженням температури на 10° швидкість реакції (число молекул, які беруть у ній участь) з м е н ш у є т ь с я у д в а р а з и.

* Знак $\approx$ означає наближену рівність.

Застосуємо сказане до реакції з'єднання деревини з киснем, тобто до процесу горіння дров. Нехай при температурі полум'я 600° згоряє щосекунди 1 грам деревини. За який час згорить 1 грам деревини при 20°? Ми вже знаємо, що при температурі, яка на $580 = 58 \cdot 10$ градусів нижча, швидкість реакції менша у

$$2^{58} \text{ раз,}$$

тобто 1 грам деревини згорить за 2^{58} секунд.

Скільком рокам дорівнює такий проміжок часу? Ми можемо наближено підрахувати це, не роблячи 57 повторних множень на два і обходячись без логарифмічних таблиць. Скористаємося з того, що

$$2^{10} = 1024 \approx 10^3.$$

Отже,

$$2^{58} = 2^{60-2} = 2^{60} : 2^2 = \frac{1}{4} \cdot 2^{60} = \frac{1}{4} \cdot (2^{10})^6 \approx \frac{1}{4} \times \\ \times 10^{18},$$

тобто близько чверті трильйона секунд. Один рік має близько 30 мільйонів, тобто $3 \cdot 10^7$ секунд; тому

$$\left(\frac{1}{4} \cdot 10^{18}\right) : (3 \cdot 10^7) = \frac{1}{12} \cdot 10^{11} \approx 10^{10}.$$

Десять мільярдів років! Ось за який приблизно час згорів би один грам деревини без полум'я і жару.

Отже, деревина, вугілля горять і при звичайній температурі зовсім без підпалювання. Винайдення знарядь здобування вогню прискорило цей надто повільний процес у мільярди раз.

Різноманітність погоди

ЗАДАЧА

Будемо характеризувати погоду тільки за однією ознакою — чи вкрите небо хмарами, чи ні, тобто будемо відрізняти дні ясні і хмарні. Як ви гадаєте, чи багато за цієї умови буде тижнів з різним чергуванням погоди?

Здавалося б, небагато: мине місяців два, і всі комбінації ясних і хмарних днів у тижні будуть вичерпані; тоді неминуче повториться одна з тих комбінацій, які вже спостерігалися раніше.

Спробуємо, однак, підрахувати, скільки різних комбінацій може бути за таких умов. Це — одна з задач, яка несподівано приводить до п'ятої математичної дії.

Отже: скількома різноманітними способами можуть на одному тижні чергуватися ясні і хмарні дні?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Перший день тижня може бути або ясний, або хмарний; маємо, отже, дві «комбінації».

Протягом дводенного періоду можливі такі чергування ясних і хмарних днів:

Ясний і ясний
Ясний і хмарний
Хмарний і ясний
Хмарний і хмарний.

Разом протягом двох днів може бути 2^2 різноманітних чергувань. За триденний проміжок часу кожна з чотирьох комбінацій перших двох днів поєднується з двома комбінаціями третього дня; всіх чергувань буде

$$2^2 \cdot 2 = 2^3.$$

Протягом чотирьох днів число чергувань досягне

$$2^3 \cdot 2 = 2^4.$$

За п'ять днів може бути 2^5, за шість 2^6 і, нарешті, за тиждень $2^7 = 128$ різного роду чергувань.

Звідси виходить, що тижнів з різним порядком чергування ясних і хмарних днів є 128. Як тільки мине $128 \cdot 7 = 896$ днів, повинно повторитися одне з колишніх поєднань; повторення може статися і раніше, але 896 днів — строк, після якого таке повторення неминуче. І навпаки: може минути цілих два роки, навіть більше (2 роки і 166 днів), протягом яких жодний тиждень за погодою не буде схожий на інший.

Замок з секретом

ЗАДАЧА

В одній радянській установі було виявлено вогнетривку шафу, яка збереглася від дореволюційних часів. Відшукали і ключа до неї, але щоб скористатися ним, треба було знати секрет замка; двері шафи відчинялися лише

тоді, коли наявні на них 5 кружків з алфавітом на їх ободах (36 літер) установлювалися на певне слово. Оскільки ніхто цього слова не знав, то, щоб не ламати шафи, було вирішено перепробувати усі комбінації літер у кружках. На складання однієї комбінації треба було витратити 3 секунди.

Чи можна сподіватися, що шафу буде відкрито протягом найближчих 10 робочих днів?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Підрахуємо, скільки всіх літерних комбінацій треба було перепробувати.

Кожна з 36 літер першого кружка може суміщатися з кожною з 36 літер другого кружка. Виходить, що дволітерних комбінацій може бути

$$36 \cdot 36 = 36^2.$$

До кожної з цих комбінацій можна приєднати будь-яку з 36 літер третього кружка. Тому трилітерних комбінацій може бути

$$36^2 \cdot 36 = 36^3.$$

Таким же способом визначаємо, що чотирилітерних комбінацій може бути 36^4, а п'ятилітерних 36^5 або 60 466 176. Щоб скласти ці 60 з лишком мільйонів комбінацій, потрібно було б часу, рахуючи по 3 секунди на кожну,

$$3 \cdot 60\,466\,176 = 181\,398\,528 \text{ секунд.}$$

Це становить понад 50 000 годин, або майже 6300 восьмигодинних робочих днів — понад 20 років.

Отже, шансів на те, що шафу буде відчинено протягом найближчих 10 робочих днів, є 10 на 6300, або один з 630. Це дуже мала імовірність.

Велосипедист з забобонами

ЗАДАЧА

До недавнього часу кожному велосипедові привласнювали номер подібно до того, як це роблять для автомобілів. Ці номери були шестизначні.

Хтось купив собі велосипед, бажаючи навчитися їздити на ньому. Власник велосипеда виявився на диво марновірною людиною. Довідавшися про існування пошкодження велосипеда, яке називається «вісімкою», він вирішив, що щастя йому не буде, коли йому припаде велосипедний номер, у якому буде хоч одна цифра 8. Однак, ідучи одержувати номер, він тішив себе такими міркуваннями. У написанні кожного числа можуть брати участь 10 цифр: 0, 1, ..., 9. З них «нещасливою» є тільки цифра 8. Тому є лише один шанс з десяти за те, що номер виявиться «нещасливим».

Чи правильне було таке міркування?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Усього було 999 999 номерів: від 000 001, 000 002 і т. д. до 999 999. Підрахуємо, скільки існує «щасливих» номерів. На першому місці може стояти будь-яка з дев'яти «щасливих» цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9. На другому — також будь-яка з цих дев'яти цифр. Тому існує $9 \cdot 9 = 9^2$ «щасливих» двозначних комбінацій. До кожної з цих комбінацій можна приписати (на третьому місці) будь-яку з дев'яти цифр, отже «щасливих» тризначних комбінацій може бути $9^2 \cdot 9 = 9^3$.

Таким же способом визначаємо, що число шестизначних «щасливих» комбінацій дорівнює 9^6. Слід, однак, мати на увазі, що до цього числа входить комбінація 000 000, яка непридатна для велосипедного номера. Отже, число «щасливих» велосипедних номерів дорівнює $9^6 - 1 = 531\,440$, що становить трохи більше за 53% усіх номерів, а не 90%, як гадав велосипедист.

Надаємо читачеві можливість самостійно переконатися в тому, що серед семизначних номерів є більше «нещасливих» номерів, ніж «щасливих».

Підсумки повторного подвоєння

Разючий приклад надзвичайно швидкого зростання найменшої величини при повторному її подвоєнні дає загальновідома легенда про винагороду винахідника гри у шахи*. Не зупиняючись на цьому класичному прикладі, наведу інші, не такі широко відомі.

* Див. Я. І. Перельман. Жива математика. Київ, «Техніка», 1970, розділ 7.

ЗАДАЧА

Інфузорія парамеція кожні 27 годин (у середньому) ділиться навпіл. Коли б усі інфузорії, що народжуються таким способом, залишалися б у живих, то скільки треба було б часу, щоб потомство однієї парамеції заповнило об'єм, який дорівнює об'єму Сонця?

Дані для розрахунку: 40-е покоління парамецій, що не гинуть після поділу, займає в об'ємі 1 *куб. м*; об'єм Сонця приймаємо 10^{27} *куб. м*.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Задача зводиться до того, щоб визначити, скільки разів треба подвоювати 1 *куб. м*, щоб одержати об'єм 10^{27} *куб. м*. Зробимо такі перетворення:

$$10^{27} = (10^3)^9 \approx (2^{10})^9 = 2^{90},$$

оскільки $2^{10} \approx 1000$.

Виходить, що сорокове покоління повинно зазнати ще 90 поділів, щоб зрости до об'єму Сонця. Загальне ж число поколінь, рахуючи від першого, дорівнює $40 + 90 = 130$. Легко підрахувати, що це станеться на 147-у добу.

Зауважимо, що фактично один мікробіолог (Метальников) спостерігав 8061 поділ парамеції. Надаємо читачеві можливість самому підрахувати, який величезний об'єм зайняло б останнє покоління, коли б жодна інфузорія з цієї кількості не загинула ...

Питання, розглянуте у цій задачі, можна подати, так би мовити, в оберненому вигляді.

Уявімо собі, що наше Сонце поділилося навпіл, половина також поділилася навпіл і т. д. Скільки потрібно буде таких поділів, щоб утворилися частинки величиною з інфузорію?

Хоч відповідь уже відома читачам — 130, вона все ж таки вражає своєю помірною скромністю.

Розглянемо ту саму задачу в такій формі. Аркушик паперу розривають навпіл, одну з одержаних половин знову ділять навпіл і т. д. Скільки потрібно зробити поділів, щоб одержати частинки атомних розмірів?

Припустимо, що паперовий аркуш важить 1 грам, і приймемо для ваги атома величину порядку $\frac{1}{10^{24}}$ грама. Оскільки в цьому виразі можна замінити 10^{24} виразом 2^{80}, який наближено йому дорівнює, то зрозуміло, що поділів навпіл потрібно буде лише 80, а зовсім не мільйони, як іноді доводиться чути у відповідь на запитання цієї задачі.

У мільйони раз швидше

Електричний прилад, який називається т р и г е р о м, має дві електронні лампи* (тобто приблизно такі лампи, які застосовуються в радіоприймачах). Струм у тригері може проходити тільки через одну лампу: через «ліву» або через «праву». Тригер має два контакти, до яких ззовні можна підвести короткочасний електричний сигнал (імпульс), і два контакти, через які з тригера надходить імпульс у відповідь. У момент приходу ззовні електричного імпульсу тригер перемикається: лампа, через яку проходив струм, вимикається, а струм починає проходити через другу лампу. Імпульс у відповідь подається тригером у той момент, коли вимикається права лампа і вмикається ліва.

Простежимо, як працюватиме тригер, якщо до нього підвести один за одним кілька електричних імпульсів. Будемо характеризувати тригер за його п р а в о ю лампою: якщо струм через праву лампу н е п р о х о д и т ь, то тригер перебуває у «положенні 0», а коли струм проходить через праву лампу,— то в «положенні 1».

Нехай спочатку тригер перебував у положенні 0, тобто струм проходив через ліву лампу (рис. 1). Після першого імпульсу струм проходитиме через праву лампу, тобто тригер перемкнеться у положення 1. При цьому імпульсу-відповіді з тригера не надійде, оскільки сигнал-відповідь подається в момент вимикання правої (а не лівої) лампи.

Після другого імпульсу струм проходитиме вже через ліву лампу, тобто тригер знову потрапить у положення

* Суть справи не змінюється, якщо замість електронних ламп застосовуються транзистори або так звані тверді (плівкові) схеми.

0. Однак при цьому тригер подасть сигнал-відповідь (імпульс).

У результаті (після двох імпульсів) тригер знову займе початкове положення. Тому після третього імпульсу тригер (як і після першого) потрапить у положення 1, а після четвертого (як і після другого) — у положення 0 з одночасним поданням сигналу-відповіді і т. д. Після кожних двох імпульсів положення тригера повторюються.

Уявімо собі тепер, що є кілька тригерів і що імпульси ззовні підводяться до першого тригера, імпульси-відповіді першого тригера підводяться до другого, імпульси-відповіді другого — до третього і т. д. (на рис. 2 тригери розташовані один за одним справа наліво). Простежимо, як працюватиме такий ланцюжок тригерів.

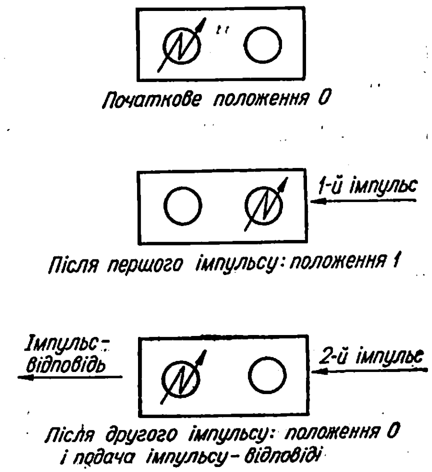


Рис. 1.

Нехай спочатку всі тригери перебували в положеннях 0. Наприклад, для ланцюжка, який складається з п'яти тригерів, ми мали комбінацію 00000. Після першого імпульсу перший тригер (крайній правий) потрапить

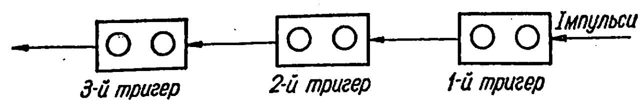


Рис. 2.

у положення 1, а оскільки імпульсу-відповіді при цьому не буде, то всі інші тригери залишаться у положеннях 0, тобто ланцюжок характеризуватиметься комбінацією 00001. Після другого імпульсу перший тригер вимкнеться (потрапить у положення 0), але подасть при цьому імпульс-відповідь, внаслідок чого увімкнеться другий тригер. Інші тригери залишаться у положеннях 0, тобто вийде комбінація 00010. Після третього імпульсу увімкнеться перший тригер, а інші не змінять своїх положень. Ми матимемо комбінацію 00011. Після четвертого імпульсу увімкнеться перший тригер, подавши сигнал-відповідь; від цього імпульсу-відповіді вимкнеться другий тригер і також дасть імпульс-відповідь; нарешті, від цього останнього імпульсу увімкнеться третій тригер. У результаті ми одержимо комбінацію 00100.

Аналогічні міркування можна продовжувати і далі. Подивимось, що при цьому виходить:

1-й	імпульс —	комбінація	00001
2-й	»	»	00010
3-й	»	»	00011
4-й	»	»	00100
5-й	»	»	00101
6-й	»	»	00110
7-й	»	»	00111
8-й	»	»	01000

. . . .

Ми бачимо, що ланцюжок тригерів «лічить» подані ззовні сигнали і своєрідним способом «записує» число цих сигналів. Неважко побачити, що «запис» числа поданих імпульсів відбувається не у звичній для нас десятковій системі, а у *двійковій* системі числення.

Будь-яке число у двійковій системі числення записується нулями та одиницями. Одиниця наступного розряду не в десять раз (як у звичайному десятковому запису), а тільки у два рази більша за одиницю попереднього розряду. Одиниця, яка стоїть у двійковому запису на останньому (крайньому правому) місці, є звичайною одиницею. Одиниця наступного розряду (на другому місці справа) означає двійку, наступна одиниця означає четвірку, потім вісімку і т. д.

Наприклад, число $19 = 16 + 2 + 1$ запишеться у двійковій системі у вигляді 10011.

Отже, ланцюжок тригерів «підраховує» число поданих сигналів і «записує» його за двійковою системою числення. Зазначимо, що перемикання тригера, тобто реєстрація одного імпульсу, що надходить, триває всього... *стомільйонні частки секунди*! Сучасні тригерні лічильники можуть «підраховувати» десятки мільйонів імпульсів за секунду. Це у мільйони раз швидше, ніж лічба, яку може вести людина без

будь-яких приладів: око людини може чітко відрізняти сигнали, які йдуть один за одним не частіше, як через 0,1 секунди.

Якщо скласти ланцюжок з двадцяти тригерів, тобто записувати число поданих сигналів не більше як двадцятьма цифрами двійкового розкладання, то можна «рахувати» до $2^{20} - 1$; це число більше за мільйон. Якщо ж скласти ланцюжок з 64 тригерів, то з їх допомогою можна записати знамените «шахове число».

Можливість підраховувати мільйони сигналів за секунду дуже важлива для експериментальних робіт, які належать до ядерної фізики. Наприклад, можна підрахувати число частинок того або іншого виду, які вилітають при атомному розкладі.

10 000 дій за секунду

Цікаво, що тригерні схеми дозволяють також провадити *дії* над числами. Розглянемо, наприклад, як можна здійснити додавання двох чисел:

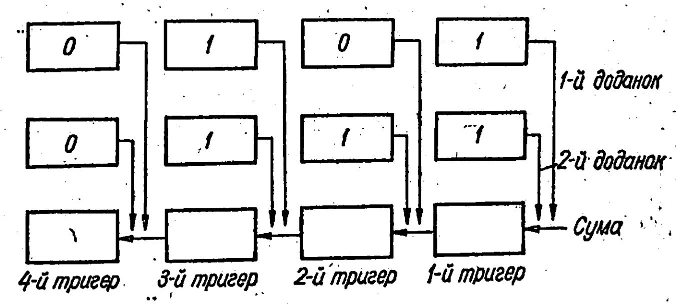


Рис. 3.

Нехай три ланцюжки з'єднано так, як показано на рис. 3. Верхній ланцюжок тригерів служить для запису першого доданка, другий ланцюжок — для запису другого доданка, а нижній ланцюжок — для одержання суми. У момент вмикання приладу на тригери нижнього ланцюжка надходять імпульси від тих тригерів верхнього і середнього ланцюжків, які перебувають у положенні 1.

Нехай, наприклад, як це показано на рис. 3, у перших двох ланцюжках записано доданки 101 і 111 (двійкова система числення). Тоді на перший (крайній правий) тригер нижнього ланцюжка надходять (у момент вмикання приладу) два імпульси: від перших тригерів кожного з доданків. Ми вже знаємо, що в результаті одержання двох імпульсів перший тригер залишиться у положенні 0, але дасть імпульс-відповідь на другий тригер. Крім того, на другий тригер надійде сигнал від другого доданка. Таким чином, на другий тригер надійдуть два імпульси, внаслідок чого другий тригер виявиться у положенні 0 і надішле імпульс-відповідь на третій тригер. Крім того, на третій тригер надійдуть ще два імпульси (від кожного з доданків). В результаті одержаних трьох сигналів третій тригер перейде в положення 1 і дасть імпульс-відповідь. Цей імпульс-відповідь переведе четвертий тригер у положення 1 (інших сигналів на четвертий тригер не надійде). Таким чином, зображений на рис. 3 прилад виконав (у двійковій системі числення) додавання двох чисел «стовпчиком»:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}101\\111\end{array} \\ \hline 1100 \end{array}$$

або у десятковій системі: $5 + 7 = 12$. Імпульси-відповіді у нижньому ланцюжку тригерів відсутні, оскільки прилад ніби «запам'ятовує в умі» одну одиницю і переносить її у наступний розряд, тобто виконує те саме, що робимо ми при додаванні «стовпчиком».

Коли б у кожному ланцюжку було не 4, а, скажімо, 20 тригерів, то можна було б виконувати додавання чисел у межах мільйона, а при більшому числі тригерів можна додавати ще більші числа.

Зауважимо, що в дійсності прилад для виконання додавання повинен мати дещо складнішу схему, ніж та, яка зображена на рис. 3. Зокрема, у прилад мають бути увімкнуті особливі пристрої, які здійснюють «запізнення» сигналів. Справді, при вказаній схемі приладу сигнали від обох доданків надходять на перший тригер нижнього ланцюжка о д н о ч а с н о (в момент вмикання приладу). В результаті обидва сигнали зливаються разом, і тригер сприймає їх як один сигнал, а не як два. Щоб уникнути цього, треба, щоб сигнали від доданків надходили не одночасно, а з деяким «запізненням» один після другого. Наявність таких «запізнень» призводить до того, що додавання двох чисел потребує більше часу, ніж реєстрація одного сигналу у тригерному лічильнику.

Змінивши схему, можна примусити прилад виконувати не додавання, а віднімання. Можна також здійснити множення (воно зводиться до послідовного додавання і тому потребує у кілька разів більше часу, ніж додавання), ділення та інші операції.

Пристрої, про які мова була вище, застосовуються у сучасних обчислювальних машинах. Ці машини можуть виконувати десятки і навіть сотні тисяч дій над числами за одну секунду! А в недалекому майбутньому буде створено машини, розраховані на виконання мільйонів операцій за секунду. Здавалося б, що така запаморочлива швидкість виконання дій ні до чого. Яка, наприклад, може бути різниця в тому, скільки часу машина буде підносити до квадрата 15-значне число: одну десятитисячну частку секунди або, скажімо, чверть секунди? І те і друге здаватиметься нам «миттьовим» розв'язанням задачі...

Проте не поспішайте з висновками. Візьмемо такий приклад. Добрий шахіст, перш ніж зробити хід, аналізує десятки і навіть сотні можливих варіантів. Якщо, скажімо, дослідження одного варіанту потребує кількох секунд, то на розгляд сотні варіантів потрібні хвилини і десятки хвилин. Нерідко буває, що у складних партіях гравці потрапляють у «цейтнот», тобто змушені швидко робити ходи, оскільки на обмірковування попередніх ходів вони витратили майже весь належний їм час. А що, коли дослідження варіантів шахової партії доручити машині? Адже, роблячи тисячі обчислень за секунду, машина досліджує всі варіанти «миттьово» і ніколи не потрапляє у цейтнот...

Ви, звичайно, заперечуватимете, що одна справа — обчислення (хоч і не дуже складні), а інша справа — гра в шахи: машина не може цього робити! Адже шахіст при дослідженні варіантів не обчислює, а м і р к у є! Не будемо сперечатися: ми ще повернемося до цього питання нижче.

Число можливих шахових партій

Займемося наближеним підрахунком числа різних шахових партій, які взагалі можуть бути зіграні на шахівниці. Точний підрахунок у цьому випадку немислимий, але ми познайомимо читача зі спробою наближено оцінити величину числа можливих шахових партій. У книзі бельгійського математика М. Крайчика «Математика ігор і математичні розваги» знаходимо такий розрахунок:

«При першому ході білі мають вибір з 20 ходів (16 ходів восьми пішаків, кожний з яких може пересунутися на одне або на два поля, і по два ходи кожного коня). На кожний хід білих чорні можуть відповісти одним з тих же 20 ходів. Поєднуючи кожний хід білих з кожним ходом чорних, матимемо $20 \cdot 20 = 400$ різних партій після першого ходу кожної сторони.

Після першого ходу число можливих ходів збільшується. Якщо, наприклад, білі зробили перший хід *e*2 — *e*4, вони для другого ходу мають вибір з 29 ходів. У дальшому число можливих ходів стає ще більшим. Один лише ферзь, стоячи, наприклад, на полі *d*5, має вибір з 27 ходів (припускаючи, що всі поля, куди він може стати, вільні). Однак заради спрощення розрахунку будемо дотримуватися таких середніх чисел:

по 20 можливих ходів для обох сторін при перших п'яти ходах;

по 30 можливих ходів для обох сторін при наступних ходах.

Приймемо, крім того, що середнє число ходів нормальної партії дорівнює 40. Тоді для числа можливих партій знайдемо вираз

$$(20 \cdot 20)^5 \cdot (30 \cdot 30)^{35}».$$

Щоб наближено визначити величину цього виразу, скористаємося такими перетвореннями і спрощеннями:

$$(20 \cdot 20)^5 \cdot (30 \cdot 30)^{35} = 20^{10} \cdot 30^{70} = 2^{10} \cdot 3^{70} \times 10^{80}.$$

Замінюємо 2^{10} близьким йому числом 1000, тобто 10^3. Вираз 3^{70} подаємо у вигляді

$$3^{70} = 3^{68} \cdot 3^2 \approx 10(3^4)^{17} \approx 10 \cdot 80^{17} = 10 \cdot 8^{17} \cdot 10^{17} = 2^{51} \times 10^{18} = 2(2^{10})^5 \cdot 10^{18} \approx 2 \cdot 10^{15} \cdot 10^{18} = 2 \cdot 10^{33}.$$

Отже,

$$(20 \cdot 20)^5 \cdot (30 \cdot 30)^{35} \approx 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{33} \cdot 10^{80} = 2 \cdot 10^{116}.$$

Число це залишає далеко позаду себе легендарну безліч пшеничних зерен, яку заправив винахідник у винагороду за винайдення шахової гри ($2^{64} - 1 \approx 18 \cdot 10^{18}$). Коли б усе населення земної кулі цілу добу грало в шахи, роблячи щосекунди по одному ходу, то для вичерпання усіх можливих шахових партій така безперервна поголовна гра мала б тривати не менше як 10^{100} століть!

Секрет шахового автомата

Ви, мабуть, здивуєтесь, довідавшись, що колись існували шахові автомати. І справді, як примирити це з тим, що число комбінацій фігур на шахівниці практично нескінченне?

Справа пояснюється дуже просто. Існував не шаховий автомат, а лише віра в нього. Особливою популярністю користувався автомат угорського механіка Вольфганга фон Кемпелена (1734—1804 рр.), який показував свою машину при російському та австрійському дворах, а потім демонстрував прилюдно у Парижі та Лондоні. Наполеон I грав з цим автоматом, певний, що міряється силами з машиною. У середині минулого століття славнозвісний автомат потрапив до Америки і закінчив там своє існування під час пожежі у Філадельфії.

Інші автомати шахової гри користувалися вже не такою гучною славою. Проте віра в існування подібних автоматично діючих машин не вичерпалася і в пізніші часи.

У дійсності жодна шахова машина не діяла автоматично. Всередині ховався вправний живий шахіст, який і рухав фігури. Той уявний автомат, про який ми щойно згадували, являв собою місткий ящик, заповнений складним механізмом. На ящику була шахівниця з фігурами, які пересувалися рукою великої ляльки. Перед початком гри публіці давали можливість переконатися, що всередині ящика нічого немає, крім деталей механізму. Однак у ньому залишалося досить місця, щоб сховати людину невеликого зросту (цю роль виконували один час знамениті гравці Йоганн Альгайєр і Вільям Льюїс). Можливо, що поки публіці показували послідовно різні частини ящика, захована людина безшумно перебиралася у сусідні відділення. Механізм же ніякої участі у роботі апарата не брав і лише маскував присутність живого гравця.

З усього сказаного можна зробити такий висновок: число шахових партій практично нескінченне, а машини, які дають можливість автоматично вибрати найправильніший хід, існують лише в уяві легковірних людей. Тому побоюватися настання шахової кризи не доводиться.

Однак за останні роки сталися події, які викликають сумнів у правильності цього висновку: тепер уже існують машини, які «грають» у шахи. Це — складні обчислювальні машини, які дають можливість виконувати багато тисяч обчислень за секунду. Про такі машини ми вже говорили вище. Як же може машина «грати» у шахи?

Звичайно, жодна обчислювальна машина нічого, крім дій над числами, робити не може. Однак обчислення провадяться машиною за певною схемою дій, за певною програмою, складеною заздалегідь.

Шахову «програму» складають математики на основі певної тактики гри, причому під тактикою розуміють систему правил, яка для кожної позиції дає можливість вибрати єдиний («найкращий» у розумінні цієї тактики) хід. Ось один з прикладів такої тактики. Кожній фігурі приписується певне число очків (вартість):

Король. . . . .+200 очків	Пішак . . . . +1 очко
Ферзь. . . . . .+9 очків	Відсталий пішак —0,5 очка
Тура . . . . . .+5 очків	Ізольований пішак —0,5 очка
Слон . . . . . .+3 очка	Здвоєний пішак —0,5 очка
Кінь . . . . . .+3 очка	

Крім того, певним чином оцінюються позиційні переваги (рухомість фігур, розташування фігур ближче до центра, ніж до країв, і т. д.), які виражаються у десятих частках очка. Віднімаємо від загальної суми очків для білих фігур суму очків для чорних фігур. Одержана різниця до деякої міри характеризує матеріальну та позиційну переваги білих над чорними. Якщо ця різниця додатна, то у білих вигідніше положення, ніж у чорних, якщо ж вона від'ємна, — положення менш вигідне.

Обчислювальна машина підраховує, як може змінитися вказана різниця на протязі найближчих трьох ходів, вибирає найкращий з усіх можливих триходових комбінацій і друкує його на спеціальній картці: «хід» зроблено*. На один хід машина витрачає дуже небагато часу (в залежності від виду програми і швидкості дії машини), отже побоюватися «цейтноту» їй не доводиться.

Звичайно, «обмірковування» партії тільки на три ходи уперед характеризує машину як досить слабкого «гравця»**. Однак можна не сумніватися в тому, що при швидкому удосконаленні обчислювальної техніки, яке тепер відбувається, машини незабаром «навчаться» значно краще «грати» у шахи.

Більш докладно розповісти про складання шахової програми для обчислювальних машин було б у цій книзі важко. Деякі найпростіші види програм ми розглянемо схематично у наступному розділі.

Трьома двійками

Усім, мабуть, відомо, як слід написати три цифри, щоб зобразити ними якомога більше число. Треба взяти три дев'ятки і розмістити їх так:

$$9^{9^{9}},$$

тобто написати третій «понадстепінь» від 9.

Число це таке страшенно велике, що ніякі порівняння не допомагають уявити собі його грандіозність. Число електронів видимого всесвіту мізерне у порівнянні з ним. У «Цікавій арифметиці» (розділ X) Я. І. Перельмана вже говорилося про це. Можна повернутися до цієї задачі лише тому, щоб запропонувати тут за її зразком іншу:

Трьома двійками, не застосовуючи знаків дій, написати якомога більше число.

* Існують і інші види шахової «тактики». Так, наприклад, при обчисленнях можна розглядати не всі можливі ходи супротивника, а тільки «сильні» ходи (шах, взяття, напад, захист і т. д.). Далі, при особливо сильних ходах супротивника, можна вести обчислення не на три, а на більше число ходів уперед. Можна також використати іншу шкалу вартості фігур. У залежності від вибору тієї або іншої тактики змінюється «стиль гри» машини.

** У партіях кращих майстрів шахової гри трапляються комбінації, розраховані на 10 і більше ходів уперед.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Під свіжим враженням триярусного розміщення дев'яток ви, мабуть, готові і двійкам надати такого розміщення:

$$2^{2^2}.$$

Однак цього разу сподіваного ефекту не буде. Написане число невелике — менше навіть, ніж 222. І справді: адже ми написали всього лише 2^4, тобто 16.

По-справжньому найбільше число з трьох двійок — не 222 і не 22^2 (тобто 484), а

$$2^{22} = 4\ 194\ 304.$$

Приклад дуже повчальний. Він показує, що в математиці небезпечно діяти за аналогією; вона легко може повести до помилкових висновків.

Трьома трійками

ЗАДАЧА

Тепер, мабуть, ви обережніше почнете розв'язувати таку задачу:

Трьома трійками, не застосовуючи знаків дій, написати якомога більше число.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Триярусне розміщення і тут не призведе до сподіваного ефекту, бо

$$3^{3^3}, \text{ тобто } 3^{27}, \text{ менше ніж } 3^{33}.$$

Останнє розміщення і дає відповідь на запитання задачі.

Трьома четвірками

ЗАДАЧА

Трьома четвірками, не застосовуючи знаків дій, написати якомога більше число.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Якщо у даному випадку ви діятимете за зразком двох попередніх задач, тобто дасте відповідь

$$4^{44},$$

то вчините помилку, бо цього разу триярусне розміщення

$$4^{4^4}$$

саме й дасть більше число. Справді, $4^4 = 256$, а 4^{256} більше, ніж 4^{44}.

Трьома однаковими цифрами

Спробуємо заглибитися у це спантеличуюче явище і встановити, чому одні цифри породжують числових велетнів при триярусному розміщенні, а інші — ні. Розглянемо загальний випадок.

Трьома **однаковими цифрами**, не застосовуючи знаків дій, зобразити якомога більше число.

Позначимо цифру літерою a. Розміщенню

$$2^{22},\ 3^{33},\ 4^{44}$$

відповідає написання

$$a^{10a+a}, \text{ тобто } a^{11a}.$$

Триярусне розміщення у загальному вигляді зобразиться так:

$$a^{a^a}.$$

Визначимо, при якому значенні a останнє розміщення зображує більше число, ніж перше. Оскільки обидва вирази являють степені з рівними цілими основами, то більша величина відповідає більшому показникові. Коли ж

$$a^a > 11a?$$

Поділимо обидві частини нерівності на a. Одержимо:

$$a^{a-1} > 11.$$

Легко бачити, що a^{a-1} більше за 11 тільки при умові, що a більше за 3, оскільки

$$4^{4-1} > 11,$$

тим часом як степені

$$3^2 \text{ і } 2^1$$

менші за 11.

Тепер зрозумілі ті несподіванки, на які ми натрапляли при розв'язуванні попередніх задач: для двійок і трійок треба було брати одне розміщення, для четвірок і більших чисел — інше.

Чотирма одиницями

ЗАДАЧА

Чотирма одиницями, не застосовуючи ніяких знаків математичних дій, написати якомога більше число.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Природно, що число, яке спливає у думці, — 1111 — не відповідає вимозі задачі, оскільки степінь

$$11^{11}$$

у багато разів більший. Підраховувати це число десятикратним множенням навряд чи у кого вистачить терпіння. Однак оцінити його величину можна значно швидше за допомогою логарифмічних таблиць.

Число це перевищує 285 мільярдів і, отже, більше за число 1111 у 25 з лишком мільйонів раз.

Чотирма двійками

ЗАДАЧА

Зробимо наступний крок у розвитку задач розглядуваного роду і поставимо наше запитання для чотирьох двійок.

При якому розміщенні чотири двійки зображують найбільше число?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Можливі вісім комбінацій:

$$2222,\ 222^2,\ 22^{22},\ 2^{222},$$
$$22^{2^2},\ 2^{22^2},\ 2^{2^{22}},\ 2^{2^{2^2}}.$$

Яке ж з цих чисел найбільше?

Перше — 2222, очевидно, менше за три інших. Щоб порівняти наступні два —

$$222^2 \text{ і } 22^{22},$$

перетворимо друге з них:

$$22^{22} = 22^{2\cdot 11} = [22^2]^{11} = 484^{11}.$$

Останнє число більше, ніж 222^2, оскільки і основа, і показник у степеня 484^{11} більші, ніж у степеня 222^2.

Порівняємо тепер 22^{22} з останнім числом першого рядка — 2^{222}. Замінимо 22^{22} більшим числом 32^{22} і покажемо, що навіть це більше число поступається за величиною перед числом 2^{222}.

І справді,

$$32^{22} = (2^5)^{22} = 2^{110}$$

— степінь менший, ніж 2^{222}.

Отже, найбільше число верхнього рядка — 2^{222}.

Тепер нам залишається порівняти одне з одним п'ять чисел — щойно одержане і наступні чотири:

$$22^{2^2},\ 2^{22^2},\ 2^{2^{22}},\ 2^{2^{2^2}}.$$

Останнє число, яке дорівнює всього 2^{16}, вибуває із змагання. Далі, перше число цього ряду, яке дорівнює 22^4 і є меншим, ніж 32^4 або 2^{20}, менше за кожне з двох наступних. Підлягають порівнянню, отже, три числа, кожне з яких є степінь 2, показник якого більший. Однак з трьох показників

$$222,\ 484 \text{ і } 2^{20+2}\ (= 2^{10\cdot 2} \cdot 2 \approx 10^6 \cdot 4)$$

останній — явно найбільший.

Тому найбільше число, яке можна зобразити чотирма двійками, таке:

$$2^{2^{22}}.$$

Не вдаючись до послуг логарифмічних таблиць, ми можемо скласти собі приблизне уявлення про величину цього числа, користуючись наближеною рівністю

$$2^{10} \approx 1000.$$

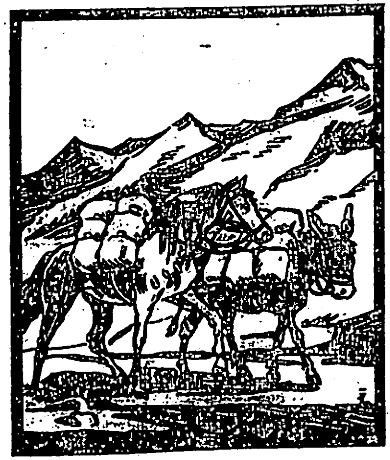
Справді,

$$2^{22} = 2^{20} \cdot 2^2 \approx 4 \cdot 10^6,$$
$$2^{2^{22}} \approx 2^{4\ 000\ 000} > 10^{1\ 200\ 000}.$$

Отже, в цьому числі — понад мільйон цифр.

РОЗДІЛ II

МОВА АЛГЕБРИ



Майстерність складати рівняння

Мова алгебри — рівняння. «Щоб розв'язати питання яке стосується чисел або абстрактних відношень величин, треба лише перекласти задачу з рідної мови на мову алгебраїчну», — писав великий Ньютон у своєму підручнику алгебри, названому «Загальною арифметикою». Як саме виконується такий переклад з рідної мови на алгебраїчну, Ньютон показав на прикладах. Ось один з них:

Рідною мовою:	Мовою алгебри:
Купець мав деяку суму грошей.	x
За перший рік він витратив 100 фунтів.	$x-100$
До суми, яка залишилась, додав третю її частину.	$(x-100)+\frac{x-100}{3}=\frac{4x-400}{3}$
У наступному році він знов витратив 100 фунтів	$\frac{4x-400}{3}-100=\frac{4x-700}{3}$
і збільшив суму, яка залишилася, на третю її частину.	$\frac{4x-700}{3}+\frac{4x-700}{9}=\frac{16x-2800}{9}$
У третьому році він знову витратив 100 фунтів.	$\frac{16x-2800}{9}-100=\frac{16x-3700}{9}$

Після того як він додав до того, що залишилось, третю його частину, капітал його став вдвічі більший за початковий	$\frac{16x-3700}{9}+\frac{16x-3700}{27}=\frac{64x-14800}{27}$ $\frac{64x-14800}{27}=2x.$

Щоб визначити початковий капітал купця, залишається тільки розв'язати останнє рівняння.

Розв'язання рівнянь — часто справа неважка; складати рівняння за даними задачі значно важче. Ви щойно бачили, що майстерність складати рівняння справді зводиться до вміння перекладати «з рідної мови на алгебраїчну». Однак мова алгебри дуже небагатослівна; тому перекласти на неї можна без утруднень не кожний зворот рідної мови. Переклади трапляються різні щодо трудності, як переконається читач з ряду наведених далі прикладів на складання рівнянь першого степеня.

Життя Діофанта

ЗАДАЧА

Історія зберегла нам мало рис біографії визначного стародавнього математика Діофанта. Все, що відомо про нього, взято з надпису на його гробниці — надпису, складеного у формі математичної задачі. Ми наведемо тут цей надпис.

Рідною мовою:	Мовою алгебри:
Путнику! Тут поховано прах Діофанта. І розповісти про те, який вік його був дуже довгий, можна лиш мовою чисел.	x
Шосту частину його становило прекрасне дитинство.	$\frac{x}{6}$
Дванадцята частка кінчилась — покрилося пухом його підборіддя.	$\frac{x}{12}$
Сьому частину життя провів Діофант у бездітному шлюбі.	$\frac{x}{7}$

Минуло п'ять років, і він став батьком щасливим — первісток синок народився у нього.	5
Та синові доля судила прожити лише половину прекрасного й світлого життя на землі у порівнянні з батьком.	$\frac{x}{2}$
І в скорботі глибокій старий ще прожив роки чотири з тих пір, як сина він втратив.	$x=\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4$

Скажи, скільки років життя досягнувши,
Смерть сприйняв Діофант?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Розв'язавши рівняння і визначивши, що $x = 84$, узнаємо такі риси біографії Діофанта: він одружився, коли йому був 21 рік, став батьком на 38 році, втратив сина на 80 році і помер у 84 роки.

Кінь і мул

ЗАДАЧА

Ось ще нескладна старовинна задача, яку легко перекласти з рідної мови на мову алгебри.

«Кінь і мул ішли бік у бік з важкою поклажею на спині. Кінь скаржився на свій непомірний тягар. «Чому ти скаржишся? — запитав його мул. — Адже якщо я візьму у тебе один мішок, моя ноша стане вдвічі важча за твою. А ось якби ти зняв з моєї спини один мішок, твоя поклажа стала б однаковою з моєю».

Скажіть же, мудрі математики, скільки мішків ніс кінь і скільки ніс мул?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Якщо я візьму у тебе один мішок,	$x-1$
ноша моя	$y+1$
стане вдвічі важчою за твою.	$y+1=2(x-1)$
А ось коли б ти зняв з моєї спини один мішок,	$y-1$
твоя поклажа	$x+1$
стала б однаковою з моєю.	$y-1=x+1$

Ми звели задачу до системи рівнянь з двома невідомими:

$$\left.\begin{aligned} y+1&=2(x-1)\\ y-1&=x+1\end{aligned}\right\} \quad \text{або} \quad \left\{\begin{aligned} 2x-y&=3\\ y-x&=2.\end{aligned}\right.$$

Розв'язавши рівняння, знаходимо: $x = 5$, $y = 7$. Кінь ніс 5 мішків, а мул ніс 7 мішків.

Четверо братів

ЗАДАЧА

У чотирьох братів є 45 карбованців. Якщо гроші першого збільшити на 2 карбованці, гроші другого зменшити на 2 карбованці, гроші третього збільшити вдвічі, а гроші четвертого зменшити вдвічі, то у всіх буде порівну. Скільки грошей було у кожного?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

У всіх чотирьох братів	$x+y+z+t=45$
якщо гроші першого збільшити на 2 крб.,	$x+2$
гроші другого зменшити на 2 крб.,	$y-2$
гроші третього збільшити вдвічі,	$2z$
гроші четвертого зменшити вдвічі,	$\frac{t}{2}$
то у всіх виявиться порівну.	$x+2=y-2=2z=\frac{t}{2}$

Розчленовуємо останнє рівняння на три окремих:

$$x+2=y-2,$$
$$x+2=2z,$$
$$x+2=\frac{t}{2},$$

звідки

$$y=x+4,$$
$$z=\frac{x+2}{2},$$
$$t=2x+4.$$

Підставивши ці значення у перше рівняння, одержимо:

$$x + x + 4 + \frac{x+2}{2} + 2x + 4 = 45,$$

звідки $x = 8$. Далі знаходимо: $y = 12$, $z = 5$, $t = 20$. Отже, у братів було

8 крб., 12 крб., 5 крб., 20 крб.

Птахи біля річки

ЗАДАЧА

У одного арабського математика XI століття знаходимо таку задачу.

На обох берегах річки росте по пальмі, одна напроти одної. Висота однієї — 30 локтів, другої — 20 локтів; відстань між їх основами — 50 локтів. На верхівці кожної пальми сидить птах. Раптом обидва птахи помітили рибу, яка випливла до поверхні води між пальмами; вони кинулися до неї разом і досягли її одночасно.

Рис. 4.

На якій відстані від основи вищої пальми з'явилася риба?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

З схематичного креслення (рис. 5), користуючись теоремою Піфагора, встановлюємо:

$$AB^2 = 30^2 + x^2, \; AC^2 = 20^2 + (50 - x)^2.$$

Однак $AB = AC$, оскільки обидва птахи пролетіли ці відстані за однаковий час. Тому

$$30^2 + x^2 = 20^2 + (50 - x)^2.$$

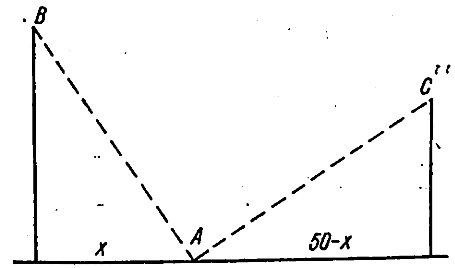


Рис. 5.

Розкривши дужки і зробивши спрощення, одержимо рівняння першого степеня $100x = 2000$, звідки $x = 20$.

Риба з'явилася на відстані 20 локтів від тієї пальми, висота якої 30 локтів.

Прогулянка

ЗАДАЧА

— Зайдіть до мене завтра вдень, — сказав старий лікар своєму знайомому.

— Дякую. Я вийду о третій годині. Може й ви надумаєтесь прогулятися, то виходьте в той же час, зустрінемося на півдорозі.

— Ви забуваєте, що я старий, крокую за годину всього тільки 3 кілометри, а ви, молодий чоловіче, проходите при найповільнішій ході 4 кілометри за годину. Не гріх було б дати мені невелику пільгу.

— Справедливо. Оскільки я проходжу більше за вас на 1 кілометр за годину, то, щоб зрівняти нас, дамо вам цей кілометр, тобто вийду на чверть години раніше. Досить?

— Дуже люб'язно з вашого боку, — поспішив погодитися старий.

Молодий чоловік так і зробив: вийшов з дому у три чверті на третю і рухався із швидкістю 4 кілометри за годину. А лікар вийшов рівно о третій і робив по 3 кілометри за годину. Коли вони зустрілися, старий повернув назад і попрямував додому разом з молодим другом.

Тільки повернувшись до себе додому, молодий чоловік зрозумів, що через ту пільгову чверть години йому довелося у кінцевому підсумку пройти не удвічі, а вчетверо більше, ніж лікареві.

Як далеко від будинку лікаря до будинку його молодого знайомого?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Позначимо відстань між будинками через x (*км*).

Молодий чоловік всього пройшов $2x$, а лікар учетверо менше, тобто $\frac{x}{2}$. До зустрічі лікар пройшов половину пройденого ним шляху, тобто $\frac{x}{4}$, а молодий чоловік — решту, тобто $\frac{3x}{4}$. Свою частину шляху лікар пройшов за $\frac{x}{12}$ години, а молодий чоловік — за $\frac{3x}{16}$ години, причому ми знаємо, що він був у дорозі на $\frac{1}{4}$ години більше, ніж лікар.

Маємо рівняння

$$\frac{3x}{16}-\frac{x}{12}=\frac{1}{4},$$

звідки $x = 2{,}4$ кілометра.

Від будинку молодого чоловіка до будинку лікаря 2,4 кілометра.

Артіль косарів

Відомий фізик А. В. Цінгер у своїх спогадах про Л. М. Толстого розповідає про таку задачу, яка дуже подобалася великому письменникові:

«Артілі косарів треба було скосити дві луки, одна вдвоє більша за другу. Половину дня артіль косила велику луку. Після цього артіль поділилася навпіл: перша половина залишилася на великій луці і докосила її під вечір до кінця; друга ж половина косила малу луку, на якій

до вечора залишилася ще ділянка, скошена другого дня одним косарем за один день праці.

Скільки косарів було в артілі?»

РОЗВ'ЯЗАННЯ

У цьому випадку, крім головного невідомого — числа косарів, яке ми позначимо через x, — зручно ввести ще й допоміжне — розмір ділянки, яку скошує один косар за 1 день; позначимо його через y. Хоч задача і не потребує його визначення, воно полегшить нам знаходження головного невідомого.

Рис. 6.

Позначимо через x і y площу великої луки. Цю луку косили половину дня x косарів; вони скосили $x \cdot \frac{1}{2} \cdot y = \frac{xy}{2}$.

Протягом другої половини дня її косила тільки половина артілі, тобто $\frac{x}{2}$ косарів; вони скосили

$$\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot y=\frac{xy}{4}.$$

Оскільки до вечора було скошено всю луку, то площа її становить

$$\frac{xy}{2}+\frac{xy}{4}=\frac{3xy}{4}.$$

2 93

Виразимо тепер через x і y площу меншої луки. Її протягом половини дня косили $\frac{x}{2}$ косарів і скосили площу $\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot y=\frac{xy}{4}$.

Додамо недокошену ділянку, яка саме і дорівнює y (площі, яку скошує один косар за один день), і одержимо площу меншої луки:

$$\frac{xy}{4}+y=\frac{xy+4y}{4}.$$

Залишається перекласти на мову алгебри фразу: «перша лука вдвічі більша за другу»,— і рівняння складено:

$$\frac{3xy}{4}:\frac{xy+4y}{4}=2, \text{ або } \frac{3xy}{xy+4y}=2.$$

Скоротимо дріб у лівій частині рівняння на y; завдяки цьому скоротиться допоміжне невідоме, і рівняння набуде вигляду

$$\frac{3x}{x+4}=2, \text{ або } 3x=2x+8,$$

звідки $x=8$.

В артілі було 8 косарів.

Після видрукування першого видання «Цікавої алгебри» проф. А. В. Цінгер надіслав авторові докладне і дуже цікаве повідомлення, яке стосувалося цієї задачі. Головний ефект задачі, на його думку, полягав у тому, що «вона зовсім не алгебраїчна, а арифметична і притому дуже проста і утруднює лише своєю нешаблонною формою».

«Історія цієї задачі така, — продовжує проф. А. В. Цінгер. — У Московському університеті за тих часів, коли там училися мій батько та мій дядько І. І. Раєвський (близький друг Л. М. Толстого), серед інших дисциплін викладали щось на зразок педагогіки. З цією метою студенти повинні були відвідувати виділену для університету міську народну школу і там у співробітництві з досвідченими вчителями робити вправи в викладанні. Серед товаришів Цінгера та Раєвського був один студент на прізвище Петров, за розповідями — дуже обдарована й оригінальна людина. Цей Петров (який помер дуже молодим, здається, від сухот) говорив, що на уроках

в арифметики учнів псують, привчаючи їх до шаблонних задач і до шаблонних способів розв'язання. На підтвердження своєї думки Петров придумував задачі, які через свою нешаблонність завдавали клопоту «досвідченим майстерним учителям», але легко розв'язувалися більш здібними учнями, ще не зіпсованими навчанням. До числа таких задач (їх Петров склав декілька) належить і задача про артіль косарів. Досвідчені вчителі, зрозуміло, могли розв'язувати її за допомогою рівняння, але просте арифметичне розв'язання їм не давалося. А проте задача така проста, що залучати до її розв'язання алгебраїчний апарат зовсім не варто.

Якщо велику луку півдня косила вся артіль і півдня півартілі, то зрозуміло, що за півдня півартілі скошує $\frac{1}{3}$ луки. Отже, на малій луці залишилася нескошеною ділянка $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$. Якщо один косар за день скошує $\frac{1}{6}$ луки, а скошено було $\frac{6}{6}+\frac{2}{6}=\frac{8}{6}$, то косарів було 8.

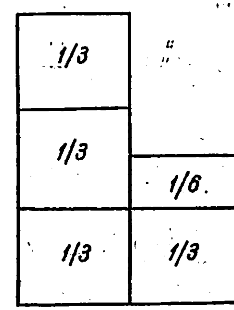


Рис. 7.

Л. М. Толстой, який все життя любив фокусні, не дуже хитромудрі задачі, цю задачу знав від мого батька ще з молодих років. Коли про цю задачу мені довелося розмовляти з Толстим — уже стариком, він особливо захопився тим, що задача стає простішою і зрозумілішою, «якщо при розв'язуванні користуватися найпримітивнішим кресленням (рис. 7)».

Нижче нам трапиться ще декілька задач, які при певній кмітливості простіше розв'язуються арифметично, ніж алгебраїчно.

Корови на луці

ЗАДАЧА

«При вивченні наук задачі корисніші за правила»,— писав Ньютон у своїй «Загальній арифметиці» і супроводжував теоретичні вказівки рядом прикладів. У їх числі знаходимо задачу про корів, які випасаються на луці, — родоначальницю особливого типу задач на зразок такої.

«Трава на всій луці росте однаково ґусто і швидко. Відомо, що 70 корів з'їли б її за 24 дні, а 30 корів — за 60 днів. Скільки корів з'їли б усю траву луки за 96 днів?»

Задача ця стала за сюжет для гумористичного оповідання, яке нагадує оповідання А. П. Чехова «Репетитор». Двоє дорослих, родичі школяра, якому цю задачу задано для розв'язання, безуспішно трудяться над нею і не розуміють:

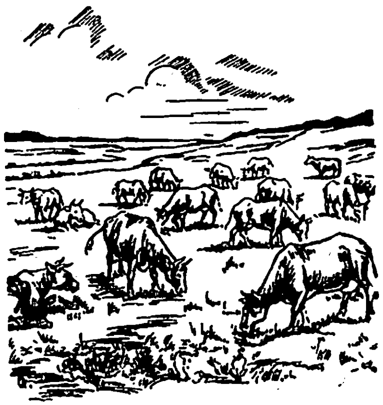


Рис. 8.

— Виходить щось дивне,— говорить один з них:— якщо за 24 дні 70 корів поїдають усю траву луки, то скільки корів з'їдять її за 96 днів? Звичайно, $\frac{1}{4}$ від 70, тобто $17\frac{1}{2}$ корів... Перше безглуздя! А ось друге: 30 корів поїдають траву за 60 днів; скільки корів поїдять її за 96 днів? Виходить ще гірше: $18\frac{3}{4}$ корови. Крім того, якщо 70 корів поїдають траву за 24 дні, то 30 корів витрачають на це 56 днів, а зовсім не 60, як твердить задача.

— А врахували ви, що трава весь час росте? — запитує другий.

Зауваження слушне: трава безперервно росте, і якщо цього не враховувати, то не тільки не можна розв'язувати задачу, а й умова її видаватиметься суперечливою.

Як же розв'язується задача?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Введемо і тут допоміжне невідоме, яке означатиме добовий приріст трави у частках її запасу на луці. За одну добу приростає y, а за 24 дні — $24y$; якщо загальний запас трави прийняти за одиницю, то протягом 24 днів корови поїдають

$$1 + 24y.$$

За добу вся череда (з 70 корів) поїдає

$$\frac{1 + 24y}{24},$$

а одна корова поїдає

$$\frac{1 + 24y}{24 \cdot 70}.$$

Так само з того, що 30 корів з'їли б траву тієї ж луки за 60 діб, знаходимо, що одна корова поїдає за добу

$$\frac{1 + 60y}{30 \cdot 60}.$$

Однак кількість трави, яку з'їдає корова за добу, для обох черед однакова. Тому

$$\frac{1 + 24y}{24 \cdot 70} = \frac{1 + 60y}{30 \cdot 60},$$

звідки

$$y = \frac{1}{480}.$$

Знайшовши y (величину приросту), легко вже визначити, яку частку початкового запасу трави з'їдає корова за добу:

$$\frac{1 + 24y}{24 \cdot 70} = \frac{1 + 24 \cdot \frac{1}{480}}{24 \cdot 70} = \frac{1}{1600}.$$

Нарешті, складаємо рівняння для остаточного розв'язання задачі: якщо шукане число корів x, то

$$\frac{1 + 96 \cdot \frac{1}{480}}{96x} = \frac{1}{1600},$$

звідки $x = 20$.

20 корів з'їли б усю траву за 96 днів.

Задача Ньютона

Розглянемо тепер ньютонову задачу про биків, на зразок якої складено попередню задачу.

Задачу, однак, склав не сам Ньютон; вона є продуктом народної математичної творчості.

«Три луки, вкриті травою однакової густоти і швидкості росту, мають площі: $3\frac{1}{3}$, 10 і 24 гектари. Перша прогодувала 12 биків протягом 4 тижнів, друга — 21 бика протягом 9 тижнів. Скільки биків може прогодувати третя лука протягом 18 тижнів?»

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Введемо допоміжне невідоме y, що показує, яка частка початкового запасу трави приростає на 1 гектарі протягом тижня. На першій луці протягом тижня приростає трави $3\frac{1}{3}y$, а протягом 4 тижнів $3\frac{1}{3}y \cdot 4 = \frac{40}{3}y$ того запасу, який спочатку був на 1 гектарі. Це рівнозначно тому, що початкова площа луки збільшилася і становила б

$$\left(3\frac{1}{3}+\frac{40}{3}y\right)$$

гектарів. Інакше кажучи, бики з'їли стільки трави, скільки є на луці площею $3\frac{1}{3}+\frac{40}{3}y$ гектарів. За один тиждень 12 биків з'їли четверту частину цієї кількості, а 1 бик за тиждень $\frac{1}{48}$ частину, тобто запас, який є на площі

$$\left(3\frac{1}{3}+\frac{40y}{3}\right):48=\frac{10+40y}{144}$$

гектарів.

Таким же способом знаходимо площу луки, яка годує одного бика протягом тижня, з даних для другої луки:

Тижневий приріст на 1 гектар $= y$,
9-тижневий » » 1 » $= 9y$,
» » » 10 гектарів $= 90y$.

Площа ділянки, яка містить запас трави для годівлі 21 бика протягом 9 тижнів, становить

$$10+90y.$$

Площа, достатня для годівлі 1 бика протягом тижня,—

$$\frac{10+90y}{9\cdot 21}=\frac{10+90y}{189}$$

гектарів. Обидві норми для годівлі повинні бути однакові:

$$\frac{10+40y}{144}=\frac{10+90y}{189}.$$

Розв'язавши це рівняння, знайдемо $y=\frac{1}{12}$.

Визначимо тепер площу луки, наявний запас трави якої достатній для годівлі одного бика протягом тижня:

$$\frac{10+40y}{144}=\frac{10+40\cdot\frac{1}{12}}{144}=\frac{5}{54}$$

гектарів. Нарешті, позначивши шукане число биків через x, матимемо:

$$\frac{24+24\cdot 18\cdot\frac{1}{12}}{18x}=\frac{5}{54},$$

звідки $x=36$. Третя лука може прогодувати протягом 18 тижнів 36 биків.

Перестановка годинникових стрілок

ЗАДАЧА

Біограф і друг відомого фізика А. Ейнштейна А. Мошковський одного разу, бажаючи розважити свого приятеля під час хвороби, запропонував йому таку задачу (рис. 9):

«Візьмемо,— сказав Мошковський,— положення стрілок о 12 годині. Коли б у цьому положенні велика і мала стрілки обмінялися місцями, вони дали б усе ж таки правильні показання. Однак в інші моменти, наприклад, о 6 годині, взаємний обмін стрілок призвів би до абсурду, якого на годиннику, що правильно працює, бути не може: хвилинна стрілка не може стояти на 6, коли годинна стрілка показує 12. Постає питання: коли і як часто стрілки годинника займають такі положення, що заміна однієї з них другою дає нове положення, також можливе на правильному годиннику?

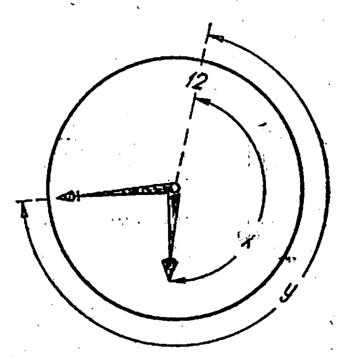


Рис. 9.

— Так,— відповів Ейнштейн,— ця задача цілком підходить для людини, змушеної через хворобу залишатися у постелі; досить цікава і не дуже легка. Боюся тільки, що розвага триватиме недовго; я вже натрапив на шлях до розв'язання.

І піднявшися на ліжку, він кількома штрихами накидав на папері схему, що зображувала умову задачі. Для розв'язання йому було потрібно не більше часу, ніж мені на формулювання задачі...»

Як же розв'язується ця задача?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Будемо вимірювати відстані стрілок по колу циферблата від точки, де стоїть цифра 12, у 60-х частках кола.

Нехай одне з потрібних положень стрілок спостерігалося тоді, коли годинна стрілка відійшла від цифри 12 на x поділок, а хвилинна — на y поділок. Оскільки годинна стрілка проходить 60 поділок за 12 годин, тобто 5 поділок за годину, то x поділок вона пройшла за $\frac{x}{5}$ годин. Інакше кажучи, після того як годинник показував 12, минуло $\frac{x}{5}$ годин. Хвилинна стрілка пройшла y поділок за y хвилин, тобто за $\frac{y}{60}$ годин. Інакше кажучи, цифру 12 хвилинна стрілка пройшла $\frac{y}{60}$ годин тому, або через

$$\frac{x}{5}-\frac{y}{60}$$

годин після того, коли обидві стрілки були на дванадцяти. Це число є цілим (від 0 до 11), бо воно показує, скільки повних годин минуло після дванадцяти.

Коли стрілки обміняються місцями, ми знайдемо аналогічно, що з дванадцятої години до часу, який покажуть стрілки, минуло

$$\frac{y}{5}-\frac{x}{60}$$

повних годин. Це число також є цілим (від 0 до 11).

Маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x}{5}-\frac{y}{60}=m, \\ \frac{y}{5}-\frac{x}{60}=n, \end{cases}$$

де m і n — цілі числа, які можуть змінюватися від 0 до 11. З цієї системи знаходимо:

$$x=\frac{60(12m+n)}{143},$$
$$y=\frac{60(12n+m)}{143}.$$

Надаючи m і n значень від 0 до 11, ми визначимо всі потрібні положення стрілок. Оскільки кожне з 12 значень m можна зіставляти з кожним з 12 значень n, то, здавалося б, число всіх розв'язань становить $12\cdot 12=144$. Однак у дійсності воно дорівнює 143, бо при $m=0$, $n=0$ і при $m=11$, $n=11$ положення стрілок одне й те саме.

При $m=11$, $n=11$ маємо:

$$x=60, \quad y=60,$$

тобто годинник показує 12, як і у випадку $m=0$, $n=0$.

Усіх можливих положень ми не розглядатимемо; візьмемо лише два приклади.

Перший приклад:

$$m=1, \quad n=1;$$
$$x=\frac{60\cdot 13}{143}=5\frac{5}{11}, \quad y=5\frac{5}{11},$$

тобто годинник показує 1 годину $5\frac{5}{11}$ хвилин; у цей момент стрілки суміщаються; їх, звичайно, можна поміняти місцями (як і при всіх інших суміщеннях стрілок).

Другий приклад:

$$m=8, \quad n=5;$$
$$x=\frac{60(5+12\cdot 8)}{143}\approx 42{,}38, \quad y=\frac{90(8+12\cdot 5)}{143}\approx 28{,}53.$$

Відповідні моменти: 8 годин 28,53 хвилини і 5 годин 42,38 хвилини.

Число розв'язань ми знаємо: 143. Щоб знайти всі точки циферблата, які дають потрібне положення стрілок, треба обвід циферблата поділити на 143 рівні частки: одержимо 143 точки, які і є шуканими. У проміжних точках потрібні положення стрілок неможливі.

Суміщення годинникових стрілок

ЗАДАЧА

Скільки є положень на годиннику, який правильно працює, коли годинна і хвилинна стрілки суміщаються?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Ми можемо скористатися рівняннями, виведеними при розв'язанні попередньої задачі: адже коли годинна і хвилинна стрілки сумістилися, то їх можна поміняти місцями. При цьому обидві стрілки пройшли однакове число поділок від цифри 12, тобто $x = y$. Таким чином, з міркувань, що стосуються попередньої задачі, ми виводимо рівняння

$$\frac{x}{5} - \frac{y}{60} = m,$$

де m — ціле число від 0 до 11. З цього рівняння знаходимо:

$$x = \frac{60m}{11}.$$

З дванадцяти можливих значень для m (від 0 до 11) ми одержуємо не 12, а тільки 11 різних положень стрілок, бо при $m = 11$ ми знаходимо $x = 60$, тобто обидві стрілки пройшли 60 поділок і знаходяться на цифрі 12; це саме буде і при $m = 0$.

Вміння відгадувати числа

Кожний з вас, безперечно, зустрічався з «фокусами» по відгадуванню чисел. Фокусник звичайно пропонує виконати дії такого характеру: задумай число, додай 2, помнож на 3, відніми 5, відніми задумане число і т. д. — всього п'ять, а то й десяток дій. Потім фокусник запитує, що у вас вийшло в результаті, і, діставши відповідь, вмить називає задумане вами число.

Секрет «фокуса», зрозуміло, дуже простий, і в його основі лежать усе ті ж самі рівняння.

Нехай, наприклад, фокусник запропонував вам виконати програму дій, вказану у лівій колонці:

Задумай число,	x
додай 2,	$x + 2$
помнож результат на 3,	$3x + 6$
відніми 5,	$3x + 1$
відніми задумане число,	$2x + 1$
помнож на 2,	$4x + 2$
відніми 1	$4x + 1$

Далі фокусник пропонує вам сказати остаточний результат і, почувши його, вмить називає задумане число. Як він це робить?

Щоб зрозуміти це, досить подивитися на праву колонку, де вказівки фокусника перекладено на мову алгебри. З цієї колонки видно, що коли ви задумали якесь число x, то після всіх дій у вас повинно вийти $4x + 1$. Знаючи це, неважко «відгадати» задумане число.

Нехай, наприклад, ви сказали фокусникові, що у вас вийшло 33. Тоді фокусник швидко розв'язує у думці рівняння $4x + 1 = 33$ і знаходить: $x = 8$. Іншими словами, від остаточного результату треба відняти одиницю ($33 - 1 = 32$) і потім одержане число поділити на 4 ($32 : 4 = 8$); це і дає задумане число (8). Якщо ж у вас виходить 25, то фокусник у думці виконує такі дії: $25 - 1 = 24$, $24 : 4 = 6$, а потім повідомляє вас, що ви задумали 6.

Як бачите, все дуже просто: фокусник заздалегідь знає, що треба зробити з результатом, щоб одержати задумане число.

Зрозумівши це, ви можете ще більше здивувати і спантеличити ваших приятелів, запропонувавши їм **самим** вибрати характер дій над задуманим числом. Ви пропонуєте приятелеві задумати число і робити у будь-якому порядку дії такого характеру: додавати або віднімати певне число (скажімо: додати 2, відняти 5 і т. д.), множити* на відоме число (на 2, на 3 і т. д.), додавати або віднімати задумане число. Ваш приятель нагромаджує, щоб заплутати вас, ряд дій. Наприклад, він задумав число 5 (цього він вам не говорить) і, виконуючи дії, каже:

— Я задумав число, помножив його на 2, додав до результату 3, потім додав задумане число; тепер я додав 1, помножив на 2, відняв задумане число, відняв 3, ще відняв задумане число, відняв 2. Нарешті, я помножив результат на 2 і додав 3.

* Ділити краще не дозволяйте, бо це дуже ускладнює «фокус».

Вирішивши, що він вас зовсім заплутав, він з переможним виглядом повідомляє вам:

— Вийшло 49.

На його подив ви негайно повідомляєте йому, що він задумав число 5.

Як ви це робите? Тепер це вже досить ясно. Коли ваш приятель повідомляє вас про дії, які він виконує над задуманим числом, ви одночасно дієте у думці з невідомим вам x. Він вам каже: «Я задумав число...», а ви мислено промовляєте:«це означає, що у нас є x». Він каже: «... помножив його на 2...» (він і справді робить множення чисел), а ви собі продовжуєте: «тепер $2x$». Він каже: «...додав до результату 3...», а ви негайно простежуєте: $2x+3$, і т. д. Коли він «заплутав» вас остаточно і виконав усі ті дії, які перелічено вище, у вас вийшло те, що вказано нижче (ліва колонка містить те, що вголос промовляє ваш приятель, а права — ті дії, які ви виконуєте в думці):

Я задумав число	x
помножив його на 2,	$2x$
додав до результату 3,	$2x+3$
потім додав задумане число,	$3x+3$
тепер я додав 1,	$3x+4$
помножив на 2,	$6x+8$
відняв задумане число,	$5x+8$
відняв 3,	$5x+5$
ще відняв задумане число,	$4x+5$
відняв 2,	$4x+3$
нарешті, я помножив результат на 2	$8x+6$
і додав 3	$8x+9$

Нарешті, ви подумали: остаточний результат $8x+9$. Тепер він каже: «У мене вийшло 49». А у вас готове рівняння : $8x+9=49$. Розв'язати його — це вже дрібниця, і ви негайно повідомляєте йому, що він задумав число 5.

Фокус цей ефектний тому, що не ви пропонуєте ті операції, які треба виконати над задуманим числом, а сам товариш ваш «вигадує» їх.

Є, однак, випадок, коли фокус не вдається. Якщо, наприклад, після ряду операцій ви (рахуючи у думці) одержали $x+14$, а потім ваш товариш каже: «...тепер я відняв задумане число; у мене вийшло 14», а ви стежите за ним: $(x+14)-x=14$ — справді вийшло 14, але ніякого рівняння немає і відгадати задумане число ви

не можете. Що ж у такому випадку робити? Робіть так: як тільки у вас виходить результат, у якому немає невідомого x, ви перебиваєте товариша словами: «Стоп! Тепер я можу, нічого не запитуючи, сказати, скільки у тебе вийшло: у тебе 14». Це вже зовсім спантеличить вашого товариша — адже він зовсім нічого вам не говорив! І, хоч ви так і не відгадали задумане число, фокус вийшов на славу!

Ось приклад (як і раніше, у лівій колонці стоїть те, що говорить ваш приятель):

Я задумав число,	x
додав до нього 2	$x+2$
і результат помножив на 2,	$2x+4$
тепер я додав 3,	$2x+7$
відняв задумане число,	$x+7$
додав 5,	$x+12$
потім я відняв задумане число...	12

В той момент, коли у вас вийшло число 12, тобто вираз, який не містить невідоме x, ви й перебиваєте товариша, повідомляючи йому, що тепер у нього вийшло 12.

Трохи попрактикувавшись, ви легко зможете показати своїм приятелям такі «фокуси».

Уявна безглуздість

ЗАДАЧА

Ось задача, яка може видатися зовсім абсурдною. Чому дорівнює 84, якщо $8\cdot 8=54$?

Це дивне запитання зовсім не позбавлене змісту, і задачу можна розв'язати за допомогою рівнянь.

Спробуйте розшифрувати її.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Ви здогадалися, мабуть, що числа, які входять у задачу, написані не за десятковою системою; інакше запитання «чому дорівнює 84» було б безглуздим. Нехай основа невідомої системи числення є x. Тоді число «84» означає 8 одиниць другого розряду і 4 одиниці першого, тобто

$$«84» = 8x+4.$$

Число «54» означає $5x+4$.

Маємо рівняння $8 \cdot 8 = 5x + 4$, тобто у десятковій системі $64 = 5x + 4$, звідки $x = 12$.

Числа написані за дванадцятковою системою, і «84» = $8 \cdot 12 + 4 = 100$. Отже, якщо $8 \cdot 8$ = «54», то «84» = = 100.

Таким же способом розв'язується і друга задача в цьому роді:

Чому дорівнює 100, коли $5 \cdot 6 = 33$?

Відповідь: 81 (дев'яткова система числення).

Рівняння думає за нас

Якщо ви маєте сумнів у тому, що рівняння іноді буває передбачливіше за нас самих, розв'яжіть таку задачу:

Батькові 32 роки, синові 5 років. Через скільки років батько буде у 10 раз старший за сина?

Позначимо шуканий строк через x. Коли мине x років, батькові буде $32 + x$ років, а синові $5 + x$. І оскільки батько має бути тоді у 10 раз старший за сина, то матимемо рівняння

$$32 + x = 10(5 + x).$$

Розв'язавши його, одержуємо $x = -2$.

«Через мінус 2 роки» означає «2 роки тому». Коли ми складали рівняння, ми не подумали про те, що вік батька ніколи в майбутньому не буде у 10 раз більший за вік сина — таке співвідношення могло бути тільки в минулому. Рівняння виявилося більш вдумливим, ніж ми, і нагадало нам про недогляд.

Курйози і несподіванки

При розв'язанні рівнянь ми натрапляємо іноді на відповіді, які можуть завести у безвихідь малодосвідченого математика. Наведемо кілька прикладів.

1. Знайти двозначне число, що має такі властивості. Цифра десятків на 4 менша за цифру одиниць. Якщо від числа, записаного тими ж цифрами, але у зворотному порядку, відняти шукане число, то вийде 27.

Позначивши цифру десятків через x, а цифру одиниць — через y, ми легко складемо систему рівнянь для цієї задачі:

$$\begin{cases} x = y - 4, \\ (10y + x) - (10x + y) = 27. \end{cases}$$

Підставивши у друге рівняння значення x з першого, знайдемо:

$$10y + y - 4 - [10(y - 4) + y] = 27,$$

а після перетворень:

$$36 = 27.$$

Ми не дістали значень невідомих, зате ми довідалися, що $36 = 27$... Що це означає?

Це означає лише, що двозначного числа, яке задовольняло б поставлені умови, не існує і що складені рівняння суперечать одне одному.

Справді: помноживши обидві частини першого рівняння на 9, ми знайдемо з нього

$$9y - 9x = 36,$$

а з другого (після розкриття дужок і зведення подібних членів):

$$9y - 9x = 27.$$

Одна і та ж величина $9y - 9x$ відповідно до першого рівняння дорівнює 36, а відповідно до другого 27. Це безперечно неможливо, оскільки $36 \neq 27$.

Подібне непорозуміння чекає й на тих, хто спробує розв'язати таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2y^3 = 8, \\ xy = 4. \end{cases}$$

Поділивши перше рівняння на друге, одержимо:

$$xy = 2,$$

а зіставивши одержане рівняння з другим, побачимо, що

$$xy = 4;$$
$$xy = 2,$$

тобто $4 = 2$. Чисел, які задовольняють цю систему, не існує. Системи рівнянь, які, подібно до щойно розглянутих, не мають розв'язань, називаються несумісними.

2. На іншого роду несподіванку натрапимо ми, якщо трохи змінимо умову попередньої задачі. Будемо вважати, що цифра десятків не на 4, а на 3 менша за цифру одиниць, а в решті залишимо умову задачі такою самою. Що це за число?

Складемо рівняння. Якщо цифру десятків позначимо через x, то число одиниць буде $x+3$. Переклавши задачу на мову алгебри, одержимо:

$$10(x+3)+x-[10x+(x+3)]=27.$$

Зробивши спрощення, прийдемо до рівності

$$27=27.$$

Ця рівність безперечно правильна, але вона нічого не говорить про значення x. Чи означає це, що чисел, які задовольняють умову задачі, не існує?

Навпаки, це означає, що складене нами рівняння є тотожність, тобто що воно вірне при будь-якому значенні невідомого x. Справді, легко переконатися в тому, що зазначену у задачі властивість має кожне двозначне число, у якого цифра одиниць на 3 більша за цифру десятків

$$14+27=41, \qquad 47+27=74,$$
$$25+27=52, \qquad 58+27=85,$$
$$36+27=63, \qquad 69+27=96.$$

3. Знайти тризначне число, яке має такі властивості: цифра десятків 7; цифра сотень на 4 менша за цифру одиниць; якщо цифри цього числа розмістити у зворотному порядку, то нове число буде на 396 більше від шуканого.

Складемо рівняння, позначивши цифру одиниць через x:

$$100x+70+x-4-[100(x-4)+70+x]=396.$$

Це рівняння після спрощень дає рівність

$$396=396.$$

Читачі вже знають, як треба тлумачити подібний результат. Він означає, що кожне тризначне число, в якому перша цифра на 4 менша за третю*, збільшується на 396, коли цифри поставити у зворотному порядку.

* Цифра десятків ролі не відігравала.

Досі ми розглядали задачі, які мають більш або менш штучний, книжний характер; їх призначення — допомогти набути навичок у складанні та розв'язанні рівнянь. Тепер, озброєні теоретично, розглянемо кілька прикладів задач практичних — з галузі виробництва, побуту, військової справи, спорту.

У перукарні

ЗАДАЧА

Чи може алгебра знадобитися в перукарні? Виявляється, що такі випадки бувають. Мені довелося переконатися в цьому, коли одного разу у перукарні підійшов до мене майстер з несподіваним проханням:

— Чи не допоможете нам розв'язати задачу, з якою ми ніяк не вправимося?

— Вже скільки розчину зіпсували через це! — додав другий.

— У чому задача? — спитав я.

— У нас є два розчини перекису водню: 30-процентний і 3-процентний. Треба їх змішати так, щоб утворився 12-процентний розчин. Не можемо підшукати правильної пропорції...

Мені дали папірця, і потрібну пропорцію було знайдено. Вона виявилася дуже простою. Якою саме?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Задачу можна розв'язати й арифметично, але мова алгебри тут веде до мети простіше і швидше. Нехай для виготовлення 12-процентної суміші треба взяти x грамів 3-процентного і y грамів 30-процентного розчину. Тоді у першій порції міститься $0{,}03x$ грамів чистого перекису водню, у другій $0{,}3y$, а разом

$$0{,}03x+0{,}3y.$$

В результаті виходить $(x+y)$ грамів розчину, в якому чистого перекису має бути $0{,}12(x+y)$.

Маємо рівняння

$$0{,}03x+0{,}3y=0{,}12(x+y).$$

З цього рівняння знаходимо $x=2y$, тобто 3-процентного розчину треба взяти вдвічі більше, ніж 30-процентного.

Трамвай і пішохід

ЗАДАЧА

Ідучи вздовж трамвайної колії, я помітив, що кожні 12 хвилин мене наздоганяє трамвай, а кожні 4 хвилини я сам зустрічаю трамвай. І я і трамвай рухаємось рівномірно.

Через скільки хвилин один після другого від'їжджають трамвайні вагони від своїх кінцевих пунктів?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Якщо вагони залишають свої кінцеві пункти кожні x хвилин, то це означає, що у те місце, де я зустрівся з одним з трамваїв, через x хвилин надходить наступний трамвай. Якщо він наздоганяє мене, то за решту $12 - x$ хвилин він повинен пройти той шлях, який я встигаю пройти за 12 хвилин. Значить, той шлях, який я проходжу за 1 хвилину, трамвай проходить за $\frac{12-x}{12}$ хвилин.

Якщо ж трамвай іде мені назустріч, то він зустріне мене через 4 хвилини після попереднього, а за решту $(x - 4)$ хвилин він пройде той шлях, який я встиг пройти за ці 4 хвилини. Отже, той шлях, який я проходжу за 1 хвилину, трамвай проходить за $\frac{x-4}{4}$ хвилин.

Дістаємо рівняння

$$\frac{12-x}{12} = \frac{x-4}{4}.$$

Звідси $x = 6$. Вагони відходять кожні 6 хвилин.

Можна також запропонувати таке (по суті справи арифметичне) розв'язання задачі. Позначимо відстань між двома трамваями, що рухаються один за одним, через a. Тоді між мною і трамваєм, що рухається назустріч, відстань зменшується на $\frac{a}{4}$ за хвилину (оскільки відстань a між трамваєм, який щойно пройшов, і трамваєм, який іде слідом за ним, ми разом проходимо за 4 хвилини). Якщо ж трамвай наздоганяє мене, то відстань між нами щохвилини зменшується на $\frac{a}{12}$. Припустимо тепер, що я протягом хвилини йшов уперед, а потім завернув назад і хвилину йшов у зворотному напрямі (тобто повернувся на попереднє місце). Тоді між мною і трамваєм, який спочатку рухався мені назустріч, за першу хвилину відстань зменшилася на $\frac{a}{4}$, а за другу хвилину (коли цей трамвай доганяв мене) на $\frac{a}{12}$. Отже, за 2 хвилини відстань між нами зменшилася на $\frac{a}{4} + \frac{a}{12} = \frac{a}{3}$. Було б те саме, коли б я стояв на місці, оскільки у кінцевому підсумку я все одно повернувся назад. Отже, коли б я не рухався, то за хвилину (а не за дві) трамвай наблизився б до мене на $\frac{a}{3} : 2 = \frac{a}{6}$, а всю відстань a він проїхав би за 6 хвилин. Це означає, що повз спостерігача, який стоїть нерухомо, трамваї проходять з інтервалом у 6 хвилин.

Пароплав і плоти

ЗАДАЧА

З міста A до міста B, розташованого нижче за течією річки, пароплав ішов (без зупинок) 5 годин. У зворотному напрямі, проти течії, він ішов (рухаючись з тією ж власною швидкістю і не зупиняючись) 7 годин. Скільки годин ідуть від A до B плоти (вони рухаються із швидкістю течії річки)?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Позначимо через x час (у годинах), потрібний пароплаву для того, щоб пройти відстань від A до B у с т о я ч і й в о д і (тобто при русі з власною швидкістю), а через y — час руху плотів. Тоді за годину пароплав проходить $\frac{1}{x}$ відстані AB, а плоти (течія) $\frac{1}{y}$ цієї відстані. Тому вниз по річці пароплав проходить за годину $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ відстані AB, а вгору (проти течії) $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$. Ми ж знаємо з умови задачі, що вниз по річці пароплав проходить за годину $\frac{1}{5}$ відстані, а вгору $\frac{1}{7}$. Дістаємо систему

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{7}. \end{cases}$$

Зауважимо, що для розв'язання цієї системи не слід звільнятися від знаменників: треба просто відняти від першого друге. В результаті ми одержимо:

$$\frac{2}{y}=\frac{2}{35},$$

звідки $y = 35$. Плоти йдуть від A до B 35 годин.

Дві жерстянки кави

ЗАДАЧА

Дві жерстянки, наповнені кавою, мають однакову форму і зроблені з однакової жерсті. Перша важить 2 кілограми і має висоту 12 сантиметрів; друга важить 1 кілограм і має висоту 9,5 сантиметра. Яка чиста вага кави у жерстянках?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Позначимо вагу вмісту великої жерстянки через x, меншої — через y. Вагу самих жерстянок позначимо відповідно через z і t. Маємо рівняння

$$\begin{cases} x + z = 2, \\ y + t = 1. \end{cases}$$

Оскільки ваги вмісту повних жерстянок відносяться, як їхні о б ' є м и, тобто як куби їх висот*, то

$$\frac{x}{y}=\frac{12^3}{9{,}5^3}\approx 2{,}02 \text{ або } x = 2{,}02y.$$

Ваги ж порожніх жерстянок відносяться, як їхні повні п о в е р х н і, тобто як квадрати їхніх висот. Тому

$$\frac{z}{t}=\frac{12^2}{9{,}5^2}\approx 1{,}60 \text{ або } z = 1{,}60t.$$

* Цією пропорцією дозволяється користуватися лише в тому випадку, коли стінки жерстянок не дуже товсті (бо зовнішня і внутрішня поверхні жерстянок, строго кажучи, не подібні і, крім того, висота внутрішньої порожнини банки відрізняється від висоти самої банки).

Підставивши значення x і z у перше рівняння, одержимо систему

$$2{,}02y + 1{,}60t = 2,$$
$$y + t = 1.$$

Розв'язавши її, матимемо:

$$y=\frac{20}{21}=0{,}95, \quad t = 0{,}05.$$

І отже,

$$x = 1{,}92, \quad z = 0{,}08.$$

Вага кави без упаковки: у великій жерстянці 1,92 кілограма, у меншій — 0,94 кілограма.

Вечірка

ЗАДАЧА

На вечірці було 20 танцюючих. Марія танцювала з сімома танцюристами, Ольга — з вісьмома, Віра — з дев'ятьма і так далі до Ніни, яка танцювала з усіма танцюристами. Скільки танцюристів (чоловіків) було на вечірці?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Задача розв'язується дуже просто, якщо вдало вибрати невідоме. Будемо шукати число не танцюристів, а танцюристок, яке позначимо через x:

1-а Марія,	танцювала	з $6 + 1$	танцюристами
2-а Ольга,	»	» $6 + 2$	»
3-я Віра	»	» $6 + 3$	»
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
x-а Ніна	»	» $6 + x$	»

Маємо рівняння

$$x + (6 + x) = 20,$$

звідки

$$x = 7,$$

а отже, число танцюристів —

$$20 - 7 = 13.$$

Морська розвідка

ЗАДАЧА 1

Розвідникові (розвідувальному кораблеві), який рухається у складі ескадри, дано завдання обслідувати район моря на 70 миль у напрямі руху ескадри. Швидкість руху ескадри — 35 миль за годину, швидкість розвідника — 70 миль за годину. Треба визначити, через який час розвідник повернеться до ескадри.

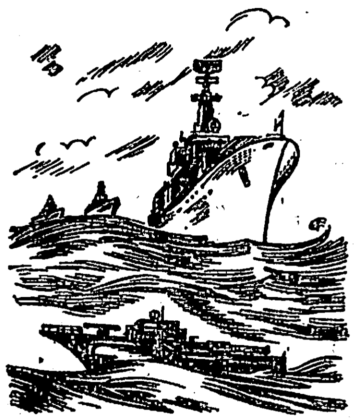


Рис. 10.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Позначимо шукане число годин через x. За цей час ескадра встигла пройти $35x$ миль, а розвідувальний корабель $70x$. Розвідник пройшов уперед 70 миль і частину цього шляху у зворотному напрямі, ескадра ж пройшла решту того ж самого шляху. Разом вони пройшли шлях у $70x + 35x$, який становить $2 \cdot 70$ миль. Маємо рівняння

$$70x + 35x = 140,$$

звідки

$$x = \frac{140}{105} = 1\frac{1}{3}$$

години. Розвідник повернувся до ескадри через 1 годину 20 хвилин.

ЗАДАЧА 2

Розвідник одержав наказ провести розвідку попереду ескадри у напрямі її руху. Через 3 години це судно має повернутися до ескадри. Через який час після залишення ескадри розвідувальне судно повинно повернути назад, якщо швидкість його 60 вузлів, а швидкість ескадри 40 вузлів?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай розвідник повинен повернути назад через x годин; значить, він віддалявся від ескадри x годин, а йшов назустріч їй $3 - x$ годин. Поки всі кораблі йшли в одному напрямі, розвідник встиг за x годин віддалитися від ескадри на різницю пройдених ними шляхів, тобто на

$$60x - 40x = 20x.$$

При поверненні розвідник пройшов шлях назустріч ескадрі $60(3 - x)$, сама ж ескадра пройшла $40(3 - x)$. І той, і друга разом пройшли $10x$. Отже,

$$60(3 - x) + 40(3 - x) = 20x,$$

звідки

$$x = 2\frac{1}{2}.$$

Розвідник повинен змінити курс на зворотний через 2 години 30 хвилин після того, як він покинув ескадру.

На велодромі

ЗАДАЧА

По круговій дорозі велодрому їдуть двоє велосипедистів з незмінними швидкостями. Коли вони їдуть у протилежних напрямах, то зустрічаються кожні 10 секунд; коли ж вони їдуть в одному напрямі, то один наздоганяє другого кожні 170 секунд. Яка швидкість кожного велосипедиста, якщо довжина кругової дороги 170 метрів?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Якщо швидкість першого велосипедиста x, то за 10 секунд він проїжджає $10x$ метрів. Другий же, рухаючись йому назустріч, проїжджає від зустрічі до зустрічі решту кругового шляху, тобто $170 - 10x$ метрів. Якщо ж швидкість другого y, то це становить $10y$ метрів; отже,

$$170 - 10x = 10y.$$

Якщо ж велосипедисти їдуть один слідом за другим, то за 170 секунд перший проїжджає $170x$ метрів, а другий $170y$ метрів. Якщо перший їде швидше, ніж другий, то від одної зустрічі до другої він проїжджає на один круг більше від другого, тобто

$$170x - 170y = 170.$$

Після спрощення цих рівнянь одержуємо:

$$x + y = 17, \quad x - y = 1,$$

звідки $x = 9$, $y = 8$ (метрів за секунду).

Змагання мотоциклів

ЗАДАЧА

При мотоциклетних змаганнях три машини стартували одночасно. Одна з цих машин, яка за годину проходила на 15 кілометрів менше, ніж перша, і на 3 кілометри більше, ніж третя, прибула до кінцевого пункту на 12 хвилин пізніше, ніж перша, і на 3 хвилини раніше, ніж третя. Зупинок у дорозі не було.

Треба визначити:

1. Яка завбільшки ділянка шляху?
2. Яка швидкість кожної машини?
3. Яка тривалість пробігу кожної машини?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Незважаючи на те, що потрібно визначити сім невідомих величин, ми при розв'язанні задачі обійдемося тільки двома; складемо систему з двома невідомими.

Позначимо швидкість другої машини через x. Тоді швидкість першої машини буде $x + 15$, а третьої $x - 3$.

Довжину ділянки позначимо літерою y. Тоді тривалість пробігу буде така:

для першої машини $\dfrac{y}{x+15}$,

» другої » $\dfrac{y}{x}$,

» третьої » $\dfrac{y}{x-3}$.

Ми знаємо, що друга машина була в дорозі на 12 хвилин (тобто на $\frac{1}{5}$ години) більше, ніж перша. Тому

$$\frac{y}{x} - \frac{y}{x+15} = \frac{1}{5}.$$

Третя машина була в дорозі на 3 хвилини (тобто на $\frac{1}{20}$ години) більше, ніж друга. Отже,

$$\frac{y}{x-3} - \frac{y}{x} = \frac{1}{20}.$$

Друге з цих рівнянь помножимо на 4 і віднімемо від першого:

$$\frac{y}{x} - \frac{y}{x+15} - 4\left(\frac{y}{x-3} - \frac{y}{x}\right) = 0.$$

Поділимо всі члени цього рівняння на y (ця величина, як ми знаємо, не дорівнює нулеві) і після цього звільнимося від знаменників. Тоді одержимо:

$$(x + 15)(x - 3) - x(x - 3) - 4x(x + 15) + 4 \times \\ \times (x + 15)(x - 3) = 0,$$

або після розкриття дужок і зведення подібних членів:

$$3x - 225 = 0,$$

звідки

$$x = 75.$$

Знаючи x, знаходимо y з першого рівняння:

$$\frac{y}{75} - \frac{y}{90} = \frac{1}{5},$$

звідки $y = 90$.

Отже, швидкості машин визначено:

90, 75 і 72 кілометри за годину.

Довжина всього шляху становить 90 кілометрів. Поділивши довжину всього шляху на швидкість кожної машини, знайдемо тривалість пробігів:

першої машини	1 година,
другої »	1 година 12 хвилин,
третьої »	1 година 15 хвилин.

Таким чином, усі сім невідомих визначено.

Середня швидкість їзди

ЗАДАЧА

Автомобіль проїхав відстань між двома містами із швидкістю 60 кілометрів за годину і повернувся із швидкістю 40 кілометрів за годину. Якою була середня швидкість його їзди?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Обманлива простота задачі призводить багатьох до помилки. Не вникнувши в умову запитання, обчислюють середнє арифметичне між 60 і 40, тобто знаходять півсуму

$$\frac{60+40}{2}=50.$$

Це «просте» розв'язання було б правильне, коли б поїздка в один бік і у зворотному напрямі тривала однаковий час. Однак зрозуміло, що зворотна поїздка (з меншою швидкістю) повинна була тривати більше часу, ніж їзда туди. Врахувавши це, ми зрозуміємо, що відповідь 50 — неправильна.

І справді, рівняння дає другу відповідь. Скласти рівняння неважко, якщо ввести допоміжне невідоме — величину l відстані між містами. Позначивши шукану середню швидкість через x, складемо рівняння

$$\frac{2l}{x}=\frac{l}{60}+\frac{l}{40}.$$

Оскільки l не дорівнює нулеві, можемо рівняння поділити на l; при цьому одержимо:

$$\frac{2}{x}=\frac{1}{60}+\frac{1}{40},$$

звідки

$$x=\frac{2}{\frac{1}{60}+\frac{1}{40}}=48.$$

Отже, правильна відповідь не 50 кілометрів за годину, а 48.

Коли б ми розв'язували цю задачу у літерних позначеннях (туди автомобіль їхав із швидкістю a кілометрів за годину, а назад — із швидкістю b кілометрів за годину), то одержали б рівняння

$$\frac{2l}{x}=\frac{l}{a}+\frac{l}{b},$$

звідки для x дістали б значення

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Ця величина називається **середнім гармонійним** для величин a і b.

Отже, середня швидкість їзди виражається не середнім арифметичним, а середнім гармонійним для швидкостей руху. Для додатних a і b середнє гармонійне завжди менше, ніж їх середнє арифметичне

$$\frac{a+b}{2},$$

що ми й бачили на числовому прикладі (48 менше, ніж 50).

Швидкодіючі обчислювальні машини

Бесіда про рівняння у плані «Цікавої алгебри» не може пройти повз розв'язання рівнянь на обчислювальних машинах. Ми вже говорили про те, що обчислювальні машини можуть «грати» в шахи (або в шашки). Математичні машини можуть виконувати й інші завдання, наприклад, переклад з однієї мови на іншу, оркестровку музичної мелодії тощо. Треба тільки розробити відповідну «програму», за якою машина буде діяти.

Звичайно ми не будемо розглядати тут «програми» для гри в шахи або для перекладу з однієї мови на іншу:

ці «програми» дуже складні. Ми розглянемо дві дуже простенькі «програми». Однак спочатку треба сказати кілька слів про будову обчислювальної машини.

Вище (в розділі I) ми говорили про пристрої, які дають можливість виконувати багато тисяч обчислень за секунду. Ця частина обчислювальної машини, яка служить для безпосереднього виконання дій, називається *арифметичним пристроєм*. Крім того, машина має *керуючий пристрій* (який регулює роботу всієї машини) і так звану *пам'ять*. Пам'ять, або, інакше, запам'ятовуючий пристрій, являє собою сховище для чисел та умовних сигналів. Нарешті, машина має окремі пристрої для введення нових цифрових даних і для видачі готових результатів. Ці готові результати машина друкує (вже у десятковій системі) на спеціальних картках.

Усім добре відомо, що звук можна записати на пластинку або на плівку і потім відтворити. Однак запис звука на пластинку можна зробити лише один раз: для нового запису потрібна вже нова пластинка. Трохи інакше здійснюється запис звука у магнітофоні: за допомогою намагнічування особливої стрічки. Записаний звук можна відтворити потрібне число разів, а якщо запис вже непотрібний, його можна «стерти» і зробити на тій самій стрічці новий запис. На одній і тій же стрічці можна зробити один за другим декілька записів, причому при кожному новому запису попередній «стирається».

На подібному принципі грунтується дія запам'ятовуючих пристроїв. Числа та умовні сигнали записуються (за допомогою електричних, магнітних або механічних сигналів) на спеціальному барабані або на іншому пристрої. У потрібний момент записане число може бути «прочитане», а якщо воно вже не потрібне, то його можна стерти, а на його місце записати інше число. «Запам'ятовування» і «читання» числа або умовного сигналу тривають лише мільйонні частки секунди.

«Пам'ять» може мати кілька тисяч *комірок*, кожна комірка — кілька десятків елементів, наприклад магнітних. Для запису чисел за двійчастою системою числення умовимося вважати, що кожний намагнічений елемент зображує цифру 1, а ненамагнічений — цифру 0. Нехай, наприклад, кожна комірка пам'яті містить 25 елементів (або, як кажуть, 25 «двійчастих розрядів»),

причому перший елемент комірки служить для позначення *знака* числа (+ або —), наступні 14 розрядів служать для запису цілої частини числа, а останні 10 розрядів — для запису дробової частини.

На рис. 11 схематично зображено дві комірки пам'яті; у кожній по 25 розрядів. Намагнічені елементи позначені знаком +, ненамагнічені позначені знаком —. Розглянемо верхню з зображених комірок (кома показує, де починається дробова частина числа, а штрихова лінія відокремлює перший розряд, який служить для запису знака, від решти). У ній записано (у двійчастій системі

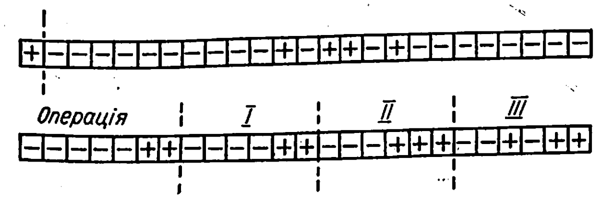


Рис. 11.

числення) число + 1011,01 або — у звичній для нас десятковій системі числення — число 11,25.

Крім чисел, у комірках пам'яті записуються *накази*, з яких складається програма. Розглянемо, який вигляд мають накази для так званої *триадресної* машини. У цьому випадку при запису наказу комірка пам'яті розбивається на 4 частини (штрихові лінії на нижній комірці, рис. 11). Перша частина служить для позначення операції, причому операції записуються числами (номерами).

Наприклад:

додавання — операція 1,
віднімання — операція 2,
множення — операція 3 і т д.

Накази розшифровуються так: перша частина комірки — номер операції, друга і третя частини — номери комірок (*адреси*), з яких треба взяти числа для виконання цієї операції, четверта частина — номер комірки (адреса), куди слід відправити одержаний результат. Наприклад, на рис. 11 (нижній рядок) записано у двійчастій системі числа 11, 11, 111, 1011 або у десятковій системі: 3, 3, 7, 11, що означає такий наказ: виконати операцію 3 (тобто множення) над числами, які знаходяться у **т р е т і й** і **с ь о м і й** комірках пам'яті, а одержаний результат «запам'ятати» (тобто записати) в **о д и н а д ц я т і й** комірці.

Далі ми будемо записувати числа і накази не умовними значками, як на рис. 11, а прямо у десятковій системі числення. Наприклад, наказ, зображений у нижньому рядку рис. 11, запишеться так:

множення 3 7 11.

Розглянемо тепер два простенькі приклади програм.

П р о г р а м а 1

1) додавання 4 5 4
2) множення 4 4 →
3) передача управління (п. у). 1
4) 0
5) 1

Подивимося, як працюватиме машина, у якої у перших п'яти комірках записані ці дані.

1-й н а к а з: додати числа, записані у 4-й і 5-й комірках, і відправити результат знову в 4-у комірку (замість того, що там було записано раніше). Таким чином, машина запише у 4-у комірку число $0 + 1 = 1$. Після виконання 1-го наказу у 4-й і 5-й комірках будуть такі числа:

4) 1,
5) 1.

2-й н а к а з: помножити число, яке є у 4-й комірці, на себе (тобто піднести його у квадрат) і результат, тобто 1^2, виписати на картку (стрілка означає видачу готового результату).

3-й н а к а з: **п е р е д а ч а у п р а в л і н н я** у 1-у комірку. Інакше кажучи, наказ п. у. означає, що треба знову по порядку виконувати всі накази, починаючи з 1-го. Отже, знову 1-й наказ.

1-й н а к а з: додати числа, які є у 4-й і 5-й комірках, і результат знову записати в 4-й комірці. В результаті у 4-й комірці буде число $1 + 1 = 2$:

4) 2,
5) 1.

2-й н а к а з: піднести у квадрат число, яке стоїть у 4-й комірці, і одержаний результат, тобто 2^2, виписати на картку (стрілка — видача результату).

3-й н а к а з: **п е р е д а ч а у п р а в л і н н я** у 1-у комірку (тобто знову перехід до 1-го наказу).

1-й н а к а з: число $2 + 1 = 3$ відправити у 4-у комірку:

4) 3,
5) 1.

2-й н а к а з: виписати на картку число 3^2.

3-й н а к а з: передача управління у 1-у комірку і т. д.

Ми бачимо, що машина обчислює один за другим квадрати цілих чисел і виписує їх на картку. Майте на увазі, що кожного разу набирати нове число вручну не потрібно: машина сама перебирає підряд цілі числа і підносить їх у квадрат. Діючи за цією програмою, машина обчислює квадрати всіх цілих чисел, скажімо, від 1 до 10 000 протягом кількох секунд (або навіть часток секунди).

Слід відзначити, що в дійсності програма для обчислення квадратів цілих чисел повинна бути дещо складніша за ту, яку наведено вище. Це насамперед стосується 2-го наказу. Справа в тому, що виписування готового результату на картку потребує у багато разів більше часу, ніж виконання машиною однієї операції. Тому готові результати спочатку «запам'ятовуються» у вільних комірках «пам'яті», а вже після цього («не поспішаючи») виписуються на картку. Таким чином, перший остаточний результат повинен «запам'ятовуватися» у 1-й вільній комірці «пам'яті», другий результат — у 2-й вільній комірці, третій — у 3-й і т. д. У наведеній вище спрощеній програмі це ніяк не враховувалося.

Крім того, машина не може довго займатися обчисленням квадратів — не вистачить комірок «пам'яті», — а «відгадати», коли машина вже обчислила потрібне нам число квадратів, щоб у цей момент виключити її, — неможливо (адже машина виконує багато тисяч операцій за секунду!). Тому передбачено окремі накази для зупинення машини у потрібний момент. Наприклад, програма може бути складена так, що машина обчислить квадрати всіх цілих чисел від 1 до 10 000 і після цього автоматично виключиться.

Є і інші, складніші види наказів, на яких ми тут для простоти не зупиняємося.

Ось який вигляд у дійсності має програма для обчислення квадратів усіх цілих чисел від 1 до 10 000:

Програма 1а

1) додавання 8 9 8
2) множення 8 8 10
3) додавання 2 6 2
4) умовна передача управління (у. п. у.) 8 7 1
5) стоп
6) 0 0 1
7) 10 000
8) 0
9) 1
10) 0
11) 0
12) 0

. . . .

Перші два накази мало відрізняються від тих, які були в попередній спрощеній програмі. Після виконання цих двох наказів у 8-й, 9-й і 10-й комірках будуть такі числа:

8) 1
9) 1
10) 1^2.

Третій наказ дуже цікавий: треба додати те, що стоїть у 2-й і 6-й комірках, і результати знову записати у 2-й комірці, після чого 2-а комірка матиме вигляд

2) множення 8 8 11.

Як бачите, після виконання третього наказу змінюється другий наказ, вірніше змінюється одна з адрес 2-го наказу. Нижче ми з'ясуємо, для чого це робиться.

Четвертий наказ: умовна передача управління (замість 3-го наказу в розглянутій раніше програмі). Цей наказ виконується так: якщо число, що стоїть у 8-й комірці, менше за число, що стоїть у 7-й комірці, то передається управління у 1-у комірку; у противному разі виконується наступний (тобто 5-й) наказ. У нашому випадку $1 < 10\,000$, отже, відбувається передача управління у 1-у комірку. Таким чином, знову 1-й наказ.

Після виконання 1-го наказу у 8-й комірці буде число 2.

Другий наказ, який тепер має вигляд

2) множення 8 8 11,

полягає в тому, що число 2^2 спрямовується у 11-у комірку. Тепер зрозуміло, для чого було виконано раніше 3-й наказ: нове число, тобто 2^2, повинно потрапити не у 10-у комірку, яка вже зайнята, а в наступну.

Після виконання 1-го і 2-го наказів у нас будуть такі числа:

8) 2
9) 1
10) 1^2
11) 2^2.

Після виконання 3-го наказу 2-а комірка матиме вигляд

2) множення 8 8 12,

тобто машина «підготувалася» до того, щоб записати новий результат у наступну, 12-у комірку. Оскільки у 8-й комірці ще стоїть менше число, ніж у 9-й комірці, то 4-й наказ означає знову передачу управління у 1-у комірку.

Тепер після виконання 1-го і 2-го наказів одержимо:

8) 3
9) 1
10) 1^2
11) 2^2
12) 3^2.

До яких пір машина буде за цією програмою обчислювати квадрати? Доти, поки у 8-й комірці не з'явиться число 10 000, тобто поки не будуть обчислені квадрати чисел від 1 до 10 000. Після цього 4-й наказ вже не передасть управління у 1-у комірку (оскільки у 8-й комірці стоятиме число, яке не менше, а дорівнює числу, що стоїть у 7-й комірці), тобто після 4-го наказу машина виконає 5-й наказ: зупиниться (виключиться).

Розглянемо тепер складніший приклад програми: розв'язання систем рівнянь. При цьому ми розглянемо спрощену програму. При бажанні читач сам подумає про те, якою повинна бути така програма у повному вигляді.

Нехай задано систему рівнянь

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ dx + ey = f. \end{cases}$$

Цю систему неважко розв'язати:

$$x = \frac{ce - bf}{ac - bd}, \quad y = \frac{af - cd}{ae - bd}.$$

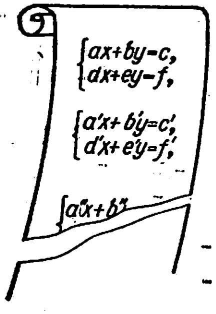


Рис. 12.

Для розв'язання такої системи (в заданими числовими значеннями коефіцієнтів a, b, c, d, e, f) вам буде потрібно, кілька десятків секунд. Машина, мабуть, кілька десятків секунд. Машина ж може розв'язати за секунду **т и с я ч і** таких систем.

Розглянемо відповідну програму. Будемо вважати, що дано зразу декілька систем (рис. 12) з числовими значеннями коефіцієнтів a, b, c, d, e, f, a', b', ...

Ось відповідна програма:

Програма 2

1)	× 28	30	20	14)	+ 3	19	3	26)	a
2)	× 27	31	21	15)	+ 4	19	4	27)	b
3)	× 26	30	22	16)	+ 5	19	5	28)	c
4)	× 27	29	23	17)	+ 6	19	6	29)	d
5)	× 26	31	24	18)	п. у.		1	30)	e
6)	× 28	29	25	19)	6	6	0	31)	f
7)	— 20	21	20	20)	0			32)	a'
8)	— 22	23	21	21)	0			33)	b'
9)	— 24	25	22	22)	0			34)	c'
10)	: 20	21	→	23)	0			35)	d'
11)	: 22	21	→	24)	0			36)	e'
12)	+ 1	19	1	25)	0			37)	f'
13)	+ 2	19	2					38)	a''
									. . .

1-й **н а к а з**: скласти добуток чисел, які стоять у 28-й і 30-й комірках, та направити результат у 20-у комірку. Інакше кажучи, у 20-й комірці буде записано число ce.

Аналогічно виконуються накази 2-й—6-й. Після їх виконання у комірках 20-й—25-й перебуватимуть такі числа:

20) ce
21) bf
22) ae
23) bd
24) af
25) cd.

7-й **н а к а з**: від числа, яке стоїть у 20-й комірці, відняти число, яке стоїть у 21-й комірці, і результат (тобто $ce - bf$) знову записати у 20-у комірку.

Аналогічно виконуються 8-й і 9-й накази. В результаті у комірках 20-й, 21-й, 22-й перебуватимуть такі числа:

20) $ce - bf$
21) $ae - bd$
22) $af - cd$.

10-й і 11-й накази: складаються частки

$$\frac{ce - bf}{ae - bd} \text{ і } \frac{af - cd}{ae - bd}$$

і виписуються на картку (тобто видаються як готові результати). Це і є значення невідомих, одержуваних з першої системи рівнянь.

Отже, першу систему розв'язано. Навіщо ж дальші накази? Дальша частина програми (комірки 12-а—19-а) призначена для того, щоб примусити машину «підготуватися» до розв'язання другої системи рівнянь. Подивимося, як це відбувається. Накази з 10-го по 17-й полягають у тому, що до вмісту комірок 1-ї—6-ї додається запис, який міститься у 19-й комірці, а результати знову залишаються у комірках 1-й—6-й. Таким чином, після виконання 17-го наказу перші шість комірок матимуть такий вигляд:

1)	× 34	36	20
2)	× 33	37	21
3)	× 32	36	22
4)	× 33	35	23
5)	× 32	37	24
6)	× 34	35	25

18-й **н а к а з**: передача управління у 1-у комірку.

Чим же відрізняються нові записи у перших шести комірках від попередніх записів? Тим, що перші дві адреси у цих комірках мають номери не від 26 до 31, як раніше, а від 32 до 37. Інакше кажучи, машина знову виконуватиме ті ж дії, але числа братиме не з комірок 26-ї—31-ї, а з комірок 32-ї—37-ї, де стоять коефіцієнти другої системи рівнянь. У результаті машина розв'яже другу систему рівнянь. Після розв'язання другої системи машина перейде до третьої і т. д.

Із сказаного стає зрозумілим, як важливо вміти скласти правильну «програму». Адже машина «сама» нічого робити не «вміє». Вона може лише виконувати задану їй програму. Є програми для обчислення коренів, логарифмів, синусів, для розв'язання рівнянь найвищих степенів і т. д. Ми вже говорили вище про те, що існують програми для гри у шахи, для перекладу з іноземної мови... Звичайно, чим складніше завдання, тим складніша відповідна програма.

Зауважимо на закінчення, що існують так звані **програмуючі програми**, тобто такі, за допомогою яких сама машина може скласти потрібну для розв'язання задачі програму. Це значно полегшує складання програми, яке часто буває дуже трудомістким.

РОЗДІЛ III

НА ДОПОМОГУ АРИФМЕТИЦІ

Арифметика часто буває неспроможна своїми засобами строго довести правильність деяких з її тверджень. Їй доводиться у таких випадках вдаватися до узагальнюючих прийомів алгебри. До таких арифметичних положень, які обгрунтовуються алгебраїчно, належить, наприклад, багато правил скороченого виконання дій, цікаві особливості деяких чисел, ознаки ділимості та ін. Розглядові питань цього роду і присвячується даний розділ.

Миттьове множення

Обчислювачі-віртуози у багатьох випадках полегшують собі обчислювальну роботу, вдаючись до нескладних алгебраїчних перетворень. Наприклад, обчислення 988^2 відбувається так:

$$988 \cdot 988 = (988 + 12) \cdot (988 - 12) + 12^2 = \\ = 1000 \cdot 976 + 144 = 976\,144.$$

Легко зміркувати, що обчислювач у цьому випадку користується таким алгебраїчним перетворенням:

$$a^2 = a^2 - b^2 + b^2 = (a + b)(a - b) + b^2.$$

На практиці ми можемо з успіхом користуватися цією формулою для усних викладок. Наприклад:

$$27^2 = (27+3)(27-3)+3^2 = 729,$$
$$63^2 = 66 \cdot 60 + 3^2 = 3969,$$
$$18^2 = 20 \cdot 16 + 2^2 = 324,$$
$$37^2 = 40 \cdot 34 + 3^2 = 1369,$$
$$48^2 = 50 \cdot 46 + 2^2 + 2304,$$
$$54^2 = 58 \cdot 50 + 4^2 = 2916.$$

Далі множення $986 \cdot 997$ виконується так:

$$986 \cdot 997 = (986-3) \cdot 1000 + 3 \cdot 14 = 983\,042.$$

На чому грунтується цей прийом? Подамо множники у вигляді

$$(1000-14) \cdot (1000-3)$$

і перемножимо ці двочлени за правилами алгебри:

$$1000 \cdot 1000 - 1000 \cdot 14 - 1000 \cdot 3 + 14 \cdot 3.$$

Зробимо перетворення:

$$1000\,(1000-14) - 1000 \cdot 3 + 14 \cdot 3 = 1000 \cdot 986 - {}$$
$$- 1000 \cdot 3 + 14 \cdot 3 = 1000\,(986-3) + 14 \cdot 3.$$

Останній рядок і показує прийом обчислювача.

Цікавий спосіб перемноження двох тризначних чисел, у яких число десятків однакове, а цифри одиниць у сумі дорівнюють 10. Наприклад, множення

$$783 \cdot 787$$

виконується так:

$$78 \cdot 79 = 6162; \quad 3 \cdot 7 = 21;$$

результат:

$$616\,221.$$

Обгрунтування способу зрозуміле з таких перетворень:

$$(780+3)(780+7) = 780 \cdot 780 + 780 \cdot 3 + 780 \cdot 7 +$$
$$+ 3 \cdot 7 = 780 \cdot 780 + 780 \cdot 10 + 3 \cdot 7 = 780\,(780+10) +$$
$$+ 3 \cdot 7 = 780 \cdot 790 + 21 = 616\,200 + 21.$$

Інший прийом для виконання подібного множення ще простіший:

$$783 \cdot 787 = (785-2)(785+2) = 785^2 - 4 =$$
$$= 616\,225 - 4 = 616\,221.$$

У цьому прикладі нам доводилось підносити до квадрата число 785.

Для швидкого піднесення у квадрат чисел, які закінчуються на 5, дуже зручний такий спосіб:

35^2;	$3 \cdot 4 = 12$.	Відповідь 1225.
65^2;	$6 \cdot 7 = 42$.	Відповідь 4225.
75^2;	$7 \cdot 8 = 56$.	Відповідь 5625.

Правило полягає в тому, що помножують число десятків на число, яке на одиницю більше, і до здобутку приписують 25.

Прийом грунтується на такому принципі. Якщо число десятків a, то все число можна зобразити так:

$$10a + 5.$$

Квадрат цього числа як квадрат двочлена дорівнює

$$100a^2 + 100a + 25 = 100a\,(a+1) + 25.$$

Вираз $a\,(a+1)$ є здобуток числа десятків на найближче вище число. Помножити число на 100 і додати 25 — все одно, що приписати до числа 25.

З того ж прийому випливає простий спосіб підносити до квадрата числа, які складаються з цілого і $\frac{1}{2}$. Наприклад:

$$\left(3\frac{1}{2}\right)^2 = 3{,}5^2 = 12{,}25 = 12\frac{1}{4},$$
$$\left(7\frac{1}{2}\right)^2 = 56\frac{1}{4}, \quad \left(8\frac{1}{2}\right)^2 = 72\frac{1}{4} \text{ і т. п.}$$

Цифри 1, 5 і 6

Мабуть ви помітили, що від перемножування ряду чисел, які закінчуються одиницею або п'ятіркою, виходить число, яке закінчується тією ж цифрою. Менш відомо, що сказане стосується і числа 6. Тому, між іншим, будь-який степінь числа, що закінчується шісткою, також закінчується шісткою. Наприклад, $46^2 = 2116$; $46^3 = 97\,336$.

Цю цікаву властивість цифр 1, 5 і 6 можна обгрунтувати алгебраїчним способом. Розглянемо її для 6.

Числа, які закінчуються шісткою, зображуються так:

$$10a + 6, \quad 10b + 6 \text{ і т. д.},$$

де a і b — цілі числа.

Добуток двох таких чисел дорівнює

$$100ab + 60b + 60a + 36 = 10(10ab + 6b + 6a) + \\ + 30 + 6 = 10(10ab + 6b + 6a + 3) + 6.$$

Як бачимо, добуток складається з деякого числа десятків і з цифри 6, яка, зрозуміло, повинна стояти на кінці.

Той же прийом доведення можна застосувати і до 1 і до 5.

Сказане дає нам право твердити, що, наприклад,

386^{2567} закінчується на 6,
815^{723} » » 5,
491^{1732} » » 1, і т. д.

Числа 25 і 76

Є і двозначні числа, які мають таку ж властивість, як і числа 1, 5 та 6. Це число 25 і — що, мабуть, для багатьох буде несподіванкою, — число 76. Будь-які два числа, що закінчуються на 76, дають у добутку число, яке закінчується на 76.

Доведемо це. Загальний вираз для подібних чисел такий:

$$100a + 76, \quad 100b + 76 \text{ і т. д.}$$

Перемножимо два числа цього виду; одержимо:

$$10\,000ab + 7600b + 7600a + 5776 = 10\,000ab + 7600b + \\ + 7600a + 5700 + 76 = 100(100ab + 76b + \\ + 76a + 57) + 76.$$

Положення доведено: добуток закінчується числом 76. Звідси випливає, що будь-який с т е п і н ь числа, що закінчується на 76, є подібне ж число:

$$376^2 = 141\,376, \quad 576^3 = 191\,102\,976 \text{ і т. д.}$$

Безконечні «числа»

Існують і більш довгі групи цифр, які, перебуваючи на кінці чисел, зберігаються і в їхньому здобутку. Число таких груп цифр, як ми покажемо, безконечно велике.

Ми знаємо двозначні групи цифр, які мають цю властивість: це 25 і 76. Для того щоб знайти тризначні групи, треба п р и п и с а т и до числа 25 або 76 спереду таку цифру, щоб одержана тризначна група цифр також мала потрібну властивість.

Яку ж цифру слід приписати до числа 76? Позначимо її через k. Тоді шукане тризначне число матиме вигляд

$$100k + 76.$$

Загальний вираз для чисел, які закінчуються цією групою цифр, такий:

$$1000a + 100k + 76, \quad 1000b + 100k + 76 \text{ і т. д.}$$

Перемножимо два числа цього виду; одержимо:

$$1\,000\,000ab + 100\,000ak + 100\,000bk + 76\,000a + \\ + 76\,000b + 10\,000k^2 + 15\,200k + 5776.$$

Всі доданки, крім двох останніх, мають на кінці не менше трьох нулів. Тому добуток закінчується на $100k + 76$, якщо різниця

$$15\,200k + 5776 - (100k + 76) = 15\,100k + 5700 = \\ = 15\,000k + 5000 + 100(k + 7)$$

ділиться на 1000. Це, очевидно, буде тільки при $k = 3$.

Отже, шукана група цифр має вигляд 376. Тому і будь-який степінь числа 376 закінчується на 376. Наприклад:

$$376^2 = 141\,376.$$

Якщо ми тепер захочемо знайти чотиризначну групу цифр, яка має таку ж властивість, то повинні будемо приписати до 376 ще одну цифру спереду. Якщо цю цифру позначимо через l, то прийдемо до задачі: при якому l добуток

$$(10\,000a + 1000l + 376)(10\,000b + 1000l + 376)$$

закінчується на $1000l + 376$? Якщо в цьому здобутку розкрити дужки і відкинути всі доданки, які закінчуються на чотири нулі і більше, то залишаться члени

$$752\,000l + 141\,376.$$

Добуток закінчується на $1000l + 376$, якщо різниця

$$752\,000l + 141\,376 - (1000l + 376) = 751\,000l + \\ + 141\,000 = (750\,000l + 140\,000) + 1000\,(l + 1)$$

ділиться на 10 000. Це, очевидно, буде тільки при $l = 9$.

Шукана чотиризначна група цифр 9376.

Одержану чотиризначну групу цифр можна доповнити ще однією цифрою, для чого треба міркувати точно так само, як і вище. Ми одержимо 09 376. Зробивши ще один крок, знайдемо групу цифр 109 376, потім 7 109 376 і т. д.

Таке приписування цифр зліва можна робити необмежене число раз. У результаті ми одержимо «число», у якого безконечно багато цифр:

$$\ldots 7\,109\,376.$$

Подібні «числа» можна додавати та множити за звичайними правилами: адже вони записуються справа наліво, а додавання і множення («стовпчиком») також виконуються справа наліво, таким чином у сумі і здобутку двох таких чисел можна обчислювати одну цифру за другою — скільки завгодно цифр.

Цікаво, що написане вище безконечне «число» задовольняє, хоч це і здається неймовірним, рівняння

$$x^2 = x.$$

Справді, квадрат цього «числа» (тобто здобуток його на себе) закінчується на 76, оскільки кожний із співмножників має на кінці 76; з тієї ж причини квадрат написаного «числа» закінчується на 376; закінчується на 9376 і т. д. Інакше кажучи, обчислюючи одну за другою цифри «числа» x^2, де $x = \ldots 7\,109\,376$, ми одержуватимемо ті ж цифри, які є у числі x, отже, $x^2 = x$.

Ми розглянули групи цифр, які закінчуються на 76*. Якщо аналогічні міркування застосувати для групи цифр, що закінчуються на 5, то одержимо такі групи цифр:

$$5,\ 25,\ 625,\ 0625,\ 90\,625,\ 890\,625,\ 2\,890\,625 \text{ і т. д.}$$

* Зауважимо, що двозначну групу цифр 76 можна знайти за допомогою міркувань, аналогічних наведеним вище: досить розв'язати питання про те, яку цифру треба спереду приписати до цифри 6, щоб одержана двозначна група цифр мала розглядувану властивість. Тому «число» ... 7 109 376 можна одержати, приписуючи спереду одну за другою цифри до шістки.

В результаті ми зможемо написати ще одне безконечне «число»

$$\ldots 2\,890\,625,$$

яке також задовольняє рівняння $x^2 = x$. Можна було б показати, що це безконечне «число» «дорівнює»

$$\left(\left((5^2)^2\right)^2\right)^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}.$$

Одержаний цікавий результат мовою безконечних «чисел» формулюється так: рівняння $x^2 = x$ має (крім звичайних $x = 0$ і $x = 1$) два безконечні розв'язки:

$$x = \ldots 7\,109\,376 \text{ і } x = \ldots 2\,890\,625,$$

а інших розв'язків (у десятковій системі числення) не має*.

Доплата

Старовинна народна задача

Одного разу за старих часів трапився такий випадок. Двоє прасолів продали гурт волів, який їм належав, і одержали при цьому за кожного вола стільки карбованців, скільки у гурті було волів. На вторговані гроші вони купили стадо овець по 10 карбованців за вівцю та одне ягня. При дільбі порівну одному дісталася зайва вівця, другий же взяв ягня й одержав від компаньйона відповідну доплату. Якою завбільшки була доплата (припускається, що доплата виражається цілим числом карбованців)?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Задача не піддається прямому перекладу «на алгебраїчну мову», для неї не можна скласти рівняння. Доводиться розв'язувати її особливим способом, так би мовити, по вільному математичному міркуванню. Однак і тут алгебра подає арифметиці істотну допомогу.

* Безконечні «числа» можна розглядати не тільки в десятковій, а й у інших системах числення. Такі числа, які розглядаються у системі числення з основою p, називаються p-адичними. Дещо про ці числа можна прочитати у книжці Є. Б. Динкіна і В. А. Успенського «Математические беседы», Гостехиздат, 1952.

Вартість усього стада в карбованцях є точний квадрат, оскільки стадо придбано на гроші від продажу n волів по n карбованців за вола. Одному з компаньйонів дісталася зайва вівця, отже, число овець непарне; непарним, виходить, є і число десятків у числі n^2. Яка ж цифра одиниць?

Можна довести, що коли в точному квадраті число десятків непарне, то цифра одиниць у ньому може бути тільки 6.

Справді, квадрат будь-якого числа з a десятків і b одиниць, тобто $(10a+b)^2$, дорівнює

$$100a^2+20ab+b^2=(10a^2+2ab)\cdot 10+b^2.$$

Десятків у цьому числі $10a^2+2ab$, та й ще деяке число десятків, яке міститься у b^2. Однак $10a^2+2ab$ ділиться на 2 — це число парне. Тому число десятків, яке міститься у $(10a+b)^2$, буде непарним лише тоді, коли у числі b^2 виявиться непарне число десятків. Пригадаймо, що таке b^2. Це — квадрат цифри одиниць, тобто одне з таких 10 чисел:

$$0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81.$$

Серед них непарне число десятків мають тільки 16 і 36, причому обидва закінчуються на 6. Отже, точний квадрат

$$100a^2+20ab+b^2$$

може мати непарне число десятків тільки в тому випадку, якщо закінчується на 6.

Тепер легко знайти відповідь на запитання задачі. Зрозуміло, що ягня коштувало 6 карбованців. Компаньйон, якому воно дісталося, одержав на 4 карбованці менше від другого. Щоб зрівняти частки, власник ягняти має одержати від свого компаньйона 2 карбованці.

Доплата дорівнює 2 карбованці.

Ділимість на 11

Алгебра дуже полегшує відшукування ознак, за якими можна заздалегідь, не виконуючи ділення, встановити, чи ділиться дане число на той або інший дільник. Ознаки ділимості на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 загальновідомі. Виведемо ознаку ділимості на 11; вона досить проста і практична.

Нехай многозначне число N має a одиниць, b десятків, c сотень, d тисяч і т. д., тобто

$$N=a+10b+100c+1000d+\cdots=a+10\times\\ \times(b+10c+100d+\cdots),$$

де три крапки означають суму дальших розрядів. Віднімемо від N число $11(b+10c+100d+\cdots)$, кратне одинадцяти. Тоді одержана різниця, яка дорівнює

$$a-b-10(c+10d+\cdots),$$

матиме ту ж остачу від ділення на 11, що й число N. Додавши до цієї різниці число $11(c+10d+\cdots)$, кратне одинадцяти, одержимо число

$$a-b+c+10(d+\cdots).$$

яке також має ту ж остачу від ділення на 11, що й число N. Віднімемо від нього число $11(d+\cdots)$, кратне одинадцяти, і т. д. У результаті ми одержимо число

$$a-b+c-d+\cdots=(a+c+\cdots)-(b+d+\cdots),$$

яке має ту ж остачу від ділення на 11, що й початкове число N.

Звідси випливає така ознака ділимості на 11: треба від суми всіх цифр, які стоять на непарних місцях, відняти суму всіх цифр, які займають парні місця; якщо у різниці вийде 0 або число (додатне чи від'ємне), кратне 11, то й досліджуване число кратне 11; у противному разі наше число не ділиться без остачі на 11.

Дослідимо, наприклад, число 87 635 064:

$$8+6+5+6=25,$$
$$7+3+0+4=14,$$
$$25-14=11.$$

Отже, дане число ділиться на 11.

Існує й інша ознака ділимості на 11, зручна для не дуже довгих чисел. Вона полягає в тому, що досліджуване число розбивають на грані справа наліво по дві цифри у кожній і додають ці грані. Якщо одержана сума ділиться без остачі на 11, то й досліджуване число кратне 11, а у противному разі — ні. Наприклад, треба дослідити число 528. Розбиваємо число на грані (5/28) і додаємо обидві грані:

$$5 + 28 = 33.$$

Оскільки 33 ділиться без остачі на 11, то й число 528 кратне 11:

$$528 : 11 = 48.$$

Доведемо цю ознаку дільмості. Розіб'ємо многозначне число N на грані. Тоді ми одержимо двозначні (або однозначні*) числа, які позначимо (справа наліво) через a, b, c і т. д., і число N можна буде записати у вигляді

$$N = a + 100b + 10\,000c + \cdots = a + 100\,(b + 100c + \cdots).$$

Віднімемо від N число $99(b + 100c + \ldots)$, кратне одинадцяти. Одержане число

$$a + (b + 100c + \ldots) = a + b + 100\,(c + \ldots)$$

матиме ту ж остачу від ділення на 11, що й число N. Від цього числа віднімемо число $99\,(c + \ldots)$, кратне одинадцяти, і т. д. У результаті ми знайдемо, що число N має ту ж остачу від ділення на 11, що й число

$$a + b + c + \ldots$$

Номер автомашини

ЗАДАЧА

Прогулюючись по місту, троє студентів-математиків помітили, що водій автомашини грубо порушив правила вуличного руху. Номер машини (чотиризначний) жоден з студентів не запам'ятав, але, оскільки вони були математиками, кожний з них помітив деяку особливість цього чотиризначного числа. Один з студентів згадав, що дві перші цифри числа були однакові. Другий пригадав, що останні дві цифри також були однакові. Нарешті, третій запевняв, що все це чотиризначне число є точним квадратом. Чи можна за цими даними узнати номер машини?

* Якщо число N мало непарне число цифр, то остання грань (крайня ліва) буде однозначною. Крім того, грань виду 03 також слід розглядати як однозначне число 3.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Позначимо першу (і другу) цифру шуканого числа через a, а третю (і четверту) — через b. Тоді все число дорівнюватиме:

$$1000a + 100a + 10b + b = 1100a + 11b = 11\,(100a + b).$$

Це число ділиться на 11, а тому (будучи точним квадратом) воно ділиться і на 11^2. Застосовуючи будь-яку з двох вищенаведених ознак дільмості на 11, знайдемо, що на 11 ділиться число $a + b$. Однак це означає, що

$$a + b = 11,$$

оскільки кожна з цифр a, b менша від десяти.

Остання цифра b числа, яке є точним квадратом, може мати лише такі значення:

0, 1, 4, 5, 6, 9.

Тому для цифри a, яка дорівнює $11 - b$, знаходимо такі можливі значення:

11, 10, 7, 6, 5, 2.

Перші два значення непридатні, і залишаються такі можливості:

$b = 4, \quad a = 7;$
$b = 5, \quad a = 6;$
$b = 6, \quad a = 5;$
$b = 9, \quad a = 2.$

Ми бачимо, що номер автомашини треба шукати серед таких чотирьох чисел:

7744, 6655, 5566, 2299.

Однак останні три з цих чисел не є точними квадратами: число 6655 ділиться на 5, але не ділиться на 25; число 5566 ділиться на 2, але не ділиться на 4; число $2299 = 121 \cdot 19$ також не є квадратом. Залишається тільки одне число $7744 = 88^2$; воно і дає розв'язання задачі.

Дільмість на 19

Обґрунтувати таку ознаку дільмості на 19. Число ділиться без остачі на 19 тоді і тільки тоді, коли число його десятків додати до подвоєного числа його одиниць, і воно буде кратне 19.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Будь-яке число N можна подати у вигляді

$$N = 10x + y,$$

де x — число десятків (не цифра у розряді десятків, а загальне число цілих десятків у всьому числі), y — цифра одиниць. Нам треба показати, що N кратне 19 тоді і тільки тоді, коли

$$N' = x + 2y$$

кратне 19. Для цього помножимо N' на 10 і від цього добутку віднімемо N; одержимо:

$$10N' - N = 10(x + 2y) - (10x + y) = 19y.$$

Звідси видно, що коли N' кратне 19, то й

$$N = 10N' - 19y$$

ділиться без остачі на 19; і навпаки, якщо N ділиться без остачі на 19, то

$$10N' = N + 19y$$

кратне 19, а тоді, очевидно, і N' ділиться без остачі на 19.

Нехай, наприклад, треба визначити, чи ділиться на 19 число 47 045 881.

Застосовуємо послідовно нашу ознаку ділимості:

$$\begin{array}{r}
4704588|1 \\
+2 \\
\hline
47045|90 \\
+18 \\
\hline
4706|3 \\
+6 \\
\hline
471|2 \\
+4 \\
\hline
47|5 \\
+10 \\
\hline
5|7 \\
+14 \\
\hline
19.
\end{array}$$

Оскільки 19 ділиться на 19 без остачі, то кратні 19 і числа 57, 475, 4712, 47 063, 470 459, 4 704 590, 47 045 881.

Отже, наше число ділиться на 19.

Теорема Софії Жермен

Ось задача, запропонована відомим французьким математиком Софією Жермен.

Довести, що кожне число виду $a^4 + 4$ є складеним (якщо a не дорівнює 1).

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Доведення випливає з таких перетворень:

$$a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - 4a^2 =$$
$$= (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 = (a^2 + 2 - 2a)(a^2 + 2 + 2a).$$

Число $a^4 + 4$ може бути, як ми переконуємось, подано у вигляді двох множників, які не дорівнюють йому самому і одиниці*, інакше кажучи, воно складене.

Складені числа

Число так званих простих чисел, тобто цілих чисел, які більші за одиницю і не діляться без остачі ні на будь-які інші цілі числа, крім одиниці і самих себе, безконечно велике.

Починаючи від 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ..., ряд їх простягається без кінця. Вклинюючись між цифрами складеними, вони розбивають натуральний ряд чисел на більш або менш довгі ділянки складених чисел. Якої довжини бувають ці ділянки? Чи йде, наприклад, де-небудь підряд тисяча складених чисел, не перериваючись жодним простим числом?

Можна довести (хоч це може здатися неправдоподібним), що ділянки складених чисел між простими бувають будь-якої довжини. Немає межі для довжини таких ділянок: вони можуть складатися з тисячі, мільйона, трильйона і т. д. складених чисел.

Для зручності будемо користуватися умовним символом $n!$, який означає здобуток усіх чисел від 1 до n

* Останнє — тому, що

$$a^2 + 2 - 2a = (a^2 - 2a + 1) + 1 = (a - 1)^2 + 1 \neq 1,$$

якщо $a \neq 1$.

включно. Наприклад, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$. Ми зараз доведемо, що ряд

$$[(n+1)!+2],\ [(n+1)!+3],\ [(n+1)!+4], \ldots$$
$$\text{до } [(n+1)!+n+1] \text{ включно}$$

складається з n послідовних складених чисел.

Ці числа йдуть безпосередньо одне за одним у натуральному ряді, оскільки кожне наступне на 1 більше за попереднє. Залишається довести, що всі вони — складені.

Перше число

$$(n+1)!+2 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \ldots \times$$
$$\times (n+1) + 2$$

— парне, оскільки обидва його доданки містять множник 2. А будь-яке парне число, більше за 2, — складене.

Друге число

$$(n+1)!+3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (n+1) + 3$$

складається з двох доданків, кожний з яких кратний 3. Виходить, що і це число складене.

Третє число

$$(n+1)!+4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (n+1) + 4$$

ділиться без остачі на 4, оскільки складається з доданків, кратних 4.

Так само встановлюємо, що наступне число

$$(n+1)!+5$$

кратне 5, і т. д. Інакше кажучи, кожне число нашого ряду має множник, який відрізняється від одиниці і від нього самого; таким чином, воно є складеним.

Якщо ви бажаєте написати, наприклад, п'ять послідовних складених чисел, вам досить у наведений вище ряд підставити замість n число 5. Ви одержите ряд

$$722,\ 723,\ 724,\ 725,\ 726.$$

Однак це — не єдиний ряд з п'яти послідовних складених чисел. Є і інші, наприклад,

$$62,\ 63,\ 64,\ 65,\ 66.$$

Або ще менші числа:

$$24,\ 25,\ 26,\ 27,\ 28.$$

Спробуємо тепер розв'язати таку задачу.

Написати **д е с я т ь** послідовних складених чисел.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

На підставі сказаного раніше встановлюємо, що як перше з шуканих десяти чисел можна взяти

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 10 \cdot 11 + 2 = 39\,816\,802.$$

Шуканою серією чисел, таким чином, може бути така:

$$39\,816\,802,\ 39\,816\,803,\ 39\,816\,804 \text{ і т. д.}$$

Однак існують серії з десяти значно менших послідовних складених чисел. Так можна вказати на серію навіть не з десяти, а з тринадцяти складених послідовних чисел уже у другій сотні:

$$114,\ 115,\ 116,\ 117 \text{ і т. д. до } 126 \text{ включно.}$$

Число простих чисел

Існування скільки завгодно довгих серій послідовних **с к л а д е н и х** чисел може викликати сумнів у тому, чи дійсно ряд **п р о с т и х** чисел не має кінця. Не зайвим буде тут навести доведення безконечності ряду простих чисел.

Це доведення належить старогрецькому математикові Евклідові і входить до його знаменитих «Начал». Воно належить до розряду доведень «від протилежного». Припустимо, що ряд простих чисел конечний, і позначимо останнє просте число в цьому ряді літерою N. Складемо здобуток

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot N = N!$$

і додамо до нього 1. Одержимо:

$$N! + 1.$$

Це число, будучи цілим, повинно містити хоч би один простий множник, тобто повинно ділитись хоч би на одне просте число. Однак усі прості числа, за припущенням, не перевищують N, число ж $N! + 1$ не ділиться без остачі на жодне з чисел, які менші або дорівнюють N,— кожного разу виходить остача 1.

Таким чином, не можна було припускати, що ряд простих чисел конечний: це припущення призводить до суперечності. Отже, яку б довгу серію послідовних складених чисел ми не зустріли у ряді натуральних чисел, ми можемо бути переконані, в тому, що за нею знайдеться безконечна безліч простих чисел.

Найбільше відоме просте число

Одне діло бути упевненим у тому, що і с н у ю т ь які завгодно великі прості числа, а інша справа — з н а т и, які числа є простими. Чим більше натуральне число, тим більше обчислень треба зробити, щоб узнати, чи просте воно чи ні. Ось найбільше число, про яке тепер відомо, що воно просте:

$$2^{2281} - 1.$$

Це число має близько семисот десяткових знаків. Обчислення, за допомогою яких було встановлено, що це число є простим, проводилися на сучасних обчислювальних машинах (див. розділи I і II).

Відповідальний розрахунок

В обчислювальній практиці трапляються такі чисто арифметичні викладки, виконання яких без залучення полегшуючих методів алгебри надзвичайно утруднюється. Нехай треба, наприклад, знайти результат таких дій:

$$\frac{2}{1 + \frac{1}{90\,000\,000\,000}}.$$

Це обчислення потрібне для того, щоб встановити, чи може техніка, яка має справу з швидкостями руху тіл, малими у порівнянні з швидкостями поширення електромагнітних хвиль, користуватися колишнім законом додавання швидкостей, не рахуючись з тими змінами, які внесено у механіку теорією відносності. Згідно з старою механікою тіло, яке бере участь у двох однаково направлених рухах з швидкостями v_1 і v_2 кілометрів за секунду, має швидкість $(v_1 + v_2)$ кілометрів за секунду. Нове ж учення дає для швидкості тіла вираз

$$\frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \text{ кілометрів за секунду,}$$

де c — швидкість поширення світла у пустоті, яка дорівнює приблизно 300 000 кілометрів за секунду. Зокрема, швидкість тіла, яке бере участь у двох однаково напрямлених рухах, кожний із швидкістю 1 кілометр за секунду, за старою механікою дорівнює 2 кілометри за секунду, а за новою саме

$$\frac{2}{1 + \frac{1}{90\,000\,000\,000}} \text{ кілометрів за секунду.}$$

Наскільки ж відрізняються ці результати? Чи можуть вловити різницю найтонші вимірювальні прилади? Для з'ясування цього важливого питання і доводиться виконувати вказане вище обчислення.

Зробимо це обчислення так: спочатку звичайним арифметичним способом, а потім покажемо, як одержати результат алгебраїчним способом. Досить одного погляду на наведені далі ряди цифр, щоб переконатися у безперечній перевазі алгебраїчного способу.

Насамперед перетворимо наш «багатоповерховий» дріб:

$$\frac{2}{1 + \frac{1}{90\,000\,000\,000}} = \frac{180\,000\,000\,000}{90\,000\,000\,001}.$$

Тепер виконаємо ділення чисельника на знаменник:

$$\begin{array}{l|l} 180\ 000\ 000\ 000 & 90\ 000\ 000\ 001 \\ \underline{\ \ 90\ 000\ 000\ 001} & \overline{1{,}999\ 999\ 999\ 977\ldots} \end{array}$$

899 999 999 990
810 000 000 009
899 999 999 810
810 000 000 009
899 999 998 010
810 000 000 009
899 999 980 010
810 000 000 009
899 999 800 010
810 000 000 009
899 998 000 010
810 000 000 009
899 980 000 010
810 000 000 009
899 800 000 010
810 000 000 009
898 000 000 010
810 000 000 009
880 000 000 010
810 000 000 009
700 000 000 010
630 000 000 007
70 000 000 003

Обчислення, як бачите, стомливе, кропітке, у ньому легко заплутатися і помилитися. А проте, для розв'язання задачі важливо точно знати, на якому саме місці переривається ряд дев'яток і починається серія інших цифр.

Порівняйте тепер, як коротко вправляється з тим самим обчисленням алгебра. Вона користується такою наближеною рівністю: якщо a — дуже малий дріб, то

$$\frac{1}{1+a} \approx 1-a,$$

де знак $\approx$ означає «наближено дорівнює».

Переконатися, що це так, дуже просто: порівняємо ділиме 1 із здобутком дільника на частку:

$$1=(1+a)(1-a),$$

тобто

$$1=1-a^2.$$

Оскільки a — дуже малий дріб (наприклад, 0,001), то a^2 ще менший дріб (0,000001), і ним можна знехтувати.

Застосуємо сказане до нашого розрахунку*:

$$\frac{2}{1+\frac{1}{90\,000\,000\,000}}=\frac{2}{1+\frac{1}{9\cdot 10^{10}}}\approx$$

$$\approx 2(1-0{,}111\ldots\cdot 10^{-10})=2-0{,}0000000000222\ldots=$$
$$=1{,}9999999999777\ldots$$

Ми прийшли до того ж результату, що й раніше, але значно коротшим шляхом.

Читачеві, мабуть, цікаво знати, яке значення одер-
жаного результату у поставленій задачі з галузі меха-
ніки. Цей результат показує, що через малість розгля-
нутих швидкостей у порівнянні із швидкістю світла
відхилення від старого закону додавання швидкостей
практично не виявляється: навіть при таких величезних
швидкостях, як 1 кілометр за секунду, він позначається
ся на одинадцятій цифрі визначуваного числа, а у звичайній
чайній техніці обмежуються 4 — 6 цифрами. Тому ми
маємо право твердити, що нова, ейнштейнова, механіка
практично нічого не змінює у технічних розрахунках,
які торкаються тіл, що рухаються «повільно» (у порів-
нянні з поширенням світла). Є, однак, одна галузь су-
часного життя, де цей висновок треба приймати з обереж-
ністю. Мова йде про космонавтику. Адже вже сьогодні
ми досягли швидкостей порядку 10 кілометрів за секунду
(при русі супутників та ракет). У цьому розходження
між класичною і ейнштейновою механікою позначається
вже на дев'ятому знаку. А не за горами ще більші швид-
кості...

Коли без алгебри простіше

Поряд з випадками, коли алгебра подає арифметиці істотні послуги, бувають і такі, коли втручання алгебри приводить лише до непотрібних ускладнень. Справж-

* Ми користуємося далі наближеною рівністю

$$\frac{A}{1+a}\approx A(1-a).$$

не знання математики полягає в умінні так розпоряджатися математичними засобами, щоб вибирати завжди найпростіший та найбільш надійний шлях, не рахуючись з тим, до якої галузі належить метод розв'язання задачі, до арифметики, аглебри, геометрії і т. п. Корисно буде розглянути тут випадок, коли залучення алгебри може лише заплутати того, хто розв'язує задачу. Повчальним прикладом може бути така задача.

Знайти найменше з усіх тих чисел, які при діленні

на	2	дають	в	остачі	1,
»	3	»	»	»	2,
»	4	»	»	»	3,
»	5	»	»	»	4,
»	6	»	»	»	5,
»	7	»	»	»	6,
»	8	»	»	»	7,
»	9	»	»	»	8.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Цю задачу запропонували мені із словами: «Як ви розв'язали б таку задачу? Тут надто багато рівнянь; не виплутатися з них».

А справа тут простісінька: ніяких рівнянь, ніякої алгебри для розв'язання задачі не потрібно — вона розв'язується нескладними арифметичними міркуваннями.

Додамо до шуканого числа одиницю. Яку остачу дасть воно тоді при діленні на 2? Остача $1 + 1 = 2$; іншими словами, число поділиться на 2 без остачі.

Точно так само поділиться воно без остачі і на 3, на 4, на 5, на 6, на 7, на 8 і на 9. Найменше з таких чисел є $9 \cdot 8 \times \times 7 \cdot 5 = 2520$, а шукане число дорівнює 2519, що неважко перевірити випробуванням.

РОЗДІЛ IV

ДІОФАНТОВІ РІВНЯННЯ

Купівля светра

ЗАДАЧА

Ви повинні заплатити за куплений у магазині светр 19 карбованців. У вас одні лише троячки, у касира — тільки п'ятірки. Чи можете ви при наявності таких грошей розплатитися з касиром і як саме?

Запитання задачі зводиться до того, щоб узнати, скільки повинні ви дати касирові троячок, щоб, одержавши здачу п'ятірками, заплатити 19 карбованців. Невідомих у задачі два: x — число троячок і y — число п'ятірок. Однак можна скласти лише одне рівняння:

$$3x - 5y = 19.$$

Хоч одне рівняння з двома невідомими має безліч розв'язань, однак зовсім ще не очевидно, що серед них знайдеться хоч одне з цілими додатними x і y (пригадаємо, що це — числа кредитних білетів). Ось чому алгебра розробила метод розв'язання подібних «невизначених» рівнянь. Заслуга введення їх у алгебру належить першому європейському представникові цієї науки, знаменитому математикові давнини Діофанту, через що такі рівняння часто називають «діофантовими».

РОЗВ'ЯЗАННЯ

З наведеного прикладу покажемо, як слід розв'язувати подібні рівняння.

Треба знайти значення x та y у рівнянні

$$3x - 5y = 19,$$

знаючи при цьому, що x і y — числа **ц і л і** і **д о д а т н і**.

Відокремимо те невідоме, коефіцієнт якого менший, тобто член $3x$; одержимо:

$$3x = 19 + 5y,$$

звідки

$$x = \frac{19 + 5y}{3} = 6 + y + \frac{1 + 2y}{3}.$$

Оскільки x, 6 і y — числа цілі, то рівність може бути вірною лише при умові, що $\frac{1 + 2y}{3}$ є також ціле число. Позначимо його літерою t. Тоді

$$x = 6 + y + t,$$

де

$$t = \frac{1 + 2y}{3},$$

і, отже,

$$3t = 1 + 2y, \quad 2y = 3t - 1.$$

З останнього рівняння знаходимо y:

$$y = \frac{3t - 1}{2} = t + \frac{t - 1}{2}.$$

Оскільки y і t — числа цілі, то й $\frac{t - 1}{2}$ повинно бути деяким цілим числом t_1. Отже,

$$y = t + t_1,$$

причому

$$t_1 = \frac{t - 1}{2},$$

звідки

$$2t_1 = t - 1 \text{ і } t = 2t_1 + 1.$$

Значення $t = 2t_1 + 1$ підставляємо у попередні рівності:

$$y = t + t_1 = (2t_1 + 1) + t_1 = 3t_1 + 1,$$
$$x = 6 + y + t = 6 + (3t_1 + 1) + (2t_1 + 1) = 8 + 5t_1.$$

Отже, для x і y ми знайшли вирази *

$$x = 8 + 5t_1,$$
$$y = 1 + 3t_1.$$

Числа x і y, ми знаємо, — не тільки цілі, а й додатні, тобто більші, ніж нуль. Таким чином,

$$8 + 5t_1 > 0,$$
$$1 + 3t_1 > 0.$$

З цих нерівностей знаходимо:

$$5t_1 > -8 \text{ і } t_1 > -\frac{8}{5},$$

$$3t_1 > -1 \text{ і } t_1 > -\frac{1}{3}.$$

Цим величина t_1 обмежується; вона більша ніж $-\frac{1}{3}$ (і, отже, тим паче більша ніж $-\frac{8}{5}$). Однак оскільки t_1 — число ціле, то робимо висновок, що для нього можливі лише такі значення:

$$t_1 = 0,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

Відповідні значення для x і y такі:

$$x = 8 + 5t_1 = 8,\ 13,\ 18,\ 23,\ \ldots,$$
$$y = 1 + 3t_1 = 1,\ 4,\ 7,\ 10,\ \ldots.$$

Тепер ми встановили, як можна розплатитися за светр. Ви сплачуєте 8 троячок, одержуючи одну п'ятірку здачі:

$$8 \cdot 3 - 5 = 19$$

або даєте 13 троячок, одержуючи здачі 4 п'ятірки:

$$13 \cdot 3 - 4 \cdot 5 = 19$$

і т. д.

---

* Строго кажучи, ми довели тільки те, що будь-який цілочисленний розв'язок рівняння $3x - 5y = 19$ має вигляд $x = 8 + 5t_1$, $y = 1 + 3t_1$, де t_1 — деяке ціле число. Протилежне (тобто таке, що при **б у д ь-я к о м у** цілому t_1 ми одержуємо цілочисленний розв'язок даного рівняння) доведено не було. Однак у цьому легко переконатися, проводячи міркування у зворотному порядку, або підставляючи знайдені значення x і y в початкове рівняння.

Теоретично задача має незліченний ряд розв'язків, практично ж число розв'язків обмежене, оскільки ні у касира, ні у покупця немає незліченної кількості кредитних білетів. Якщо, наприклад, у кожного всього по 10 білетів, то розплатитися можна тільки одним способом: видавши 8 троячок і одержавши 5 карбованців здачі. Як бачимо, невизначені рівняння практично можуть давати цілком визначені пари розв'язків.

Повертаючись до нашої задачі, пропонуємо читачеві для вправи самостійно розв'язати її варіант, а саме розглянути випадок, коли у покупця є тільки п'ятірки, а у касира — тільки троячки. У результаті матимемо такий ряд розв'язків:

$$x = 5,\ 8,\ 11,\ \dots,$$
$$y = 2,\ 7,\ 12,\ \dots\ .$$

Справді,

$$5 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 19,$$
$$8 \cdot 5 - 7 \cdot 3 = 19,$$
$$11 \cdot 5 - 12 \cdot 3 = 19,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Ми могли б одержати ці результати також і з готового вже розв'язку основної задачі, скориставшись простим алгебраїчним способом. Оскільки д а в а т и п'ятірки й о д е р ж у в а т и троячки все одно, що «о д е р ж у в а т и від'ємні п'ятірки» і «д а в а т и від'ємні троячки», то новий варіант задачі розв'язується тим же рівнянням, яке ми склали для основної задачі:

$$3x - 5y = 19,$$

але за умови, що x і y — числа від'ємні. Тому з рівностей

$$x = 8 + 5t_1, \qquad y = 1 + 3t_1,$$

ми, знаючи, що $x < 0$ і $y < 0$, виводимо:

$$8 + 5t_1 < 0, \qquad 1 + 3t_1 < 0$$

і, таким чином,

$$t_1 < -\frac{8}{5}.$$

Приймаючи $t_1 = -2, -3, -4$ і т. д., одержуємо з попередніх формул такі значення для x і y:

$$t_1 = -2,\ -3,\ -4,$$
$$x = -2,\ -7,\ -12,$$
$$y = -5,\ -8,\ -11.$$

Перша пара розв'язків ($x = -2$, $y = -5$) означає, що покупець «платить мінус 2 троячки» і одержує мінус 5 п'ятірок», тобто у перекладі на звичайну мову — платить 5 п'ятірок і одержує здачі 2 троячки. Таким же чином пояснюємо й інші розв'язки.

Ревізія магазину

ЗАДАЧА

Під час ревізії торгових книг магазину один із записів виявився залитим чорнилом і мав вигляд, як на рис. 13.

Не можна було розібрати числа проданих метрів, але не було сумніву в тому, що число це не дробове; у вторгованій сумі можна було роздивитися тільки останні три цифри та встановити, що перед ними були три якісь інші цифри.

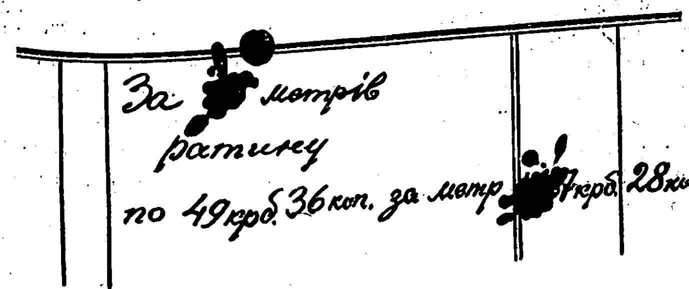


Рис. 13.

Чи може ревізійна комісія по цих слідах встановити запис?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Позначимо число метрів через x. Вторгована сума виразиться в копійках через

$$4936\ x.$$

Число, яке виражають три залиті цифри в запису грошової суми, позначимо через y. Це, очевидно, число тисяч копійок, а вся сума в копійках зобразиться так:

$$1000y + 728.$$

Маємо рівняння

$$4936x = 1000y + 728,$$

або, після скорочення на 8,

$$617x - 125y = 91.$$

У цьому рівнянні x і y — числа цілі і притому y не більше 999, оскільки більше як з трьох цифр воно складатися не може. Розв'язуємо рівняння, як раніше було вказано:

$$125y = 617x - 91,$$

$$y = 5x - 1 + \frac{34 - 8x}{125} = 5x - 1 + \frac{2(17 - 4x)}{125} = 5x - 1 + 2t.$$

Тут ми прийняли $\frac{617}{125} = 5 - \frac{8}{125}$, оскільки нам вигідно мати якомога меншу остачу. Дріб

$$\frac{2(17 - 4x)}{125}$$

є цілим числом, а оскільки 2 не ділиться на 125, то $\frac{17 - 4x}{125}$ повинно бути цілим числом, яке ми й позначили через t.

Далі з рівняння

$$\frac{17 - 4x}{125} = t$$

маємо:

$$17 - 4x = 125t,$$

$$x = 4 - 31t + \frac{1 - t}{4} = 4 - 31t + t_1,$$

де

$$t_1 = \frac{1 - t}{4}$$

і, таким чином,

$$4t_1 = 1 - t;$$
$$t = 1 - 4t_1;$$
$$x = 125t_1 - 27;$$
$$y = 617t_1 - 134^*.$$

Ми знаємо, що

$$100 \leqslant y < 1000.$$

Таким чином,

$$100 \leqslant 617t_1 - 134 < 1000,$$

звідки

$$t_1 \geqslant \frac{234}{617} \text{ і } t_1 < \frac{1134}{617}.$$

Очевидно, для t_1 існує тільки одне ціле значення:

$$t_1 = 1,$$

і тоді

$$x = 98, \quad y = 483,$$

тобто було продано 98 метрів на суму 4837 карбованців 28 копійок. Запис відтворено.

Купівля поштових марок

ЗАДАЧА

На один карбованець треба купити 40 штук поштових марок — копієчних, 4-копієчних і 12-копієчних. Скільки виявиться марок кожної ціни?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

У цьому випадку у нас є д в а рівняння з трьома невідомими:

$$x + 4y + 12z = 100,$$
$$x + y + z = 40,$$

де x — число копієчних, y — число 4-копієчних, z — число 12-копієчних марок.

* Зверніть увагу на те, що коефіцієнти при t_1 дорівнюють коефіцієнтам при x і y у вихідному рівнянні $617x - 125y = 91$, причому в одного з коефіцієнтів знак при t_1 обернений. Це не випадковість: можна довести, що так повинно бути завжди, якщо коефіцієнти при x та y — взаємно прості.

Віднімаючи від першого рівняння друге, одержуємо одне рівняння з двома невідомими:

$$3y + 11z = 60.$$

Знаходимо y:

$$y = 20 - 11 \cdot \frac{z}{3}.$$

Очевидно, $\frac{z}{3}$ — число ціле. Позначимо його через t. Матимемо:

$$y = 20 - 11t,$$
$$z = 3t.$$

Підставимо вирази для y і z у друге з вихідних рівнянь:

$$x + 20 - 11t + 3t = 40;$$

одержимо:

$$x = 20 + 8t.$$

Оскільки $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ і $z \geqslant 0$, то неважко встановити границі для t:

$$0 \leqslant t \leqslant 1\frac{9}{11},$$

звідки робимо висновок, що для t можливі тільки два цілих значення:

$$t = 0 \text{ і } t = 1.$$

Відповідні значення x, y і z такі:

$t =$	0	1
$x =$	20	28
$y =$	20	9
$z =$	0	3

Перевірка

$$20 \cdot 1 + 20 \cdot 4 + 0 \cdot 12 = 100,$$
$$28 \cdot 1 + 9 \cdot 4 + 3 \cdot 12 = 100.$$

Отже, купівля марок може бути здійснена тільки двома способами, а якщо зажадати, щоб було куплено хоч би одну марку кожної вартості, — то тільки одним способом.

Наступна задача — в тому ж роді.

Купівля фруктів

ЗАДАЧА

На 5 карбованців куплено 100 штук різних фруктів. Ціни на фрукти такі:

Кавуни, штука	50 копійок
Яблука »	10 »
Сливи »	1 »

Скільки фруктів кожного роду було куплено?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Позначимо число кавунів через x, число яблук — через y, число слив — через z; складемо два рівняння:

$$\begin{cases} 50x + 10y + 1z = 500, \\ x + y + z = 100. \end{cases}$$

Віднявши від першого рівняння друге, одержимо одне рівняння з двома невідомими:

$$49x + 9y = 400.$$

Рис. 14.

Дальший хід розв'язання такий:

$$y = \frac{400 - 49x}{9} = 44 - 5x + \frac{4(1-x)}{9} = 44 - 5x + 4t,$$

$$t = \frac{1-x}{9}, \quad x = 1 - 9t,$$

$$y = 44 - 5(1 - 9t) + 4t = 39 + 49t.$$

З нерівностей

$$1 - 9t \geqslant 0 \text{ і } 39 + 49t \geqslant 0$$

встановлюємо, що

$$\frac{1}{9} \geqslant t \geqslant -\frac{39}{49}$$

і, таким чином, $t = 0$. Тому

$$x = 1, \; y = 39.$$

Підставивши ці значення x і y у друге рівняння, одержимо: $z = 60$.

Отже, було куплено 1 кавун, 39 яблук і 60 слив. Інших комбінацій бути не може.

Відгадати день народження

ЗАДАЧА

Уміння розв'язувати невизначені рівняння дає можливість виконати такий математичний фокус.

Ви пропонуєте товаришеві помножити число дати народження на 12, а номер місяця — на 31. Він повідомляє вам суму обох здобутків, і ви обчислюєте по ній дату народження.

Якщо, наприклад, ваш товариш народився 9-го лютого, то він виконує такі викладки:

$$9 \cdot 12 = 108, \qquad 2 \cdot 31 = 62,$$
$$108 + 62 = 170.$$

Це останнє число — 170 — він повідомляє вам, і ви визначаєте задуману дату. Як?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Задача зводиться до розв'язання невизначеного рівняння

$$12x + 31y = 170$$

у цілих і додатних числах, причому число місяця x не більше 31, а номер місяця y не більше 12. Отже,

$$x = \frac{170 - 31y}{12} = 14 - 3y + \frac{2 + 5y}{12} = 14 - 3y + t,$$
$$2 + 5y = 12t,$$
$$y = \frac{-2 + 12t}{5} = 2t - 2 \cdot \frac{1 - t}{5} = 2t - 2t_1,$$
$$1 - t = 5t_1, \quad t = 1 - 5t_1,$$
$$y = 2(1 - 5t_1) - 2t_1 = 2 - 12t_1,$$
$$x = 14 - 3(2 - 12t_1) + 1 - 5t_1 = 9 + 31t_1.$$

Знаючи, що $31 \geqslant x > 0$ і $12 \geqslant y > 0$, знаходимо границі для t_1:

$$-\frac{9}{31} < t_1 < \frac{1}{6}.$$

Отже,

$$t_1 = 0, \; x = 9, \; y = 2.$$

Дата народження 9-е число другого місяця, тобто 9-е лютого.

Можна застосувати й інше розв'язання, не використовуючи рівнянь. Нам повідомили число $a = 12x + 31y$. Оскільки $12x + 24y$ ділиться на 12, то числа $7y$ і a мають однакові остачі від ділення на 12. Помноживши їх на 7, знайдемо, що $49y$ і $7a$ мають однакові остачі від ділення на 12. Однак $49y = 48y + y$, а $48y$ ділиться на 12. Виходить, що y і $7a$ мають однакові остачі від ділення на 12. Інакше кажучи, якщо a не ділиться на 12, то y дорівнює остачі від ділення числа $7a$ на 12; якщо ж a ділиться на 12, то $y = 12$. Цим число y (номер місяця) цілком визначається. Ну, а знаючи y, вже не становить труднощів знайти x.

Маленька порада: перш ніж узнавати остачу від ділення числа $7a$ на 12, замініть саме число a на його остачу від ділення на 12; підраховувати буде простіше. Наприклад, якщо $a = 170$, то ви повинні у думці зробити такі обчислення:

$$170 = 12 \cdot 14 + 2 \text{ (остача, отже, дорівнює 2)};$$
$$2 \cdot 7 = 14; \; 14 = 12 \cdot 1 + 2 \text{ (отже, } y = 2);$$
$$x = \frac{170 - 31y}{12} = \frac{170 - 31 \cdot 2}{12} = \frac{108}{12} = 9 \text{ (отже, } x = 9).$$

Тепер ви можете сказати товаришеві дату його народження: 9-го лютого.

Доведемо, що фокус завжди виходить без відказу, тобто що рівняння завжди має тільки одне розв'язання у цілих додатних числах. Позначимо число, яке повідомив ваш товариш, через a; таким чином, визначення дати його народження зводиться до розв'язання рівняння

$$12x + 31y = a.$$

Почнемо міркувати «від протилежного». Припустимо, що це рівняння має д в а різні розв'язки у цілих додатних числах, а саме, розв'язок x_1, y_1 і розв'язок x_2, y_2, причому x_1 і x_2 не перевищують 31, а y_1 і y_2 не перевищують 12. Ми маємо:

$$12x_1 + 31y_1 = a,$$
$$12x_2 + 31y_2 = a.$$

4*

Віднімаючи від першої рівності другу, одержуємо:

$$12(x_1 - x_2) + 31(y_1 - y_2) = 0.$$

З цієї рівності випливає, що число $12(x_1 - x_2)$ ділиться на 31. Оскільки x_1 і x_2 — додатні числа, які не перевищують 31, то їх різниця $x_1 - x_2$ за величиною менша від 31. Тому число $12(x_1 - x_2)$ може ділитися на 31 лише в тому випадку, коли $x_1 = x_2$, тобто коли перше розв'язання збігається з другим. Таким чином, припущення про існування двох р і з н и х розв'язань призводить до суперечності.

Продаж курей

СТАРОВИННА ЗАДАЧА

Три сестри прийшли на базар з курями. Одна принесла для продажу 10 курей, друга 16, третя 26. Близько полудня вони продали частину своїх курей по однаковій ціні. Після полудня, побоюючись, що не всіх курей буде продано, вони знизили ціну і розпродали решту курей знову по однаковій ціні. Додому всі троє повернулися з однаковим виторгом: кожна сестра одержала від продажу 35 карбованців.

По якій ціні продавали вони курей до і після полудня?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Позначимо число курей, проданих кожною сестрою до полудня, через x, y, z. За другу половину дня вони продали $10 - x$, $16 - y$, $26 - z$ курей. Ціну до полудня позначимо через m, а після полудня — через n. Для ясності зіставимо ці позначення:

	Число проданих курей			Ціна
До полудня	x	y	z	m
Після полудня	$10-x$	$16-y$	$26-z$	n

Перша сестра вторгувала:

$$mx + n(10 - x); \text{ отже, } mx + n(10 - x) = 35;$$

друга:

$$my + n(16 - y); \text{ отже, } my + n(16 - y) = 35;$$

третя:

$$mz + n(26 - z); \text{ отже, } mz + n(26 - z) = 35.$$

Перетворимо ці три рівняння:

$$\begin{cases}(m - n)x + 10n = 35;\\(m - n)y + 16n = 35;\\(m - n)z + 26n = 35.\end{cases}$$

Віднявши від третього рівняння перше, потім друге, одержимо послідовно:

$$\begin{cases}(m - n)(z - x) + 16n = 0,\\(m - n)(z - y) + 10n = 0,\end{cases}$$

або

$$\begin{cases}(m - n)(x - z) = 16n\\(m - n)(y - z) = 10n.\end{cases}$$

Поділимо перше з цих рівнянь на друге:

$$\frac{x - z}{y - z} = \frac{8}{5}, \text{ або } \frac{x - z}{8} = \frac{y - z}{5}.$$

Оскільки x, y, z — числа цілі, то й різниці $x - z$, $y - z$ — також цілі числа. Тому для існування рівності

$$\frac{x - z}{8} = \frac{y - z}{5}$$

необхідно, щоб $x - z$ ділилося на 8, а $y - z$ на 5. Таким чином,

$$\frac{x - z}{8} = t = \frac{y - z}{5},$$

звідки

$$x = z + 8t,$$
$$y = z + 5t.$$

Зауважимо, що t — не тільки ціле, а й додатне, оскільки $x > z$ (у протилежному випадку перша сестра не змогла б вторгувати стільки, скільки третя).

Оскільки $x < 10$, то

$$z + 8t < 10.$$

При цілих і додатних z і t остання нерівність задовольняється тільки в одному випадку: коли $z = 1$ і $t = 1$. Підставивши ці значення у рівняння

$$x = z + 8t \text{ і } y = z + 5t,$$

знайдемо: $x = 9$, $y = 6$.

Тепер, повертаючись до рівнянь

$$mx + n(10 - x) = 35,$$
$$my + n(16 - y) = 35,$$
$$mz + n(26 - z) = 35$$

і підставляючи в них знайдені значення x, y, z, узнаємо ціни, по яких продавалися кури:

$$m = 3\frac{3}{4} \text{ карбованця}, \quad n = 1\frac{1}{4} \text{ карбованця}.$$

Отже, кури продавалися до полудня по 3 карбованці 75 копійок, а після полудня — по 1 карбованцю 25 копійок.

Два числа і чотири дії

ЗАДАЧА

Попередню задачу, яка привела до трьох рівнянь з п'ятьма невідомими, ми розв'язали не за загальним зразком, а за вільним математичним міркуванням. Точно так само будемо розв'язувати й наступні задачі, що приводять до невизначених рівнянь другого степеня.

Ось перша з них.

Над двома цілими додатними числами було виконано такі чотири дії:

1) їх додали;
2) відняли від більшого менше;
3) перемножили;
4) поділили більше на менше.

Одержані результати додали, і вийшло 243. Знайти ці числа.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Якщо більше число x, менше y, то

$$(x + y) + (x - y) + xy + \frac{x}{y} = 243.$$

Якщо це рівняння помножити на y, потім розкрити дужки і звести подібні члени, то одержимо:

$$x(2y + y^2 + 1) = 243y.$$

Однак $2y + y^2 + 1 = (y + 1)^2$. Тому

$$x = \frac{243y}{(y + 1)^2}.$$

Щоб x було цілим числом, знаменник $(y + 1)^2$ повинен бути одним з дільників числа 243, бо y не може мати спільних множників з $(y + 1)$. Знаючи, що $243 = 3^5$, робимо висновок, що 243 ділиться тільки на такі числа, що є точними квадратами: 1, 3^2, 9^2. Таким чином, $(y + 1)^2$ має дорівнювати 1, 3^2 або 9^2, звідки (пригадуючи, що y повинно бути додатним), знаходимо, що y дорівнює 8 або 2.

Тоді x дорівнює

$$\frac{243 \cdot 8}{81} \text{ або } \frac{243 \cdot 2}{9}.$$

Отже, шукані числа такі: 24 і 8 або 54 і 2.

Який прямокутник?

ЗАДАЧА

Сторони прямокутника становлять цілі числа. Якої довжини повинні вони бути, щоб периметр прямокутника дорівнював його площі?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Позначаючи сторони прямокутника через x і y, складаємо рівняння:

$$2x + 2y = xy,$$

звідки

$$x = \frac{2y}{y - 2}.$$

Оскільки x і y повинні бути додатними, то додатним повинно бути й число $y - 2$, тобто y повинно бути більше від 2.

Зауважимо тепер, що

$$x = \frac{2y}{y-2} = \frac{2(y-2)+4}{y-2} = 2 + \frac{4}{y-2}.$$

Оскільки x повинно бути цілим числом, то й вираз $\frac{4}{y-2}$ повинен бути цілим числом. Однак при $y > 2$ це можливо лише тоді, коли y дорівнює 3, 4 або 6. Відповідні значення x будуть 6, 4 і 3.

Таким чином, шукана фігура є або прямокутник із сторонами 3 і 6, або квадрат із стороною 4.

Два двозначні числа

ЗАДАЧА

Числа 46 і 96 мають цікаву особливість: їх здобуток не змінює своєї величини, якщо переставити їх цифри.

Справді,

$$46 \cdot 96 = 4416 = 64 \cdot 69.$$

Треба встановити, чи існують ще інші пари двозначних чисел з такою ж властивістю. Як відшукати їх усіх?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Позначивши цифри шуканих чисел через x і y, z і t, складемо рівняння

$$(10x + y)(10z + t) = (10y + x)(10t + z).$$

Розкривши дужки, після спрощень одержимо:

$$xz = yt,$$

де x, y, z, t — цілі числа, менші від 10. Щоб відшукати розв'язок, складаємо з 9 цифр усі пари з однаковими здобутками:

$1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$	$2 \cdot 8 = 4 \cdot 4$
$1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$	$2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$
$1 \cdot 8 = 2 \cdot 4$	$3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$
$1 \cdot 9 = 3 \cdot 3$	$4 \cdot 9 = 6 \cdot 6$
$2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$	

Усіх рівностей 9. З кожної можна скласти одну або дві шукані групи чисел. Наприклад, з рівності $1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$ складаємо одне розв'язання:

$$12 \cdot 42 = 21 \cdot 24.$$

З рівності $1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$ знаходимо два розв'язки

$$12 \cdot 63 = 21 \cdot 36, \qquad 13 \cdot 62 = 31 \cdot 26.$$

Таким же способом відшукуємо наступні 14 розв'язків:

$12 \cdot 42 = 21 \cdot 24$	$23 \cdot 96 = 32 \cdot 69$
$12 \cdot 63 = 21 \cdot 36$	$24 \cdot 63 = 42 \cdot 36$
$12 \cdot 84 = 21 \cdot 48$	$24 \cdot 84 = 42 \cdot 48$
$13 \cdot 62 = 31 \cdot 26$	$26 \cdot 93 = 62 \cdot 39$
$13 \cdot 93 = 31 \cdot 39$	$34 \cdot 86 = 43 \cdot 68$
$14 \cdot 82 = 41 \cdot 28$	$36 \cdot 84 = 63 \cdot 48$
$23 \cdot 64 = 32 \cdot 46$	$46 \cdot 96 = 64 \cdot 69$

Піфагорові числа

Зручний і дуже точний спосіб, який застосовують землеміри для проведення на місцевості перпендикулярних ліній, полягає ось у чому. Нехай через точку A треба до прямої MN провести перпендикуляр (рис. 15). Від точки A відкладають у напрямі AM три рази яку-небудь відстань a. Потім зав'язують на шнурі три вузли, відстані між якими дорівнюють $4a$ і $5a$. Приклавши крайні вузли до точок A і B, натягують шнур за середній вузол. Шнур розміщується трикутником, у якого кут A — прямий.

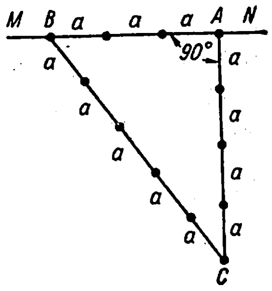


Рис. 15.

Цей стародавній спосіб, який, очевидно, застосовувався ще тисячоліття тому будівниками єгипетських пірамід, грунтується на тому, що кожний трикутник, сторони якого відносяться як $3 : 4 : 5$, відповідно до загальновідомої теореми Піфагора,— прямокутний, бо

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Крім чисел 3, 4, 5, існує, як відомо, безліч додатних чисел a, b, c, які задовольняють співвідношення

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Вони називаються **піфагоровими числами**. Згідно з теоремою Піфагора такі числа можуть бути довжинами сторін деякого прямокутного трикутника; тому a і b називають «катетами», а c — «гіпотенузою».

Ясно, що коли a, b, c є трійкою піфагорових чисел, то і pa, pb, pc (де p — цілочислений множник) — піфагорові числа. І навпаки, якщо піфагорові числа мають спільний множник, то на цей спільний множник їх усі можна скоротити, і знову вийде трійка піфагорових чисел. Тому спочатку будемо досліджувати лише трійки взаємно простих піфагорових чисел (інші можна одержати з них множенням на цілочислений множник p).

Покажемо, що у кожній з таких трійок a, b, c один з «катетів» повинен бути парним, а другий — непарним. Почнемо міркувати «від протилежного». Якщо обидва «катети» a і b парні, то парним буде число $a^2 + b^2$, а отже, і «гіпотенуза». Це, однак, суперечить тому, що числа a, b, c не мають спільних множників, бо три парні числа мають спільний множник 2. Таким чином, хоч один з «катетів» a, b непарний.

Залишається ще одна можливість: обидва «катети» непарні, а «гіпотенуза» парна. Неважко довести, що цього не може бути. Справді, якщо «катети» мають вигляд

$$2x + 1 \text{ і } 2y + 1,$$

то сума їх квадратів дорівнює

$$4x^2 + 4x + 1 + 4y^2 + 4y + 1 = 4(x^2 + x + y^2 + y) + 2,$$

тобто являє собою число, яке при діленні на 4 дає в остачі 2. А проте квадрат будь-якого парного числа повинен ділитися на 4 без остачі. Виходить, що сума квадратів двох непарних чисел не може бути квадратом парного числа; інакше кажучи, наші три числа — не піфагорові.

Таким чином, з «катетів» a, b один парний, а другий непарний. Тому число $a^2 + b^2$ непарне, отже непарна і «гіпотенуза» c.

Припустимо, для певності, що непарним є «катет» a, а парним b. З рівності

$$a^2 + b^2 = c^2$$

ми легко одержуємо:

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b).$$

Множники $(c + b)$ і $(c - b)$, які стоять у правій частині, взаємно прості. Дійсно, коли б ці числа мали спільний простий множник, який відрізнявся б від одиниці, то на цей множник ділилася б і сума

$$(c + b) + (c - b) = 2c,$$

і різниця

$$(c + b) - (c - b) = 2b,$$

і добуток

$$(c + b)(c - b) = a^2,$$

тобто числа $2c$, $2b$ і a мали б спільний множник. Оскільки a непарне, то цей множник відрізняється від двійки, і тому цей же спільний множник мають числа a, b, c, чого, однак, не може бути. Одержана суперечність показує, що числа $(c + b)$ і $(c - b)$ взаємно прості.

Однак коли здобуток взаємно простих чисел є точним квадратом, то кожне з них є квадратом, тобто

$$\begin{cases} c + b = m^2, \\ c - b = n^2. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо:

$$c = \frac{m^2 + n^2}{2}, \quad b = \frac{m^2 - n^2}{2},$$

$$a^2 = (c + b)(c - b) = m^2 n^2, \quad a = mn.$$

Отже, розглядувані піфагорові числа мають вигляд

$$a = mn, \quad b = \frac{m^2 - n^2}{2}, \quad c = \frac{m^2 + n^2}{2},$$

де m і n — деякі взаємно прості непарні числа. Читач легко може переконатися і в протилежному: при будь-яких непарних m і n написані формули дають три піфагорові числа a, b, c.

Ось кілька трійок піфагорових чисел, які можна одержати при різних m і n:

при $m = 3$,	$n = 1$	$3^2 + 4^2 = 5^2$
» $m = 5$,	$n = 1$	$5^2 + 12^2 = 13^2$
» $m = 7$,	$n = 1$	$7^2 + 24^2 = 25^2$
» $m = 9$,	$n = 1$	$9^2 + 40^2 = 41^2$
» $m = 11$,	$n = 1$	$11^2 + 60^2 = 61^2$
» $m = 13$,	$n = 1$	$13^2 + 84^2 = 85^2$

при $m=5$,	$n=3$	$15^2+8^2=17^2$
» $m=7$,	$n=3$	$21^2+20^2=29^2$
» $m=11$,	$n=3$	$33^2+56^2=65^2$
» $m=13$,	$n=3$	$39^2+80^2=89^2$
» $m=7$,	$n=5$	$35^2+12^2=37^2$
» $m=9$,	$n=5$	$45^2+28^2=53^2$
» $m=11$,	$n=5$	$55^2+48^2=73^2$
» $m=13$,	$n=5$	$65^2+72^2=97^2$
» $m=9$,	$n=7$	$63^2+16^2=65^2$
» $m=11$,	$n=7$	$77^2+36^2=85^2$

Усі інші трійки піфагорових чисел мають спільні множники або містять числа, більші від 100.

Піфагорові числа взагалі мають ряд цікавих особливостей, які далі ми перелічуємо без доведень:

1. Один з «катетів» повинен бути кратним т р ь о м.
2. Один з « к а т е т і в» повинен бути кратним ч о т и р ь о м.
3. Одне з піфагорових чисел повинно бути кратним п'я т и.

Читач може переконатися у наявності цих властивостей, проглядаючи наведені вище приклади груп піфагорових чисел.

Невизначене рівняння третього степеня

Сума кубів трьох цілих чисел може бути кубом четвертого числа. Наприклад, $3^3+4^3+5^3=6^3$.

Це означає, між іншим, що куб, ребро якого дорівнює 6 сантиметрів, рівновеликий сумі трьох кубів,

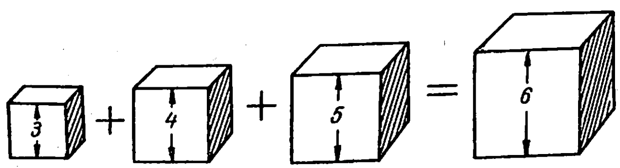


Рис. 16.

ребра яких дорівнюють 3, 4, 5 сантиметрів (рис. 16),— співвідношення, яке, за переказами, дуже цікавило Платона.

Спробуємо знайти інші співвідношення такого ж роду, тобто поставимо перед собою таку задачу: знайти

розв'язок рівняння $x^3+y^3+z^3=u^3$. Однак зручніше позначити невідоме u через $-t$. Тоді рівняння матиме простіший вигляд

$$x^3+y^3+z^3+t^3=0.$$

Розглянемо спосіб, який дасть можливість знайти безліч розв'язків цього рівняння у цілих (додатних і від'ємних) числах. Нехай a, b, c, d і $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — дві четвірки чисел, які задовольняють рівняння. Додамо до чисел першої четвірки числа другої четвірки, помножені на деяке число k, і спробуємо підібрати число k так, щоб одержані числа

$$a+k\alpha,\ b+k\beta,\ c+k\gamma,\ d+k\delta$$

також задовольняли наше рівняння. Інакше кажучи, підберемо k таким чином, щоб виконувалася рівність

$$(a+k\alpha)^3+(b+k\beta)^3+(c+k\gamma)^3+(d+k\delta)^3=0.$$

Розкриваючи дужки і пригадуючи, що четвірки a, b, c, d і $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ задовольняють наше рівняння, тобто мають місце рівності

$$a^3+b^3+c^3+d^3=0,\quad \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3=0,$$

ми одержуємо:

$$3a^2k\alpha+3ak^2\alpha^2+3b^2k\beta+3bk^2\beta^2+3c^2k\gamma+3ck^2\gamma^2+ +3d^2k\delta+3dk^2\delta^2=0$$

або

$$3k[(a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma+d^2\delta)+k(a\alpha^2+b\beta^2+ +c\gamma^2+d\delta^2)]=0.$$

Здобуток може перетворюватися на нуль тільки в тому випадку, коли перетворюється на нуль хоч би один з його множників. Прирівнюючи кожний з множників до нуля, ми одержуємо два значення для k. Перше значення $k= =0$ нас не цікавить: воно означає, що коли до чисел a, b, c, d нічого не додавати, то одержані числа задовольняють наше рівняння. Тому ми візьмемо лише друге значення для k:

$$k=-\frac{a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma+d^2\delta}{a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2+d\delta^2}.$$

Отже, знаючи дві четвірки чисел, які задовольняють вихідне рівняння, можна знайти нову четвірку: для цього треба до чисел першої четвірки додати числа другої четвірки, помножені на k, де k має написане вище значення.

Для того щоб застосувати цей спосіб, треба знати дві четвірки чисел, які задовольняють вихідне рівняння. Одну таку четвірку (3, 4, 5, — 6) ми вже знаємо. Де взяти ще одну четвірку? Вихід із становища знайти дуже просто: за другу четвірку можна взяти числа r, $-r$, s, $-s$, які, очевидно, задовольняють вихідне рівняння. Інакше кажучи, припустимо

$$a = 3, \quad b = 4, \quad c = 5, \quad d = -6,$$
$$\alpha = r, \quad \beta = -r, \quad \gamma = s, \quad \delta = -s.$$

Тоді для k ми одержимо, як легко побачити, таке значення:

$$k = -\frac{-7r - 11s}{7r^2 - s^2} = \frac{7r + 11s}{7r^2 - s^2},$$

а числа $a + k\alpha$, $b + k\beta$, $c + k\gamma$, $d + k\delta$ відповідно дорівнюватимуть

$$\frac{28r^2 + 11rs - 3s^2}{7r^2 - s^2}, \quad \frac{21r^2 - 11rs - 4s^2}{7r^2 - s^2},$$
$$\frac{35r^2 + 7rs + 6s^2}{7r^2 - s^2}, \quad \frac{-42r^2 - 7rs - 5s^2}{7r^2 - s^2}.$$

Згідно із сказаним вище ці чотири вирази задовольняють вихідне рівняння

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0.$$

Оскільки всі ці вирази мають однаковий знаменник, то його можна відкинути (тобто чисельники цих дробів також задовольняють розглядуване рівняння). Таким чином, написане рівняння задовольняють (при будь-яких r і s) такі числа:

$$x = 28r^2 + 11rs - 3s^2,$$
$$y = 21r^2 - 11rs - 4s^2,$$
$$z = 35r^2 + 7rs + 6s^2,$$
$$t = -42r^2 - 7rs - 5s^2,$$

у чому, звичайно, можна переконатися і безпосередньо, піднісши ці вирази у куб і додавши. Надаючи r і s різних

цілих значень, ми можемо одержати ряд цілочислених розв'язків нашого рівняння. Якщо при цьому числа, які ми одержимо, будуть мати спільний множник, то на нього ці числа можна буде поділити. Наприклад, при $r = 1$, $s = 1$ одержимо для x, y, z, t такі значення: 36, 6, 48, —54, або, після скорочення на 6, значення 6, 1, 8, —9. Таким чином,

$$6^3 + 1^3 + 8^3 = 9^3.$$

Ось ще ряд рівностей того ж типу (які можна одержати після скорочення на спільний множник):

при	$r = 1$,	$s = 2$	$38^3 + 73^3 = 17^3 + 76^3$,
»	$r = 1$,	$s = 3$	$17^3 + 55^3 = 24^3 + 54^3$,
»	$r = 1$,	$s = 5$	$4^3 + 110^3 = 67^3 + 101^3$,
»	$r = 1$,	$s = 4$	$8^3 + 53^3 = 29^3 + 50^3$,
»	$r = 1$,	$s = -1$	$7^3 + 14^3 + 17^3 = 20^3$,
»	$r = 1$,	$s = -2$	$2^3 + 16^3 = 9^3 + 15^3$,
»	$r = 2$,	$s = -1$	$29^3 + 34^3 + 44^3 = 53^3$,

. . . .

Зауважимо, що коли у вихідній четвірці (3, 4, 5, —6) або в одній з одержаних четвірок поміняти числа місцями і застосувати той самий спосіб, то одержимо нову серію розв'язків. Наприклад, взявши четвірку 3, 5, 4, —6 (тобто прийнявши, що $a = 3$, $b = 5$, $c = 4$, $d = -6$), ми одержимо для x, y, z, t значення:

$$x = 20r^2 + 10rs - 3s^2,$$
$$y = 12r^2 - 10rs - 5s^2,$$
$$z = 16r^2 + 8rs + 6s^2,$$
$$t = -24r^2 - 8rs - 4s^2.$$

Звідси при різних r і s одержуємо ряд нових співвідношень:

при	$r = 1$,	$s = 1$	$9^3 + 10^3 = 1^3 + 12^3$,
»	$r = 1$,	$s = 3$	$23^3 + 94^3 = 63^3 + 84^3$,
»	$r = 1$,	$s = 5$	$5^3 + 163^3 + 164^3 = 206^3$,
»	$r = 1$,	$s = 6$	$7^3 + 54^3 + 57^3 = 70^3$,
»	$r = 2$,	$s = 1$	$23^3 + 97^3 + 86^3 = 116^3$,
»	$r = 1$,	$s = -3$	$3^3 + 36^3 + 37^3 = 46^3$,

. . . .

Таким способом можна одержати безліч розв'язків розглядуваного рівняння.

Сто тисяч за доведення теореми

Одна задача з галузі невизначених рівнянь набула гучної слави, оскільки за правильний розв'язок її було відказано ціле багатство: 100 000 німецьких марок!

Задача полягає в тому, щоб довести таке положення, яке носить назву теореми, або «великої пропозиції» Ферма:

Сума однакових степенів двох цілих чисел не може бути тим самим степенем будь-якого третього цілого числа. Винятком є лише другий степінь, для якого це можливо. Інакше кажучи, треба довести, що рівняння

$$x_n + y^n = z^n$$

нерозв'язне у цілих числах для $n > 2$.

Пояснимо сказане. Ми бачили, що рівняння

$$x^2 + y^2 = z^2,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = t^3$$

мають скільки завгодно цілочислених розв'язань. Однак спробуйте підшукати три цілих додатних числа, для яких було б виконано рівність $x^3 + y^3 = z^3$; ваші пошуки залишаться марними.

Та ж невдача чекає на вас і при підшукуванні прикладів для четвертого, п'ятого, шостого і т. д. степенів. Це і підтверджує «велика пропозиція» Ферма.

Що ж вимагають від осіб, які бажають одержати премію? Вони повинні довести це положення для всіх тих степенів, для яких воно вірне. Справа в тому, що теорема Ферма ще не доведена і висить, так би мовити, у повітрі.

Минуло три століття з тих пір, як її висловлено, але математикам досі не вдалося знайти її доведення.

Найвидатніші математики трудилися над цією проблемою, однак у кращому випадку їм удавалося довести теорему лише для того або іншого окремого показника або для груп показників, необхідно ж знайти з а г а л ь н е доведення для б у д ь - я к о г о цілого показника.

Цікаво, що невловиме доведення теореми Ферма, очевидно, вже одного разу було знайдено, а потім знову втрачено. Автор теореми, геніальний математик XVII століття

П'єр Ферма*, запевняв, що її доведення йому відоме. Свою «велику пропозицію» він записав (як і ряд інших теорем з теорії чисел) у вигляді замітки на полях твору Діофанта, зробивши до неї таку приписку:

«Я знайшов справді дивне доведення цієї пропозиції, але тут мало місця, щоб його навести».

Ні в паперах великого математика, ні в його листуванні, ніде в іншому місці слідів цього доведення знайти не вдалося.

Послідовникам Ферма довелося йти самостійним шляхом. Ось результати цих зусиль: Ейлер (1797 р.) довів теорему Ферма для третього і четвертого степенів; для п'ятого степеня її довів Лежандр (1823 р.), для сьомого**— Ламе і Лебег (1840 р.). У 1849 р. Куммер довів теорему для великої групи степенів і, між іншим, — для всіх показників, менших від 100. Ці останні праці далеко виходять за межі тієї галузі математики, яка знайома була Ферма, і стає загадковим, як він міг відшукати загальне доведення своєї «великої пропозиції». А проте, можливо, він помилявся.

Читачам, які цікавляться історією і сучасним станом задачі Ферма, можна рекомендувати брошуру А. Я. Хінчина «Велика теорема Ферма». Написана спеціалістом, ця брошура розрахована на читача, який має лише елементарні знання з математики.

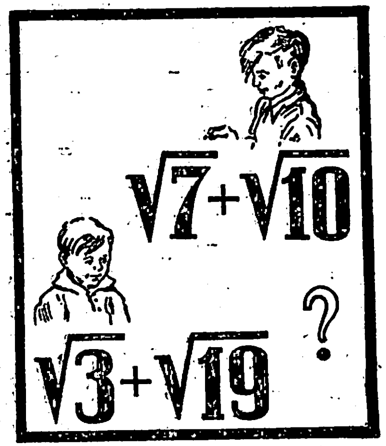
---

* Ферма (1603—1665 рр.) не був професіоналом-математиком. Юрист за освітою, радник парламенту, він займався математичними дослідженнями лише мимохідь. Це не заважало йому зробити ряд надзвичайно важливих відкриттів, які він, однак, не публікував, а за звичаєм тієї епохи писав про них у листах до своїх вчених друзів: Паскаля, Декарта, Гюйгенса, Роберваля та ін.

** Для складених показників (крім 4) особливого доведення не потрібно: ці випадки зводяться до випадків з простими показниками.

РОЗДІЛ V

ШОСТА МАТЕМАТИЧНА ДІЯ



Шоста дія

Додавання і множення мають по одній оберненій дії, які називаються відніманням і діленням. П'ята математична дія — піднесення до степеня — має д в і обернені: відшукування основи і відшукування показника. Відшукування основи є ш о с т а математична дія і називається добуванням кореня. Знаходження показника — с ь о м а дія — називається логарифмуванням. Причину того, що піднесення до степеня має дві обернені дії, тим часом як додавання і множення — тільки по одній, зрозуміти неважко: обидва доданки (перший і другий) — рівноправні, їх можна поміняти місцями; те саме стосується і множення; однак числа, які беруть участь у піднесенні до степеня, тобто основа і показник степеня, нерівноправні між собою; переставити їх, взагалі кажучи, не можна (наприклад, $3^5 \neq 5^3$). Тому відшукування кожного з чисел, які беруть участь у додаванні і множенні, провадиться однаковими способами, а відшукування основи степеня і показника степеня виконується по-різному.

Шоста дія — добування кореня — позначається знаком $\sqrt{\ }$. Не всі знають, що це — видозміна латинської літери *r*, початкової у латинському слові, яке означає «корінь». Був час (XVI століття), коли за знак кореня правила не строчна, а прописна літера *R*, а поряд з нею ставили першу літеру латинських слів «квадратний» (*q*)

або «кубічний» (*c*), щоб показати, який саме корінь треба добути*. Наприклад, писали

$$R\cdot q\cdot 4352$$

замість теперішнього позначення

$$\sqrt{4352}.$$

Якщо додати до цього, що за тієї епохи ще не увійшли у загальне користування теперішні знаки для плюса і мінуса, а замість них писали літери *p.* і *m.*, і що наші дужки заміняли знаками $\llcorner\ \lrcorner$, то стане зрозумілим, який незвичайний для сучасного ока вигляд повинні були мати тоді алгебраїчні вирази.

Ось приклад з книги стародавнього математика Бомбеллі (1572 р.):

$$R.c.\llcorner\, R.q.\,4352\ \mathrm{p.}\,16\,\lrcorner\, m.\ R.c.\llcorner\, R.q.\,4352\ m.\,16\,\lrcorner.$$

Ми написали б те саме іншими знаками:

$$\sqrt[3]{\sqrt{4352}+16}-\sqrt[3]{\sqrt{4352}-16}.$$

Крім позначення $\sqrt[n]{a}$ тепер застосовується для тієї ж дії ще й інше, $a^{\frac{1}{n}}$ дуже зручне щодо узагальнення: воно наочно підкреслює, що кожний корінь є не що інше, як степінь, показник якого — дробове число. Воно було запропоноване видатним голландським математиком XVI століття Стевіном.

Що більше?

ЗАДАЧА 1

Що більше $\sqrt[5]{5}$ чи $\sqrt{2}$?

Цю і наступні задачі треба розв'язати, н е о б ч и с л ю ю ч и з н а ч е н н я к о р е н і в.

---

* У підручнику з математики Магницького, за яким навчалися у нас протягом усієї першої половини XVIII століття, зовсім немає окремого знака для дії добування кореня.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Підносячи обидва вирази у 10-й степінь, одержуємо:

$$(\sqrt[5]{5})^{10} = 5^2 = 25, \quad (\sqrt{2})^{10} = 2^5 = 32.$$

Оскільки $32 > 25$, то

$$\sqrt{2} > \sqrt[5]{5}.$$

ЗАДАЧА 2

Що більше: $\sqrt[4]{4}$ чи $\sqrt[7]{7}$?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Підносячи обидва вирази до 28-го степеня, одержуємо:

$$(\sqrt[4]{4})^{28} = 4^7 = 2^{14} = 2^7 \cdot 2^7 = 128^2,$$
$$(\sqrt[7]{7})^{28} = 7^4 = 7^2 \cdot 7^2 = 49^2.$$

Оскільки $128 > 49$, то й

$$\sqrt[4]{4} > \sqrt[7]{7}.$$

ЗАДАЧА 3

Що більше: $\sqrt{7} + \sqrt{10}$ чи $\sqrt{3} + \sqrt{19}$?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Підносячи обидва вирази до квадрата, одержуємо:

$$(\sqrt{7} + \sqrt{10})^2 = 17 + 2\sqrt{70},$$
$$(\sqrt{3} + \sqrt{19})^2 = 22 + 2\sqrt{57}.$$

Зменшуємо обидва вирази на 17; у нас залишається

$$2\sqrt{70} \text{ і } 5 + 2\sqrt{57}.$$

Підносимо ці вирази до квадрата, маємо:

$$280 \text{ і } 253 + 20\sqrt{57}.$$

Віднімаючи по 253, порівнюємо

$$27 \text{ і } 20\sqrt{57}.$$

Оскільки $\sqrt{57}$ більше від 2, то $20\sqrt{57} > 40$; отже,

$$\sqrt{3} + \sqrt{19} > \sqrt{7} + \sqrt{10}.$$

Розв'язати одним поглядом

ЗАДАЧА

Подивіться уважніше на рівняння

$$x^{x^3} = 3$$

і скажіть, чому дорівнює x.

РОЗВ'ЯЗАННЯ.

Кожний, хто добре освоївся з алгебраїчними символами, зміркує, що

$$x = \sqrt[3]{3}.$$

Справді, тоді

$$x^3 = (\sqrt[3]{3})^3 = 3,$$

і, отже,

$$x^{x^3} = x^3 = 3,$$

що й треба було довести.

Той, для кого це «розв'язання одним поглядом» не під силу, може полегшити собі пошуки невідомого таким чином.

Нехай

$$x^3 = y.$$

Тоді

$$x = \sqrt[3]{y},$$

і рівняння набуває вигляду

$$(\sqrt[3]{y})^y = 3.$$

Підносимо у куб:

$$y^y = 3^3.$$

Зрозуміло, що $y = 3$ і, отже,

$$x = \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{3}.$$

Алгебраїчні комедії

ЗАДАЧА 1

Шоста математична дія дає можливість розигрувати справжні алгебраїчні комедії і фарси на такі сюжети, як $2 \cdot 2 = 5$, $2 = 3$ і т. п. Гумор подібних математичних вистав полягає в тому, що помилка—досить елементарна—дещо замаскована і не зразу кидається у вічі. Виконаємо дві п'єси цього комічного репертуару в галузі алгебри.

Перша:

$$2 = 3.$$

На сцені спочатку з'являється незаперечна рівність

$$4 - 10 = 9 - 15.$$

У наступній «яві» до обох частин рівності додається по однаковій величині $6\frac{1}{4}$:

$$4 - 10 + 6\frac{1}{4} = 9 - 15 + 6\frac{1}{4}.$$

Дальший хід комедії полягає у перетвореннях:

$$2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2,$$

$$\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2.$$

Добуваючи з обох частин рівності квадратний корінь, одержують:

$$2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}.$$

Додаючи по $\frac{5}{2}$ до обох частин, приходять до безглуздої рівності

$$2 = 3.$$

У чому ж прихована помилка?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Помилка проскочила у такому міркуванні. З того, що

$$\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2,$$

було зроблено висновок, що

$$2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}.$$

Однак з того, що квадрати рівні, зовсім не випливає, що рівні й перші степені. Адже $(-5)^2 = 5^2$, але -5 не дорівнює 5. Квадрати можуть бути рівні і тоді, коли перші степені відрізняються знаками. У нашому прикладі ми маємо саме такий випадок:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

але $-\frac{1}{2}$ не дорівнює $\frac{1}{2}$.

ЗАДАЧА 2

Інший алгебраїчний фарс (рис. 17)

$$2 \cdot 2 = 5$$

розигрується за зразком попереднього і грунтується на тому ж трюку. На сцені з'являється рівність, яка не викликає сумніву,

$$16 - 36 = 25 - 45.$$

Додаються однакові числа

$$16 - 36 + 20\frac{1}{4} = 25 - 45 + 20\frac{1}{4}$$

і виконуються такі перетворення:

$$4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 =$$

$$= 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2,$$

$$\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2.$$

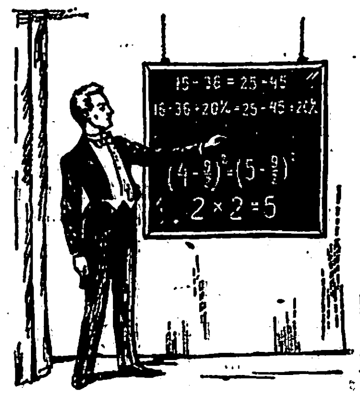


Рис. 17.

Потім за допомогою того ж незаконного висновку переходять до фіналу:

$$4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2},$$

$$4 = 5,$$

$$2 \cdot 2 = 5.$$

Ці комічні випадки повинні застерегти малодосвідченого математика від необачних операцій з рівняннями, які містять невідоме під знаком кореня.

РОЗДІЛ VI

РІВНЯННЯ ДРУГОГО СТЕПЕНЯ

Рукостискання

ЗАДАЧА

Учасники засідання потиснули один одному руки, і хтось підрахував, що всіх рукостискань було 66. Скільки ж чоловік з'явилося на засідання?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Задача розв'язується дуже просто алгебраїчно. Кожний з x учасників потиснув $x-1$ руку. Виходить, що всіх рукостискань має бути $x(x-1)$. Однак треба взяти до уваги, що коли Іванов потискує руку Петрова, то й Петров потискує руку Іванова. Ці два рукостискання треба рахувати за одне. Тому число підрахованих рукостискань удвічі менше, ніж $x(x-1)$. Маємо рівняння

$$\frac{x(x-1)}{2}=66$$

або після перетворень

$$x^2-x-132=0,$$

звідки

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+528}}{2},$$

$$x_1=12,\ x_2=-11.$$

Оскільки від'ємний розв'язок (—11 чоловік) у даному випадку позбавлений реального змісту, ми його відкидаємо і залишаємо тільки перший корінь; у засіданні брали участь 12 чоловік.

Бджолиний рій

ЗАДАЧА

У стародавній Індії був поширений своєрідний вид спорту — прилюдне змагання у розв'язанні головоломних задач. Індуські математичні посібники частково мали на меті бути підручником для подібних змагань на першість у розумовому спорті. «За викладеними тут правилами,— пише упорядник одного з таких підручників,— мудрий може придумати тисячу інших задач. Як сонце блиском своїм затьмарює зорі, так і вчена людина затьмарює славу іншої у народних зібраннях, пропонуючи її розв'язуючи алгебраїчні задачі». В оригіналі це висловлено більш поетично, оскільки вся книга написана віршами. Задачам також надавали форми віршів. Наведемо одну з них у прозаїчному викладі.

Бджоли у числі, яке дорівнює квадратному кореню з половини всього їх рою, сіли на кущ жасмину, залишивши позаду $\frac{8}{9}$ рою. І тільки одна бджілка кружляє навколо лотоса. Її увагу привернуло дзижчання подруги, яка через необережність потрапила у пастку квітки з солодким запахом. Скільки усього було бджіл у рою?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Якщо позначити шукану чисельність рою через x, то рівняння матиме вигляд

$$\sqrt{\frac{x}{2}}+\frac{8}{9}x+2=x.$$

Ми можемо надати йому простішого вигляду, ввівши допоміжне невідоме

$$y=\sqrt{\frac{x}{2}}.$$

Тоді $x = 2y^2$, і рівняння набуде такого вигляду:

$$y + \frac{16y^2}{9} + 2 = 2y^2, \text{ або } 2y^2 - 9y - 18 = 0.$$

Розв'язавши його, одержимо два значення для y:

$$y_1 = 6, \; y_2 = -\frac{3}{2}.$$

Відповідні значення для x будуть такі:

$$x_1 = 72, \quad x_2 = 4{,}5.$$

Оскільки число бджіл повинно бути цілим і додатним, то задачу задовольняє тільки перший корінь: рій складався з 72 бджіл. Перевіримо:

$$\sqrt{\frac{72}{2}} + \frac{8}{9} \cdot 72 + 2 = 6 + 64 + 2 = 72.$$

Зграя мавп

ЗАДАЧА

Іншу індуську задачу наводимо у вигляді віршів, які увійшли до чудової книжки «Хто винайшов алгебру» В. І. Лебедєва.

На дві партії розбившись,
Мавпи бавилися в гаї.
Частка восьма їх в квадраті
Забавлялася, стрибала.
Криком радісним дванадцять
Тихе світло дня вітали.
А тепер скажи, юначе,
Скільки мавп було у гаї?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Якщо загальна кількість зграї x, то

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x,$$

звідки

$$x_1 = 48, \quad x_2 = 16.$$

Задача має два додатні розв'язки: у зграї могло бути 48 або 16 мавп. Обидві відповіді цілком задовольняють задачу.

Передбачливість рівнянь

У розглянутих випадках одержаними двома розв'язками рівнянь ми розпоряджалися по-різному в залежності від умови задачі. У першому випадку ми відкинули від'ємний корінь як такий, що не відповідає змісту задачі, у другому — відмовилися від дробового та від'ємного кореня, у третій задачі, навпаки, скористалися обома коренями. Існування другого розв'язку є іноді повною несподіванкою не тільки для того, хто розв'язав задачу, а навіть і для того, хто придумав її. Наведемо приклад, коли рівняння виявляється ніби більш передбачливе від того, хто його склав.

М'яч кинуто вгору з швидкістю 25 метрів за секунду. Через скільки секунд він буде на висоті 20 метрів над землею?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Для тіл, кинутих угору за умови відсутності опору повітря, механіка встановлює таке співвідношення між висотою піднімання тіла над землею h, початковою швидкістю v, прискоренням ваги g і часом t:

$$h = vt - \frac{gt^2}{2}.$$

Опором повітря ми можемо в даному випадку знехтувати, оскільки при незначних швидкостях він не такий великий. Заради спрощення приймемо, що g дорівнює не 9,8, а 10 метрів (помилка лише в 2%). Підставивши у наведену формулу значення h, v і g, одержимо рівняння

$$20 = 25t - \frac{10t^2}{2},$$

а після спрощення

$$t^2 - 5t + 4 = 0.$$

Розв'язавши рівняння, одержимо:

$$t_1 = 1 \text{ і } t_2 = 4.$$

М'яч буде на висоті 20 метрів два рази: через 1 секунду і через 4 секунди.

Це може, мабуть, видатися неймовірним, і, не подумавши, ми готові другий розв'язок відкинути. Однак так зробити було б помилкою! Другий розв'язок має повний сенс. М'яч повинен справді двічі побувати на висоті 20 метрів: один раз при підніманні і вдруге при зворотному падінні. Легко підрахувати, що м'яч при початковій швидкості 25 метрів за секунду повинен летіти вгору 2,5 секунди і залетіти на висоту 31,25 метра. Досягнувши через 1 секунду висоти 20 метрів, м'яч підніматиметься ще 1,5 секунди, потім стільки ж часу опускатиметься знову до рівня 20 метрів і через секунду досягне землі.

Задача Ейлера

Стендаль у «Автобіографії» розповідає таке про роки свого навчання:

«Я знайшов у нього (вчителя математики) Ейлера і його задачу про число яєць, які селянка несла на базар... Це було для мене відкриттям. Я зрозумів, що означає користуватися таким знаряддям, яке називається алгеброю. Але, хай йому чорт, ніхто мені про це не говорив...».

Ось ця задача з «Вступу до алгебри» Ейлера, яка справила на розум молодого Стендаля таке сильне враження.

Дві селянки принесли на базар разом 100 яєць, одна більше, ніж друга; обидві вторгували однакові суми. Перша мовила тоді другій: «Коли б у мене були твої яйця, я вторгувала б 15 крейцерів». Друга відповіла: «А якби твої яйця були у мене, я вторгувала б за них $6\frac{2}{3}$ крейцера». Скільки яєць було у кожної?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай у першої селянки x яєць, тоді у другої $100 - x$. Якби перша мала $100 - x$ яєць, то вона вторгувала б, ми знаємо, 15 крейцерів. Виходить, перша селянка продала яйця по

$$\frac{15}{100 - x}$$

за штуку.

У такий же спосіб знаходимо, що друга селянка продавала яйця по ціні

$$6\,\frac{2}{3} : x = \frac{20}{3x}$$

за штуку.

Тепер треба визначити дійсний виторг кожної селянки: першої —

$$x \cdot \frac{15}{100 - x} = \frac{15x}{100 - x},$$

другої —

$$(100 - x) \cdot \frac{20}{3x} = \frac{20\,(100 - x)}{3x}.$$

Оскільки виторги обох однакові, то

$$\frac{15x}{100 - x} = \frac{20\,(100 - x)}{3x}.$$

Після перетворень одержимо:

$$x^2 + 160x - 8000 = 0,$$

звідки

$$x_1 = 40, \quad x^2 = -200.$$

Від'ємний корінь у даному випадку не має змісту. У задачі лише один розв'язок: перша селянка принесла 40 яєць, отже, друга принесла 60 яєць.

Задачу можна розв'язати ще й іншим, більш коротким способом. Цей спосіб значно більш дотепний, зате відшукати його значно важче.

Припустимо, що друга селянка мала в k раз більше яєць, ніж перша. Вторгували вони однакові суми; це означає, що перша селянка продавала свої яйця у k раз дорожче, ніж друга. Коли б перед торгівлею вони помінялися яйцями, то перша селянка мала б у k раз більше яєць, ніж друга, і продавала б їх у k раз дорожче. Це означає, що вона вторгувала б у k^2 раз більше грошей, ніж друга. Отже, маємо:

$$k^2 = 15 : 6\frac{2}{3} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4}.$$

Звідси

$$k = \frac{3}{2}.$$

Тепер залишається 100 яєць поділити у співвідношенні 3 : 2. Легко знаходимо, що перша селянка мала 40, а друга 60 яєць.

Гучномовці

ЗАДАЧА

На майдані встановлено 5 гучномовців, розбитих на дві групи: в одній 2, у другій 3 апарати. Відстань між групами 50 метрів. Де треба стати, щоб звуки обох груп доносилися з однаковою силою?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Якщо відстань від шуканої точки до меншої групи позначимо через x, то відстань від неї до більшої групи буде $50 - x$ (рис. 18). Знаючи, що сила звука послаблюється пропорціонально квадратові відстані, одержуємо рівняння

$$\frac{2}{3} = \frac{x^2}{(50 - x)^2},$$

яке після спрощення зводиться до виду

$$x^2 + 200x - 5000 = 0.$$

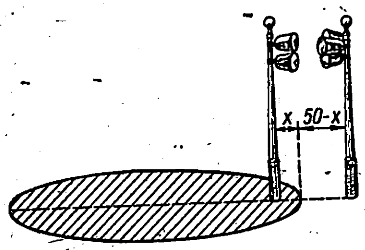


Рис. 18.

Розв'язавши його, одержимо два корені:

$$x_1 = 22{,}5,$$
$$x_2 = -222{,}5.$$

Додатний корінь прямо відповідає на запитання задачі: точка однакової чутності розташована на відстані 22,5 метра від двох гучномовців і, отже, на відстані 27,5 метра від трьох апаратів.

Однак що означає від'ємний корінь рівняння? Чи має він сенс?

Безперечно. Знак мінус означає, що друга точка однакової чутності розташована у напрямі, п р о т и л е ж н о м у тому, який було прийнято за додатний при складанні рівняння.

Відклавши від місцезнаходження двох апаратів у потрібному напрямі 222,5 метра, знайдемо точку, куди звуки обох груп апаратів долинають з однаковою силою. Від групи з трьох апаратів ця точка віддалена на $222{,}5 + 50 = 272{,}5$ метра.

Отже, ми відшукали дві точки однакової чутності,— з тих, що знаходяться на прямій, яка з'єднує джерела звука. Інших таких точок на цій лінії немає, але вони є поза нею. Можна довести, що геометричне місце точок, які задовольняють вимогу нашої задачі, є коло, проведене через щойно знайдені точки, як через кінці діаметра. Це коло обмежує, як бачимо, досить велику ділянку (заштриховану на рисунку), всередині якої чутність групи двох гучномовців пересилює чутність групи трьох апаратів, а за межами цього кола спостерігається зворотне явище.

Алгебра місячного перельоту

Точно таким способом, яким ми знайшли точки однакової чутності двох систем гучномовців, можна знайти і точки однакового тяжіння космічної ракети двома небесними тілами — Землею та Місяцем. Відшукаємо ці точки.

За законом Ньютона, сила взаємного притягання двох тіл прямо пропорціональна добуткові мас, які притягуються, і обернено пропорціональна квадратові відстані між ними. Якщо маса Землі M, а відстань ракети від неї x, то сила, з якою Земля притягує кожний грам ракети, становить

$$\frac{Mk}{x^2},$$

де k — сила взаємного притягання одного грама одним грамом на відстані 1 сантиметра.

Сила, з якою Місяць притягує кожний грам ракети у тій же точці, становить

$$\frac{mk}{(l - x)^2},$$

де m — маса Місяця, а l — його відстань від Землі (припускається, що ракета перебуває між Землею та Місяцем на прямій лінії, яка з'єднує їх центри). За вимогою задачі треба, щоб

$$\frac{Mk}{x^2} = \frac{mk}{(l - x)^2}$$

або

$$\frac{M}{m} = \frac{x^2}{l^2 - 2lx + x^2}.$$

Відношення $\frac{M}{m}$, як відомо з астрономії, наближено дорівнює 81,5. Після підстановки одержуємо

$$\frac{x^2}{l^2 - 2lx + x^2} = 81{,}5,$$

звідки

$$80{,}5x^2 - 163{,}0lx + 81{,}5l^2 = 0.$$

Розв'язавши рівняння відносно x, одержимо:

$$x_1 = 0{,}9l, \qquad x_2 = 1{,}12l.$$

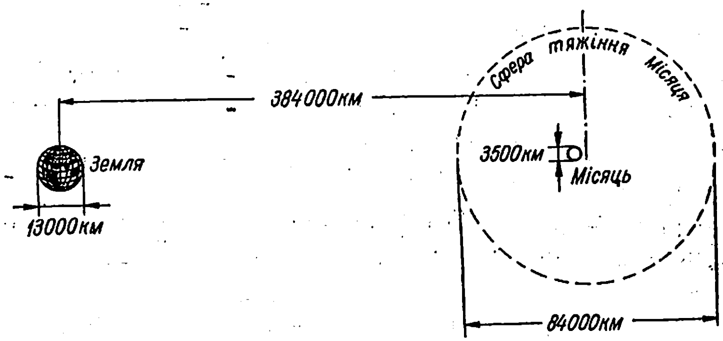


Рис. 19.

Як і в задачі про гучномовці, ми приходимо до висновку, що на лінії Земля — Місяць існують дві шукані точки — дві точки, де ракета повинна однаково притягуватися обома світилами; одна на 0,9 відстані між ними, рахуючи від центра Землі, друга — на 1,12 тієї ж відстані. Оскільки відстань l між центрами Землі та Місяця приблизно дорівнює 384 000 кілометрів, то одна з шуканих точок віддалена від центра Землі на 346 000 кілометрів, а друга — на 430 000 кілометрів.

Однак ми знаємо (див. попередню задачу), що ту ж властивість мають і всі точки кола, яке проходить через знайдені дві точки як через кінці діаметра. Якщо обертати це коло навколо лінії, яка з'єднує центри Землі та Місяця, то воно опише кульову поверхню, усі точки якої задовольняють вимоги задачі.

Діаметр цієї кулі, яка називається **сферою тяжіння** Місяця (рис. 19), становить

$$1{,}12l - 0{,}9l = 0{,}22l \approx 84\,000 \text{ кілометрів.}$$

Існує помилкова думка, нібито для потрапляння ракетою у Місяць досить потрапити у сферу її тяжіння. На перший погляд здається, що коли ракета виявиться всередині цієї сфери (маючи не дуже значну швидкість), то вона неминуче повинна буде впасти на поверхню Місяця, оскільки сила тяжіння Місяця у цій області «переборює» силу тяжіння Землі. Коли б це було так, то задача польоту до Місяця стала б значно легшою, оскільки треба було б цілитися не у самий Місяць, поперечник якого видно на небі під кутом $1/2°$, а в кулю діаметром 84 000 кілометрів, кутовий розмір якої дорівнює 12°.

Однак неважко показати помилковість подібних міркувань.

Припустимо, що запущена з Землі ракета, яка безперервно втрачає свою швидкість внаслідок земного тяжіння, виявилася всередині сфери тяжіння Місяця, маючи нульову швидкість. Чи впаде вона тепер на Місяць? Ні в якому разі!

По-перше, і всередині сфери тяжіння Місяця продовжує діяти земне тяжіння. Тому осторонь від лінії Земля— Місяць сила тяжіння Місяця не буде просто «переборювати» силу тяжіння Землі, а додаватиметься до неї за правилом паралелограма сил і даватиме рівнодіючу, спрямовану зовсім не прямо до Місяця (тільки на лінії Земля — Місяць ця рівнодіюча була б спрямована до центра Місяця).

По-друге (і це найголовніше), самий Місяць не є нерухомою ціллю, і якщо ми хочемо знати, як рухатиметься у відношенні до нього ракета (чи не буде вона «падати» на Місяць), то треба врахувати швидкість ракети відносно Місяця. А ця швидкість зовсім не дорівнює нулю, бо самий Місяць рухається навколо Землі із швидкістю 1 кілометр за секунду. Тому швидкість руху ракети відносно Місяця надто велика для того, щоб Місяць міг притягнути до себе ракету або хоч би утримати її у своїй сфері притягання як штучного супутника.

Фактично тяжіння Місяця починає чинити істотний вплив на рух ракети ще до того, як ракета наблизиться до сфери тяжіння Місяця. У небесній балістиці прийнято враховувати тяжіння Місяця з моменту, коли ракета потрапить усередину так званої **сфери дії Місяця** радіусом 66 000 кілометрів. При цьому вже можна розглядати рух ракети відносно Місяця, цілком забуваючи про земне тяжіння, але точно враховуючи ту швидкість (відносно Місяця), з якою ракета заходить у сферу дії. Природно тому, що ракету доводиться відсилати до Місяця по такій траєкторії, щоб швидкість (відносно Місяця) заходження у сферу дії була спрямована прямо на Місяць. Для цього сфера дії Місяця повинна поширюватися на ракету, яка рухається їй навперейми. Як бачимо, потрапляння в Місяць виявляється не такою простою справою, як потрапляння у кулю діаметром 84 000 кілометрів.

«Важка задача»

Картина Богданова-Бельського «Важка задача» відома багатьом, але мало хто з тих, що бачили цю картину, заглиблювався у зміст тієї «важкої задачі», яку на ній зображено. Вона полягає в тому, щоб рахуючи усно, швидко знайти результат обчислення:

$$\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}.$$

Задача і справді нелегка. З нею, однак, добре вправлялися учні того вчителя, який із збереженням портретної схожості зображений на картині, саме С. А. Рачинського, професора природничих наук, який залишив університетську кафедру, щоб стати рядовим учителем сільської школи. Талановитий педагог культивував у своїй школі усну лічбу, яка грунтується на віртуозному використанні властивостей чисел. Числа 10, 11, 12, 13 і 14 мають цікаву особливість: $10^2+11^2+12^2=13^2+$ $+14^2$.

Оскільки $100+121+144=365$, то легко підрахувати усно, що зображений на картині вираз дорівнює 2.

Алгебра дає нам можливість поставити питання про цю цікаву особливість ряду чисел більш широко: чи єдиний цей ряд з п'яти послідовних чисел, сума квадратів перших трьох з яких дорівнює сумі квадратів двох останніх?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Позначаючи перше з шуканих чисел через x, маємо рівняння

$$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=(x+3)^2+(x+4)^2.$$

Зручніше, однак, позначити через x не перше, а другe з шуканих чисел. Тоді рівняння буде мати простіший вигляд:

$$(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=(x+2)^2+(x+3)^2.$$

Рис. 20.

Розкриваючи дужки і роблячи спрощення, одержуємо:

$$x^2-10x-11=0,$$

звідки

$$x=5\pm\sqrt{25+11},\quad x_1=11,\quad x_2=-1.$$

Існують, отже, два ряди чисел, які мають таку властивість: ряд Рачинського

$$10, 11, 12, 13, 14$$

і ряд

$$-2, -1, 0, 1, 2.$$

Справді,

$$(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 = 1^2 + 2^2.$$

Які числа?

ЗАДАЧА

Знайти три послідовних числа, у яких квадрат середнього на 1 більше від здобутку двох інших.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Якщо перше з шуканих чисел x, то рівняння має вигляд

$$(x + 1)^2 = x(x + 2) + 1.$$

Розкривши дужки, одержимо рівність,

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2x + 1,$$

з якої не можна визначити величину x. Це показує, що складена нами рівність є тотожність; вона справедлива при будь-якому значенні літери, що входить до неї, а не при деяких лише, як у випадку рівняння. Виходить, що будь-які три послідовних числа мають потрібну властивість. Справді, візьмемо наугад числа

$$17, 18, 19.$$

Ми переконаємось, що

$$18^2 - 17 \cdot 19 = 324 - 323 = 1.$$

Необхідність такого співвідношення виступає наочніше, якщо позначити через x друге число. Тоді одержимо рівність

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1),$$

тобто очевидну тотожність.

РОЗДІЛ VII

НАЙБІЛЬШІ І НАЙМЕНШІ ЗНАЧЕННЯ

Вміщувані у цьому розділі задачі належать до дуже цікавого роду задач на відшукання найбільшого і найменшого значення деякої величини. Їх можна розв'язувати різними способами, один з яких ми зараз покажемо.

Російський математик П. Л. Чебишев у своїй праці «Креслення географічних карт» писав, що особливо важливі ті методи науки, які дають можливість розв'язувати задачу, загальну для всієї практичної діяльності людини: як використовувати засоби свої для досягнення якомога більшої вигоди.

Два поїзди

ЗАДАЧА

Дві залізничних колії схрещуються під прямим кутом. До місця схрещення одночасно мчать два поїзди: один із станції, яка знаходиться на відстані 40 кілометрів від схрещення, другий із станції, розташованої на відстані 50 кілометрів від того ж місця схрещення. Перший поїзд за хвилину проходить 800 метрів, а другий — 600 метрів.

Через скільки хвилин, рахуючи від моменту відправлення, поїзди були у найменшій взаємній відстані? Яка величина цієї відстані?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Накреслимо схему руху поїздів нашої задачі. Нехай прямі AB і CD — колії, що схрещуються (рис. 21). Станція B розташована на відстані 40 кілометрів від точки схрещення O, а станція D — на відстані 50 кілометрів від неї. Припустимо, що через x хвилин поїзди будуть у найкоротшій взаємній відстані один від одного $MN = m$.

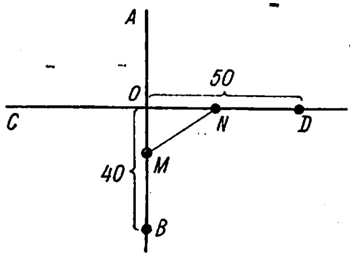


Рис. 21.

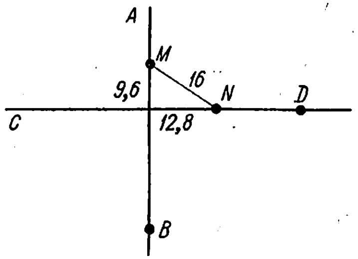


Рис. 22.

Поїзд, який вийшов з B, встиг до цього моменту пройти шлях $BM = 0{,}8x$, оскільки за хвилину він проходить 800 метрів $= 0{,}8$ кілометра. Таким чином, $OM = 40 - 0{,}8x$. Точно так само знаходимо, що $ON = 50 - 0{,}6x$. Зе теоремою Піфагора

$$MN = m = \sqrt{\overline{OM}^2 + \overline{ON}^2} = \sqrt{(40 - 0{,}8x)^2 + (50 - 0{,}6x)^2}.$$

Підносячи до квадрата обидві частини рівняння

$$m = \sqrt{(40 - 0{,}8x)^2 + (50 - 0{,}6x)^2}$$

і робляючи спрощення, одержуємо

$$x^2 - 124x + 4100 - m^2 = 0.$$

Розв'язавши це рівняння відносно x, одержимо

$$x = 62 \pm \sqrt{m^2 - 256}.$$

Оскільки x — число хвилин, що минули,— не може бути уявним, то $m^2 - 256$ повинно бути величиною додатною або у крайньому випадку дорівнювати нулеві. Основне значення відповідає найменшому можливому значенню m, і тоді

$$m^2 = 256, \text{ тобто } m = 16.$$

Очевидно, що m менше від 16 бути не може, інакше x стає уявним. А якщо $m^2 - 256 = 0$, то $x = 62$.

Отже, поїзди будуть найближче один до одного через 62 хвилини, і взаємне їх віддалення становитиме 16 кілометрів.

Визначимо, як вони в цей момент розташовані. Обчислимо довжину OM:

$$40 - 62 \cdot 0{,}8 = -9{,}6.$$

Знак мінус означає, що поїзд пройде за схрещення на 9,6 кілометра. Відстань же ON дорівнює

$$50 - 62 \cdot 0{,}6 = 12{,}8,$$

тобто другий поїзд не дійде до схрещення на 12,8 кілометра. Розташування поїздів показано на рис. 22. Як бачимо, воно зовсім не таке, як ми уявляли собі до розв'язування задачі. Рівняння виявилося досить стерпним і, незважаючи на неправильну схему, дало правильний розв'язок. Неважко зрозуміти, звідки ця стерпність: вона обумовлена алгебраїчними правилами знаків.

Де влаштувати полустанок?

ЗАДАЧА

Осторонь від прямолінійної ділянки залізничної колії, на відстані 20 кілометрів від неї, розташоване селище B (рис. 23). Де слід влаштувати полустанок C, щоб на проїзд від пункту A до селища B по залізниці AC і по шосе CB витратити якомога менше часу? Швидкість руху залізницею 0,8, а по шосе — 0,2 кілометра за хвилину.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Позначимо відстань AD (від A до основи перпендикуляра BD до AD) через a, CD через x. Тоді $AC = AD -$

$- CD = a - x$, а $CB = \sqrt{CD^2 + BD^2} = \sqrt{x^2 + 20^2}$. Час, протягом якого поїзд проходить шлях AC, дорівнює

$$\frac{AC}{0,8} = \frac{a - x}{0,8}.$$

Час на проїзд шляху CB по шосе становить

$$\frac{CB}{0,2} = \frac{\sqrt{x^2 + 20^2}}{0,2}.$$

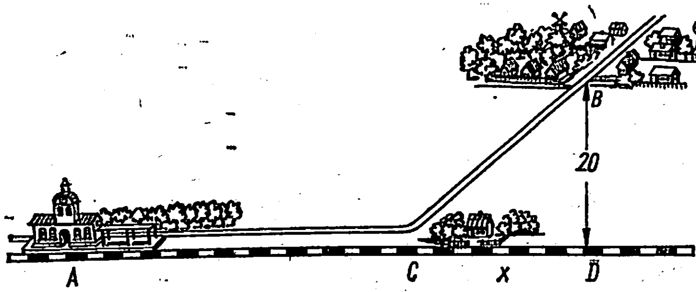


Рис. 23.

Загальна тривалість переїзду від A до B становить

$$\frac{a - x}{0,8} + \frac{\sqrt{x^2 + 20^2}}{0,2}.$$

Ця сума, яку позначимо через m, повинна бути найменшою.

Рівняння

$$\frac{a - x}{0,8} + \frac{\sqrt{x^2 + 20^2}}{0,2} = m$$

подамо у вигляді

$$-\frac{x}{0,8} + \frac{\sqrt{x^2 + 20^2}}{0,2} = m - \frac{a}{0,8}.$$

Помноживши на 0,8, одержимо:

$$-x + 4\sqrt{x^2 + 20^2} = 0,8m - a.$$

Позначивши $0,8m - a$ через k і звільнившись від радикала, одержимо квадратне рівняння

$$15x^2 - 2kx + 6400 - k^2 = 0,$$

звідки

$$x = \frac{k \pm \sqrt{16k^2 - 96\,000}}{15}.$$

Оскільки $k = 0,8m - a$, то при найменшому значенні m досягає найменшої величини і k, і навпаки*. Однак щоб x було дійсним, $16k^2$ повинно бути не меншим від 96 000. Виходить, що найменша величина для $16k^2$ є 96 000. Тому m стає найменшим, коли

$$16k^2 = 96\,000,$$

звідки

$$k = \sqrt{6000},$$

і, отже,

$$x = \frac{k \pm 0}{15} = \frac{\sqrt{6000}}{15} \approx 5,16.$$

Полустанок треба спорудити на відстані приблизно 5 кілометрів від точки D, якою не була б довжина $a = AD$.

Однак зрозуміло, наш розв'язок має сенс тільки для випадків, коли $x < a$, оскільки, складаючи рівняння, ми вважали $a - x$ числом додатним.

Якщо $x = a \approx 5,16$, то полустанка взагалі будувати не треба; доведеться вести шосе прямо на станцію. Так само треба робити і в тих випадках, коли відстань a коротша від 5,16 кілометра.

Цього разу ми виявляємося передбачливіші, ніж рівняння. Коли б ми сліпо довірилися рівнянню, нам довелося б побудувати полустанок за станцією, що було б явним безглуздям; у цьому випадку $x > a$, і тому час

$$\frac{a - x}{0,8},$$

протягом якого треба їхати залізницею, від'ємний. Випадок повчальний; він показує, що при користуванні математичним знаряддям треба дуже обережно ставитися до одержуваних результатів, пам'ятаючи, що вони можуть втратити реальний зміст, якщо не виконано передумов, на яких грунтувалося застосування нашого математичного знаряддя.

* Слід мати на увазі, що $k > 0$, оскільки

$$0,8m = a - x + 4\sqrt{x^2 + 20^2} > a - x + x = a.$$

5+3/4*

Як прокласти шосе?

ЗАДАЧА

З міста A, розташованого на річці, треба відправляти вантажі до пункту B, розташованого на a кілометрів нижче по річці і на відстані d кілометрів від берега (рис. 24). Як прокласти шосе від B до річки, щоб перевезення вантажів від міста A до пункту B обходилося якомога дешевше, якщо плата за перевезення одного тонно-кілометра річкою вдвічі менша, ніж по шосе?

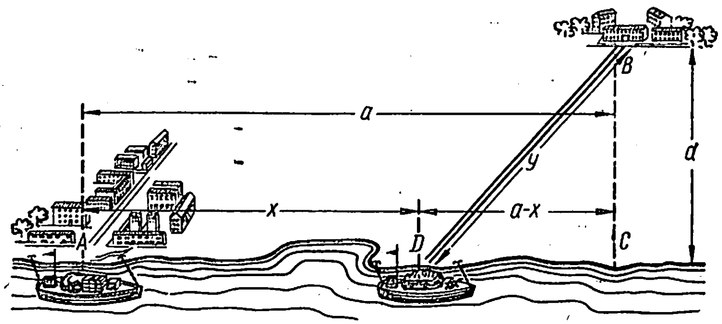


Рис. 24.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Позначимо відстань AD через x, а довжину DB шосе — через y. За припущенням, довжина AC дорівнює a, а довжина BC дорівнює d.

Оскільки перевезення по шосе вдвічі дорожче, ніж річкою, то сума

$$x + 2y$$

згідно з вимогою задачі повинна бути найменшою. Позначимо це найменше значення через m. Одержимо рівняння

$$x + 2y = m.$$

Однак $x = a - DC$, а $DC = \sqrt{y^2 - d^2}$; наше рівняння набуває вигляду

$$a - \sqrt{y^2 - d^2} + 2y = m,$$

або після звільнення від радикала

$$3y^2 - 4(m - a)y + (m - a)^2 + d^2 = 0.$$

Розв'язуємо його:

$$y = \frac{2}{3}(m - a) \pm \frac{\sqrt{(m - a)^2 - 3d^2}}{3}.$$

Для того щоб y було дійсним, $(m - a)^2$ має бути не меншим від $3d^2$. Найменше значення $(m - a)^2$ дорівнює $3d^2$, тоді

$$m - a = d\sqrt{3}, \quad y = \frac{2(m - a) + 0}{3} = \frac{2d\sqrt{3}}{3};$$

$$\sin \angle BDC = d{:}y, \text{ тобто}$$

$$\sin \angle BDC = \frac{d}{y} = d : \frac{2d\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Однак кут, синус якого дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{2}$, становить 60°. Отже, шосе треба прокласти під кутом 60° до річки, якою не була б відстань AC.

Тут ми натрапляємо знову на ту саму особливість, з якою зустрілися у попередній задачі. Розв'язок має сенс тільки за певної умови. Якщо пункт розташований так, що шосе, прокладене під кутом 60° до річки, пройде по той бік міста A, то розв'язок незастосовний. У такому випадку треба безпосередньо зв'язати пункт B з містом A за допомогою шосе, зовсім не користуючись річкою для перевезення.

Коли добуток найбільший?

Для розв'язування багатьох задач «на максимум і мінімум», тобто на відшукання найбільшого і найменшого значень перемінної величини, можна успішно користуватися однією алгебраїчною теоремою, з якою ми зараз познайомимось. Розглянемо таку задачу.

На які дві частини треба розбити число, щоб добуток їх був найбільшим?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай дано число a. Тоді частини, на які розбито число a, можна позначити через

$$\frac{a}{2}+x \text{ і } \frac{a}{2}-x.$$

Число x показує, на яку величину ці частини відрізняються від половини числа a. Добуток обох частин дорівнює

$$\left(\frac{a}{2}+x\right)\left(\frac{a}{2}-x\right)=\frac{a^2}{4}-x^2.$$

Зрозуміло, що добуток взятих частин буде збільшуватися при зменшенні x — різниці між цими частинами. Найбільшим добуток буде при $x=0$, тобто у випадку, коли обидві частини дорівнюватимуть $\frac{a}{2}$.

Отже, число треба поділити п о п о л а м; добуток двох чисел, сума яких незмінна, буде найбільшим тоді, коли ці числа дорівнюватимуть одне одному.

Розглянемо те саме питання для т р ь о х чисел.

На які три частини треба розбити дане число, щоб добуток їх був найбільшим?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

При розв'язуванні цієї задачі будемо спиратися на попередню.

Нехай число a розбито на три частини. Припустимо спочатку, що жодна з частин не дорівнює $\frac{a}{3}$. Тоді серед них знайдеться частина, більша від $\frac{a}{3}$ (всі три не можуть бути меншими від $\frac{a}{3}$); позначимо її через

$$\frac{a}{3}+x.$$

Точно так само серед них знайдеться частина, менша від $\frac{a}{3}$; позначимо її через

$$\frac{a}{3}-y.$$

Числа x і y додатні. Третя частина, очевидно, дорівнюватиме

$$\frac{a}{3}+y-x.$$

Числа $\frac{a}{3}$ і $\frac{a}{3}+x-y$ мають ту саму суму, що й перші дві частини числа a, а різниця між ними, тобто $x-y$, менша, ніж різниця між першими двома частинами, яка дорівнювала $x+y$. Як ми знаємо з розв'язання попередньої задачі, звідси виходить, що добуток

$$\frac{a}{3}\left(\frac{a}{3}+x-y\right)$$

більший, ніж добуток перших двох частин числа a.

Отже, якщо перші дві частини числа a замінити числами

$$\frac{a}{3} \text{ і } \frac{a}{3}+x-y,$$

а третю залишити без зміни, то добуток збільшиться.

Нехай тепер одна з частин вже дорівнює $\frac{a}{3}$. Тоді дві інші матимуть вигляд

$$\frac{a}{3}+z \quad \text{і} \quad \frac{a}{3}-z.$$

Якщо ми ці дві останні частини зробимо рівними $\frac{a}{3}$ (від чого сума їх не зміниться), то добуток знову збільшиться і буде дорівнювати

$$\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}=\frac{a^3}{27}.$$

Отже, якщо число a розбите на 3 частини, які не дорівнюють одна одній, то добуток цих частин менший від $\frac{a^3}{27}$, тобто від добутку трьох р і в н и х співмножників, які у сумі дорівнюють a.

Подібним способом можна довести цю теорему і для ч о т и р ь о х множників, для п ' я т и і т. д.

Розглянемо тепер більш загальний випадок.

Знайти, при яких значеннях x і y вираз $x^p y^q$ найбільший, якщо $x+y=a$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Треба знайти, при якому значенні x вираз

$$x^p(a-x)^q$$

досягає найбільшої величини.

Помножимо цей вираз на число $\frac{1}{p^pq^q}$. Одержимо новий вираз

$$\frac{x^p}{p^p}\cdot\frac{(a-x)^q}{q^q},$$

який, очевидно, досягає найбільшої величини тоді ж, коли і початковий.

Подамо одержаний щойно вираз у вигляді

$$\underbrace{\frac{x}{p}\cdot\frac{x}{p}\cdot\frac{x}{p}\cdot\frac{x}{p}\cdots}_{p\text{ раз}}\underbrace{\frac{a-x}{q}\cdot\frac{a-x}{q}\cdot\frac{a-x}{q}\cdots}_{q\text{ раз}}$$

Сума всіх множників цього виразу дорівнює

$$\underbrace{\frac{x}{p}+\frac{x}{p}+\frac{x}{p}+\cdots}_{p\text{ раз}}+\underbrace{\frac{a-x}{q}+\frac{a-x}{q}+\cdots}_{q\text{ раз}}=$$

$$=\frac{px}{p}+\frac{q(a-x)}{q}=x+a-x=a,$$

тобто величині сталій.

На основі раніше доведеного (стор. 139—140) робимо висновок, що здобуток

$$\frac{x}{p}\cdot\frac{x}{p}\cdot\frac{x}{p}\cdots\frac{a-x}{q}\cdot\frac{a-x}{q}\cdot\frac{a-x}{q}\cdots$$

досягає максимуму при рівності всіх його окремих множників, тобто тоді, коли

$$\frac{x}{p}=\frac{a-x}{q}.$$

Знаючи, що $a-x=y$, переставивши члени, одержуємо пропорцію

$$\frac{x}{y}=\frac{p}{q}.$$

Отже, здобуток x^py^q при сталій сумі $x+y$ досягає найбільшої величини тоді, коли

$$x:y=p:q.$$

Так само можна довести, що здобутки

$$x^py^qz^r,\quad x^py^qz^rt^u \text{ і т. п.}$$

при сталих сумах $x+y+z$, $x+y+z+t$ і т. д. досягають найбільшої величини тоді, коли

$$x:y:z=p:q:r,\quad x:y:z:t=p:q:r:u \text{ і т. д.}$$

Коли сума найменша?

Читач, який бажає випробувати свої сили на доведенні корисних алгебраїчних теорем, нехай доведе сам такі положення:

1. Сума двох чисел, здобуток яких незмінний, стає найменшою, коли ці числа рівні.

Наприклад, для добутку 36: $4+9=13$, $3+12=15$, $2+18=20$, $1+36=37$ і, нарешті, $6+6=12$.

2. Сума кількох чисел, добуток яких незмінний, стає найменшою, коли ці числа рівні.

Наприклад, для добутку 216: $3+12+6=21$, $2+18+6=26$, $9+6+4=19$, проте $6+6+6=18$.

На ряді прикладів покажемо, як застосовуються на практиці ці теореми.

Брус найбільшого об'єму

ЗАДАЧА

З циліндричної колоди треба випиляти прямокутний брус найбільшого об'єму. Якої форми повинен бути його переріз (рис. 25)?

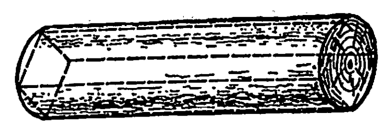


Рис. 25.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Якщо сторони прямокутного перерізу x і y, то за теоремою Піфагора

$$x^2+y^2=d^2,$$

де d — діаметр колоди. Об'єм бруса найбільший, коли площа його перерізу найбільша, тобто коли xy досягає найбільшої величини. А якщо xy найбільше, то найбільшим буде і добуток x^2y^2. Оскільки сума x^2+y^2 незмінна, то, згідно з доведеним раніше, добуток x^2y^2 найбільший, коли

$$x^2=y^2 \text{ або } x=y.$$

Отже, переріз бруса повинен бути **квадратним**.

Дві земельні ділянки

ЗАДАЧА

1. Якої форми повинна бути прямокутна ділянка даної площі, щоб довжина огорожі, яка її обмежує, була найменшою?

2. Якої форми повинна бути прямокутна ділянка, щоб при даній довжині огорожі площа її була найбільшою?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1. Форма прямокутної ділянки визначається співвідношенням її сторін x і y. Площа ділянки з сторонами x і y дорівнює xy, а довжина огорожі становить $2x+2y$. Довжина огорожі буде найменшою, якщо $x+y$ досягне найменшої величини.

При постійному добутку xy сума $x+y$ найменша у випадку рівності $x=y$. Отже, шуканий прямокутник — квадрат.

2. Якщо x і y — сторони прямокутника, то довжина огорожі становить $2x+2y$, а площа xy. Цей добуток буде найбільшим тоді, коли і добуток $4xy$, тобто $2x \cdot 2y$; останній же добуток при постійній сумі його множників $2x+2y$ стає найбільшим при $2x=2y$, тобто коли ділянка має форму квадрата.

До відомих нам з геометрії властивостей квадрата ми можемо, таким чином, додати ще й таке: з усіх прямокутників він має найменший периметр при даній площі і найбільшу площу при даному периметрі.

Паперовий змій

ЗАДАЧА

Змію, який має форму кругового сектора, бажають надати такої форми, щоб він вміщував у даному периметрі найбільшу площу. Якою повинна бути форма сектора?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Уточнюючи вимогу задачі, ми повинні відшукати, при якому співвідношенні довжини дуги сектора і його радіуса площа його досягає найбільшої величини при даному периметрі.

Якщо радіус сектора x, а дуга y, то його периметр l і площа S матимуть такий вигляд (рис. 26):

$$l=2x+y,$$

$$S=\frac{xy}{2}=\frac{x(l-2x)}{2}.$$

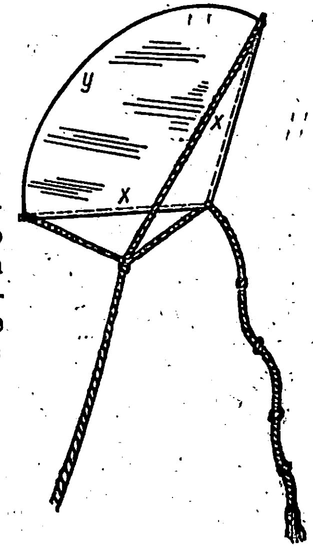


Рис. 26.

Величина S досягає максимуму при тому ж значенні x, що і здобуток $2x(l-2x)$, тобто учетверо більшій площі. Оскільки сума множників $2x+(l-2x)$, $=l$ є величина стала, то здобуток їх буде найбільший, коли $2x=l-2x$ звідки

$$x=\frac{l}{4},$$

$$y=l-2\cdot\frac{l}{4}=\frac{l}{2}.$$

Отже, сектор при даному периметрі має найбільшу площу в тому випадку, коли його радіус становить половину дуги (тобто довжина його дуги дорівнює сумі радіусів або довжина кривої частини його периметра дорівнює довжині ламаної). Кут сектора дорівнює приблизно 115° — двом радіанам. Які льотні якості такого широкого змія — питання інше, розгляд якого не входить до нашої задачі.

Спорудження будинку

ЗАДАЧА

На місці зруйнованого будинку, від якого збереглася одна стіна, бажають побудувати новий. Довжина стіни, що збереглася,— 12 метрів. Площа нового будинку повинна становити 112 квадратних метрів. Господарські умови роботи такі:

1) ремонт погонного метра стіни коштує 25% вартості кладки нової;

2) розбирання погонного метра старої стіни і кладка з одержаного матеріалу нової стіни коштує 50% того, чого коштує побудування погонного метра стіни з нового матеріалу.

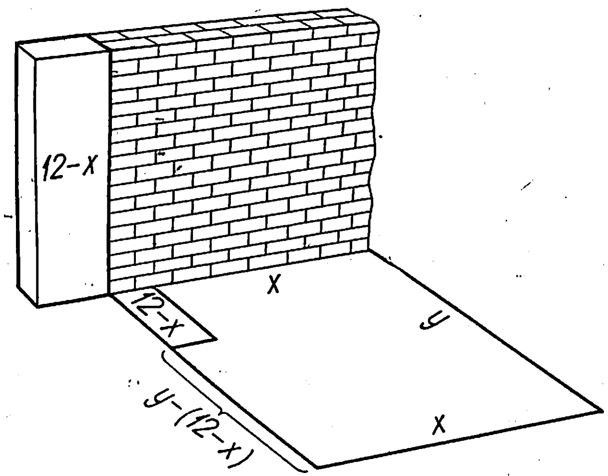


Рис. 27.

Як за таких умов найвигідпішим способом використати стіну, що збереглася?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай від колишньої стіни зберігається x метрів, а інші $12 - x$ метрів розбираються, щоб з одержаного матеріалу побудувати заново частину стіни нового будинку (рис. 27). Якщо вартість кладки погонного метра стіни з нового матеріалу дорівнює a, то ремонт x метрів старої стіни коштуватиме $\frac{ax}{4}$; спорудження ділянки довжиною $12 - x$ коштуватиме $\frac{a(12-x)}{2}$; вартість іншої частини цієї стіни становитиме $a[y - (12 - x)]$, тобто

$(ay + x - 12)$; третя стіна коштуватиме ax, четверта ay. Вартість усієї роботи буде

$$\frac{ax}{4} + \frac{a(12-x)}{2} + a(y + x - 12) + ax + ay =$$
$$= \frac{a(7x + 8y)}{4} - 6a.$$

Цей вираз досягає найменшої величини тоді, коли й сума

$$7x + 8y.$$

Ми знаємо, що площа будинку xy дорівнює 112; отже,

$$7x \cdot 8y = 56 \cdot 112.$$

При постійному здобутку сума $7x + 8y$ досягає найменшої величини тоді, коли

$$7x = 8y,$$

звідки

$$y = \frac{7}{8}x.$$

Підставляючи цей вираз для y у рівняння

$$xy = 112,$$

одержуємо

$$\frac{7}{8}x^2 = 112, \quad x = \sqrt{128} \approx 11{,}3.$$

А оскільки довжина старої стіни 12 метрів, то розібрати треба тільки 0,7 метра цієї стіни.

Дачна ділянка

ЗАДАЧА

При будуванні дачі треба було відгородити дачну ділянку. Матеріалу мали на l погонних метрів огорожі. Крім того, можна було скористатися раніше збудованим парканом (як однією з сторін ділянки). Як за цих умов відгородити прямокутну ділянку найбільшої площі?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай довжина ділянки (по паркану) дорівнює x, а ширина (тобто розмір ділянки у напрямі, перпендикулярному до паркану) дорівнює y (рис. 28). Тоді для обгороджування цієї ділянки потрібно $x + 2y$ метрів огорожі, отже,

$$x + 2y = l.$$

Площа ділянки дорівнює

$$S = xy = y(l - 2y).$$

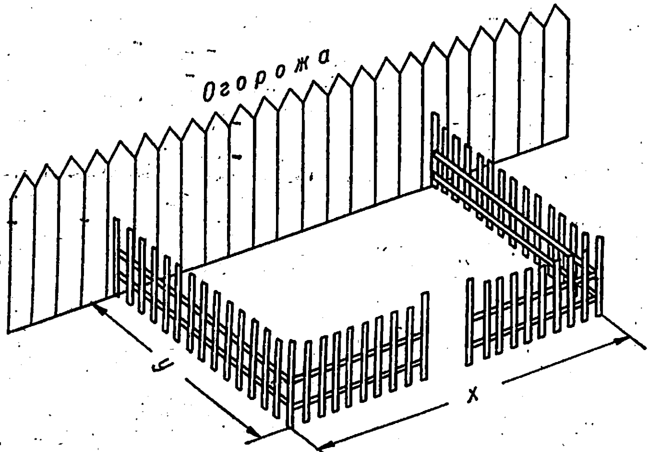


Рис. 28.

Вона набуває найбільшого значення одночасно з величиною

$$2y(l - 2y)$$

(подвоєною площею), яка є добутком двох множників з постійною сумою l. Тому для досягнення найбільшої площі повинно бути

$$2y = l - 2y,$$

звідки

$$y = \frac{l}{4}, \quad x = l - 2y = \frac{l}{2}.$$

Інакше кажучи, $x = 2y$, тобто довжина ділянки повинна бути вдвічі більша від її ширини.

Жолоб найбільшого перерізу

ЗАДАЧА

Прямокутний металевий лист (рис. 29) треба зігнути жолобом з перерізом у формі рівнобічної трапеції. Це можна зробити різними способами, як видно з рис. 30.

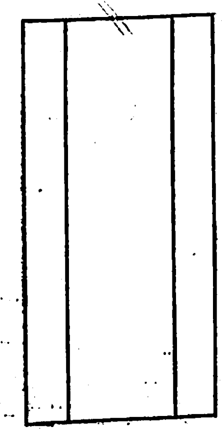


Рис. 29.

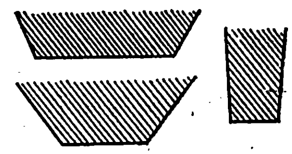


Рис. 30.

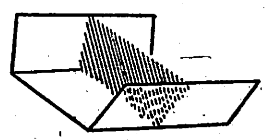


Рис. 31.

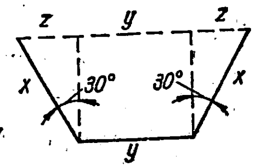


Рис. 32.

Якими завширшки повинні бути бічні смуги і під яким кутом їх треба відігнути, щоб переріз жолоба мав найбільшу площу (рис. 31)?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай ширина листа l. Ширину смуг, які треба відігнути, позначимо через x, а ширину дна жолоба — через y. Введемо ще одне невідоме z, значення якого показано на рис. 32.

Площа трапеції, яка є перерізом жолоба,

$$S = \frac{(z + y + z) + y}{2}\sqrt{x^2 - z^2} = \sqrt{(y + z)^2 (x^2 - z^2)}.$$

Задача зводиться до визначення тих значень x, y, z, при яких S досягає найбільшої величини. При цьому сума $2x + y$ (тобто ширина листа) зберігає постійну величину l. Робимо перетворення:

$$S^2 = (y + z)^2(x + z)(x - z).$$

Величина S^2 стає найбільшою при тих же значеннях x, y, z, що і $3S^2$; останню можна зобразити у вигляді добутку

$$(y+z)(y+z)(x+z)(3x-3z).$$

Сума цих чотирьох множників

$$y+z+y+z+x+z+3x-3z=2l,$$

тобто незмінна. Тому добуток наших чотирьох множників максимальний, коли вони дорівнюють один одному, тобто

$$y+z=x+z \text{ і } x+z=3x-3z.$$

З першого рівняння маємо:

$$y=x,$$

а оскільки $y+2x=l$, то $x=y=\frac{l}{3}$.

З другого рівняння знаходимо:

$$z=\frac{x}{2}=\frac{l}{6}.$$

Далі, оскільки катет z дорівнює половині гіпотенузи x (рис. 32), то протилежний цьому катетові кут дорівнює 30°, а кут нахилу боків жолоба до дна дорівнює $90° + 30° = 120°$.

Отже, жолоб матиме найбільший переріз, коли грані його будуть зігнуті у формі трьох суміжних сторін правильного шестикутника.

Лійка найбільшої місткості

ЗАДАЧА

З жерстяного круга треба виготовити конічну частину лійки. Для цього у крузі вирізують сектор, а другу частину круга згортають конусом (рис. 33). Скільки градусів повинно бути в дузі вирізуваного сектора, щоб вийшов конус найбільшої місткості?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Довжину дуги тієї частини круга, яка згортається у конус, позначимо через x (у лінійних мірах). Отже, твір-

ною конуса буде радіус R жерстяного круга, а коло основи дорівнюватиме x. Радіус основи конуса знаходимо з рівності

$$2\pi r=x, \text{ звідки } r=\frac{x}{2\pi}.$$

Висота конуса (за теоремою Піфагора)

$$H=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{R^2-\frac{x^2}{4\pi^2}}$$

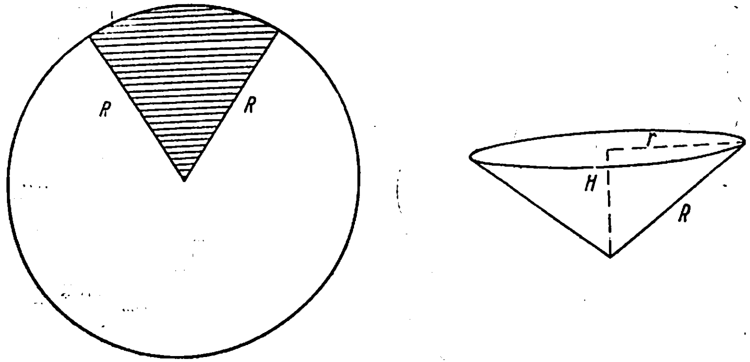


Рис. 33.

(рис. 33). Об'єм цього конуса становить

$$V=\frac{\pi}{3}r^2H=\frac{\pi}{3}\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\sqrt{R^2-\frac{x}{4\pi^2}}.$$

Цей вираз досягає найбільшої величини одночасно з виразом

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\sqrt{R^2-\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2}$$

і його квадратом

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^4\left[R^2-\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right].$$

Оскільки

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+R^2-\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2=R^2$$

є величина стала, то (на підставі доведеного раніше, стор. 142—143) останній добуток має максимум при тому значенні x, коли

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 : \left[R^2 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right] = 2:1,$$

звідки

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = 2R^2 - 2\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2,$$

$$3\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = 2R^2 \text{ і } x = \frac{2\pi}{3}R\sqrt{6} \approx 5{,}15R.$$

Дуга $x \approx 295°$ і, таким чином, дуга вирізуваного сектора повинна містити приблизно 65°.

Найяскравіше освітлення

ЗАДАЧА

На якій висоті над столом повинно знаходитися полум'я свічки, щоб найяскравіше освітлювати монету, яка лежить на столі?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Можна подумати, що для досягнення найкращого освітлення треба помістити полум'я якомога нижче. Це невірно: при низькому положенні полум'я промені падають положисто. Підняти свічку так, щоб промені падали круто,— означає віддалити джерело світла. Найвигідніша щодо освітлення, очевидно, деяка середня висота полум'я над столом. Позначимо її через x (рис. 34). Відстань BC від монети B до основи C перпендикуляра, який проходить через полум'я A, позначимо через a. Якщо яскравість полум'я i, то освітленість монети за законами оптики матиме такий вираз:

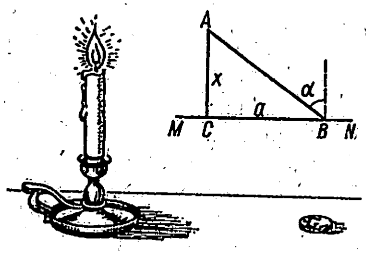


Рис. 34.

$$\frac{i}{AB^2}\cos\alpha = \frac{i\cos\alpha}{(\sqrt{a^2+x^2})^2} = \frac{i\cos\alpha}{a^2+x^2},$$

де α — кут падіння пучка променів AB. Оскільки

$$\cos\alpha = \cos A = \frac{x}{AB} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

то освітленість дорівнює

$$\frac{i}{a^2+x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{ix}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Цей вираз досягає максимуму при тому ж значенні x, що і його квадрат, тобто

$$\frac{i^2x^2}{(a^2+x^2)^3}.$$

Множник i^2 як величину сталу відкидаємо, а другу частину досліджуваного виразу перетворюємо так:

$$\frac{x^2}{(a^2+x^2)^3} = \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right) = \left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)^2\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right).$$

Цей вираз досягає максимуму одночасно з виразом

$$\left(\frac{a^2}{x^2+a^2}\right)^2\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right),$$

оскільки введений постійний множник a^4 не впливає на те значення x, при якому добуток досягає максимуму. Зауважуючи, що сума перших степенів цих множників

$$\frac{a^2}{x^2+a^2} + \left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right) = 1$$

є величина стала, робимо висновок, що розглядуваний добуток стає найбільшим, коли

$$\frac{a^2}{x^2+a^2} : \left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right) = 2:1$$

(див. стор. 142—143).

Маємо рівняння

$$a^2 = 2x^2 + 2a^2 - 2a^2.$$

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо

$$x=\frac{a}{\sqrt{2}}\approx 0{,}71a.$$

Монета освітлюється найяскравіше, коли джерело світла знаходиться на висоті, яка дорівнює 0,71 відстані від проекції джерела до монети. Знання цього співвідношення допомагає при влаштуванні найкращого освітлення робочого місця.

РОЗДІЛ VIII

ПРОГРЕСІЇ

Найдавніша прогресія

ЗАДАЧА

Найдавніша задача на прогресії — не є питанням про винагороду винахідника шахів, що нараховує за собою двохтисячорічну давність, а значно старіша задача про поділ хліба, яку записано у знаменитому єгипетському папірусі Рінда. Папірус цей, знайдений Ріндом наприкінці минулого століття, складений близько 2000 років до нашої ери і є списаним з іншого, ще більш давнього математичного твору, який належить, може бути, до третього тисячоліття до нашої ери. У числі арифметичних, алгебраїчних та геометричних задач цього документа є така (наводимо її у вільному переказі):

Сто мір хліба поділити між п'ятьма чоловіками так, щоб другий одержав на стільки ж більше від першого, на скільки третій одержав більше від другого, четвертий більше від третього, п'ятий більше від четвертого. Крім того, двоє перших повинні одержати у 7 раз менше від трьох інших. Скільки треба дати кожному?

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Очевидно, кількості хліба, одержані учасниками поділу, складають зростаючу арифметичну прогресію. Нехай її перший член x, різниця y. Тоді

Частка першого	. . . . . .	x
» другого	. . . . . .	$x+y$
» третього	. . . . . .	$x+2y$
» четвертого	. . . . .	$x+3y$
» п'ятого	. . . . . .	$x+4y$

На основі умов задачі складаємо такі два рівняння:

$$\begin{cases} x+(x+y)+(x+2y)+(x+3y)+(x+4y)=100, \\ 7[x+(x+y)]=(x+2y)+(x+3y)+(x+4y). \end{cases}$$

Після спрощень перше рівняння матиме вигляд

$$x+2y=20,$$

а друге

$$11x=2y.$$

Розв'язавши цю систему, одержимо:

$$x=1\frac{2}{3}, \quad y=9\frac{1}{6}.$$

Отже, хліб треба розділити на такі частини:

$$1\frac{2}{3}, \quad 10\frac{5}{6}, \quad 20, \quad 29\frac{1}{6}, \quad 38\frac{1}{3}.$$

Алгебра на клітчастому папері

Незважаючи на п'ятдесятивікову давність цієї задачі на прогресії, у нашому шкільному ужитку прогресії з'явилися порівнюючи недавно. У підручнику Магницького, який був виданий двісті років тому і цілих півстоліття був основним посібником для шкільного навчання, прогресії хоч і є, але загальних формул, які зв'язують величини, що входять до них, в ньому не подано. Сам укладач підручника не без труднощів справлявся з такими задачами. А проте формулу суми членів арифметичної прогресії легко вивести простим і наочним способом за допомогою клітчастого паперу. На такому папері будь-яка арифметична прогресія зображується ступінчастою фігурою. Наприклад, фігура $ABDC$ на рис. 35 зображує прогресію

$$2;\ 5;\ 8;\ 11;\ 14.$$

Щоб визначити суму її членів, доповнимо креслення до прямокутника $ABGE$. Одержимо дві рівні фігури $ABDC$ і $DGEC$. Площа кожної з них зображує суму членів нашої прогресії. Отже, подвійна сума прогресії дорівнює площі прямокутника $ABGE$, тобто

$$(AC+CE)\cdot AB.$$

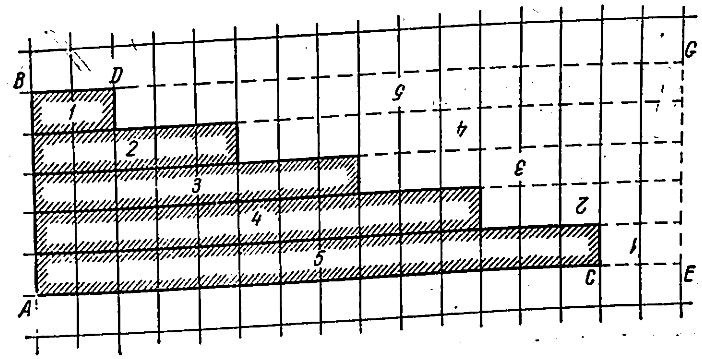


Рис. 35.

Однак $AC+CE$ зображує суму 1-го і 5-го членів прогресії, AB — число членів прогресії. Тому подвійна сума

$$2S = (\text{сума крайніх членів}) \cdot (\text{число членів})$$

або

$$S=\frac{(\text{перший} + \text{останній член})\cdot(\text{число членів})}{2}.$$

Поливання городу

ЗАДАЧА

На городі 30 грядок, кожна довжиною 16 метрів і шириною 2,5 метра. Поливаючи грядки, городник носить відра з водою з колодязя, розміщеного на відстані 14 метрів від краю городу (рис. 36), і обходить грядки по межі, причому води, яку він приносить за один раз, вистачає для поливання однієї грядки.

Якої довжини шлях повинен пройти городник, поливаючи весь город? Шлях починається і закінчується біля колодязя.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Для поливання першої грядки городник повинен пройти шлях

$$14+16+2{,}5+16+2{,}5+14=65 \text{ метрів}.$$

Рис. 36.

При поливанні другої грядки він проходить

$$14+2{,}5+16+2{,}5+16+2{,}5+2{,}5+14=65+5=70 \text{ метрів}.$$

Кожна наступна грядка потребує шляху на 5 метрів більше попередньої. Маємо прогресію:

$$65;\ 70;\ 75;\ \ldots;\ 65+5\cdot 29.$$

Сума її членів дорівнює

$$\frac{(65+65+29\cdot 5)\cdot 30}{2}=4125 \text{ метрів}.$$

Городник при поливанні всього городу проходить шлях 4,125 кілометра.

Годівля курей

ЗАДАЧА

Для годівлі 31 курки заготовлено деяку кількість корму з розрахунку по декалітру за тиждень на кожну курку. При цьому передбачалося, що чисельність курей не змінюватиметься. А оскільки в дійсності число курей щотижня зменшувалося на 1, то заготовленого корму вистачило на подвійний строк.

Який завбільшки був запас корму і на який час він був спочатку розрахований?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай було заготовлено x декалітрів корму на y тижнів. Оскільки корм був розрахований на 31 курку по 1 декалітру на курку за тиждень, то

$$x=31y.$$

За перший тиждень було витрачено 31 декалітр, за другий 30, за третій 29 і т. д. до останнього тижня всього подвоєного строку, коли витрачено було

$$(31-2y+1) \text{ декалітрів*}.$$

Весь запас становив, отже,

$$x=31y=31-30+29+\ldots+(31-2y+1).$$

Сума $2y$ членів прогресії, перший член якої 31, а останній $31-2y+1$, становить

$$31y=\frac{(31+31-2y+1)\cdot 2y}{2}=(63-2y)\,y.$$

Оскільки y не може дорівнювати нулю, то ми маємо право обидві частини рівності скоротити на цей множник. Одержуємо:

$$31=63-2y \text{ і } y=16,$$

звідки

$$x=31y=496.$$

Отже, було заготовлено 496 декалітрів корму на 16 тижнів.

Бригада землекопів

ЗАДАЧА

Старшокласники зобов'язалися викопати на шкільній ділянці канаву і організували для цього бригаду землекопів. Коли б бригада працювала у повному складі, канаву було б викопано за 24 години. А в дійсності до роботи приступив спочатку тільки один член бригади. Через деякий час приєднався другий, ще через такий же час — третій, за ним через такий же проміжок часу

* Пояснюємо: витрата корму протягом

1-го	тижня	31 декалітр,
2-го	»	31—1 декалітрів,
3-го	»	31—2 » »
. . .	. . .	. . .
$2y$-го	»	$31-(2y-1)=31-2y+1$ декалітрів.

четвертий і так до останнього. При розрахунку виявилося, що перший працював у 11 раз довше, ніж останній. Скільки часу працював останній?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай останній член бригади працював x годин, тоді перший відпрацював $11x$ годин. Далі, якщо число учнів, що копали канаву, було y, то загальне число годин роботи

Рис. 37.

визначиться як сума y членів убуваючої прогресії, перший член якої $11x$, а останній x, тобто

$$\frac{(11x+x)\,y}{2} = 6xy.$$

Однак відомо, що бригада з y чоловік, працюючи у повному складі, викопала б канаву за 24 години, тобто що для виконання роботи потрібно $24y$ робочих годин. Отже,

$$6xy = 24y.$$

Число y не може дорівнювати нулю; тому на цей множник можна рівняння скоротити, після чого одержимо:

$$6x = 24 \text{ і } x = 4.$$

Виходить, що член бригади, який приступив до роботи останнім, працював 4 години.

Ми відповіли на запитання задачі. Однак коли ми поцікавилися б узнати, скільки робітників входило до складу бригади, то не змогли б цього зробити, незважаючи на те, що у рівнянні число це фігурувало (під літерою y). Для розв'язання цього питання у задачі не наведено достатніх даних.

Яблука

ЗАДАЧА

Садівник продав першому покупцеві половину усіх своїх яблук і ще пів-яблука, другому покупцеві — половину залишених і ще пів-яблука; третьому — половину залишених і ще пів-яблука і т. д. Сьомому покупцеві він продав половину залишених яблук і ще пів-яблука; після цього яблук у нього не залишилось. Скільки яблук було у садівника?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Якщо початкове число яблук x, то перший покупець одержав

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2},$$

другий

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{x+1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2^2},$$

третій

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{x+1}{2}-\frac{x+1}{4}\right)+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2^3},$$

. . . .

сьомий покупець одержав

$$\frac{x+1}{2^7}.$$

Маємо рівняння

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{2^2}+\frac{x+1}{2^3}+\ldots+\frac{x+1}{2^7}=x$$

або

$$(x+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^7}\right)=x.$$

Обчислюючи суму членів геометричної прогресії, яка стоїть у дужках, знаходимо:

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{2^7}$$

і

$$x = 2^7 - 1 = 127.$$

Усіх яблук було 127.

Купівля коня

ЗАДАЧА

У старовинній арифметиці Магницького знаходимо таку втішну задачу, яку наведемо тут, не додержуючись мови оригіналу.

Рис. 38.

Хтось продав коня за 156 карбованців. Однак покупець, придбавши коня, передумав його купувати і повернув продавцеві, кажучи:

— Нема рації мені купувати за цю ціну коня, який таких грошей не вартий.

Тоді продавець запропонував інші умови:

— Якщо, на твою думку, ціна коня надто висока, то купи лише цвяхи, що у його підковах, а коня одержиш тоді на додачу безплатно. Цвяхів у кожній підкові 6. За перший цвях дай мені лише $\frac{1}{4}$ копійки, за другий — $\frac{1}{2}$ копійки, за третій — 1 копійку і т. д.

Покупець, спокушений низькою ціною, бажаючи даром одержати коня, прийняв умови продавця, розраховуючи, що за цвяхи доведеться заплатити не більше як 10 карбованців.

Скільки покупець повинен заплатити?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

За 24 цвяхи у підковах довелося заплатити

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{24-3}$$

копійок. Сума ця дорівнює

$$\frac{2^{21}\cdot 2 - \frac{1}{4}}{2-1} = 2^{22} - \frac{1}{4} = 4\,194\,303\frac{3}{4} \text{ копійки},$$

тобто близько 42 тисяч карбованців. За таких умов варто і коня дати на додачу.

Винагорода воїна

ЗАДАЧА

З іншого старовинного російського підручника математики, який має довжелезну назву:

«*Повний курс чистої математики, складений Артилерії Штик-Юнкером і Математики партикулярним Учителем Юхимом Войтяхівським на користь і застосування юнацтва і тих, що роблять вправи в Математиці*» (1795 р.), взято таку задачу:

«Воїнові, що відслужив, видано винагороду за першу рану 1 копійку, за другу — 2 копійки, за третю рану — 4 копійки і т. д. Після підрахунків виявилося, що воїн одержав винагороду 655 карбованців 35 копійок. Запитується, яке число його ран».

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Складаємо рівняння

$$65\,535 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{x-1}$$

або

$$65\,535 = \frac{2^{x-1}\cdot 2 - 1}{2-1} = 2^x - 1,$$

звідки маємо:

$$65\,536 = 2^x \text{ і } x = 16$$

— результат, який легко знаходимо шляхом випробувань.

При такій великодушній системі винагороди воїн повинен дістати 16 ран і залишитися при цьому в живих, щоб мати честь одержати за них 655 карбованців 35 копійок.

РОЗДІЛ IX

СЬОМА МАТЕМАТИЧНА ДІЯ

Сьома дія

Ми вже згадували, що п'ята дія — піднесення до степеня — має дві обернені. Якщо

$$a^b = c,$$

то відшукання a є одна обернена дія — добування кореня; відшукання ж b є другою дією — логарифмуванням. Гадаємо, що читач цієї книжки знайомий з основами учення про логарифми в обсязі шкільного курсу. Для нього, мабуть, неважко зміркувати, чому, наприклад, дорівнює такий вираз:

$$a^{\lg_a b}.$$

Неважко зрозуміти, що коли основу логарифмів a піднести у степінь логарифма числа b, то повинно вийти це число b.

Для чого ж були придумані логарифми? Звичайно, для прискорення і спрощення обчислень. Винахідник перших логарифмічних таблиць, Непер, так говорить про своє відкриття:

«Я намагався, наскільки міг і вмів, відкараскатися від труднощів і скуки обчислень, докучливість яких звичайно лякає багатьох у вивченні математики».

І справді, логарифми дуже полегшують і прискорюють обчислення, не кажучи вже про те, що вони дають можливість провадити такі операції, виконання яких без їх допомоги дуже утруднюється (добування кореня будь-якого степеня).

Не без підстав писав Лаплас, що «винайдення логарифмів, скорочуючи обчислення кількох місяців у працю кількох днів, ніби подвоює життя астрономів». Великий математик говорить про астрономів, оскільки їм доводиться робити особливо складні і стомливі обчислення. Однак його слова з повним правом можна віднести до всіх взагалі, кому доводиться мати справу з числовими викладками.

Нам, які звикли до застосування логарифмів і до полегшення за їх допомогою викладок, важко уявити собі ті дивування і захоплення, які викликали вони при своїй появі. Сучасник Непера, Брігг, який пізніше прославився винаходом десяткових логарифмів, писав, одержавши твір Непера: «Своїми новими і чудовими логарифмами Непер примусив мене посилено працювати і головою і руками. Я сподіваюсь побачити його влітку, оскільки ніколи не читав книги, яка подобалася мені більше і змушувала б мене більше дивуватися». Брігг здійснив свій намір і поїхав до Шотландії, щоб відвідати винахідника логарифмів. Під час зустрічі Брігг сказав:

«Я вирушив у цю довгу подорож з єдиною метою побачити вас і дізнатися, за допомогою якого знаряддя дотепності та майстерності ви прийшли до першої думки про чудовий посібник для астрономів — логарифми. А втім, тепер я більше не дивуюся тому, що ніхто не винайшов їх раніше, — настільки вони здаються простими після того, коли про них довідаєшся».

Суперники логарифмів

Раніше від винайдення логарифмів потреба у прискоренні викладок породила таблиці іншого роду, за допомогою яких дія множення заміняється не додаванням, а відніманням. Будова цих таблиць грунтується на тотожності

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4},$$

у правильності якої легко переконатися, розкривши дужки.

Маючи готові чверті квадратів, можна знаходити здобуток двох чисел, не виконуючи множення, а віднімаючи від чверті квадрата суми цих чисел чверть квадрата їх різниці. Ті ж таблиці полегшують піднесення до квадрата і добування квадратного кореня, а у поєднанні з таблицею обернених чисел спрощують і дію ділення. Їх перевага перед логарифмічними таблицями полягає в тому, що з їх допомогою виходять результати т о ч н і, а не наближені. Зате вони поступаються перед логарифмічними таблицями у ряді інших якостей, практично значно більш важливих. Тим часом як таблиці чвертей квадратів дають можливість перемножувати тільки д в а числа, логарифми дозволяють знаходити з р а з у добуток будь-якого числа множників, а крім того — підносити до б у д ь - я к о г о степеня і добувати корені з б у д ь - я к и м показником (цілим або дробовим). Обчислювати, наприклад, складні проценти за допомогою таблиць чвертей не можна.

А втім таблиці чвертей квадратів видавалися і після того, як з'явилися логарифмічні таблиці різноманітних видів. У 1856 р. у Франції вийшли таблиці під назвою: *«Таблиця квадратів чисел від 1 до 1000 мільйонів, за допомогою якої знаходять точний добуток чисел дуже простим способом, більш зручним, ніж за допомогою логарифмів. Склав Олександр Коссар»*.

Ідея ця виникає у багатьох, і вони не підозрюють про те, що її вже давно здійснено. До автора цієї книжки вже зверталися винахідники подібних таблиць як з новинкою і дуже були здивовані, дізнавшися, що їх винахід має трьохсотлітню давність.

Другим, більш молодим суперником логарифмів є обчислювальні таблиці, які є у багатьох технічних довідниках. Це зведені таблиці, які містять такі графи: квадрати чисел, куби, квадратні корені, кубічні корені, обернені числа, довжини кола і площі кругів для чисел від 2 до 1000. Для багатьох технічних розрахунків ці таблиці дуже зручні, однак їх не завжди достатньо; логарифмічні мають значно ширшу галузь застосування.

Еволюція логарифмічних таблиць

У наших школах ще не так давно застосовували 5-значні логарифмічні таблиці. Тепер перейшли на 4-значні, оскільки вони цілком достатні для технічних розрахунків. Однак для більшості практичних потреб можна успішно обходитися навіть 3-значними мантисами: адже у повсякденній практиці вимірювання рідко виконуються більше як з трьома знаками.

Думка про достатність більш коротких мантис усвідомлена порівняно недавно. Автор ще пам'ятає час, коли в наших школах були у застосуванні важкі томи 7-значних логарифмів, які поступилися місцем перед 5-значними лише після впертої боротьби. Однак і 7-значні логарифми при своїй появі (1794 р.) здавалися неабияким нововведенням. Перші десяткові логарифми, створені лондонським математиком Генрі Бріггом (1624 р.), були 14-значні. Через кілька років їх замінили 10-значні таблиці голландського математика Андріана Влакка.

Як бачимо, еволюція ходових логарифмічних таблиць ішла від многозначних мантис до більш коротких і не завершилася ще і в наші дні, оскільки і тепер багато хто не усвідомив тієї простої істини, що точність обчислень не може перевершувати точність вимірювань.

Укорочення мантис призводить до двох важливих практичних наслідків: 1) помітне зменшення обсягу таблиць і 2) пов'язане з цим спрощення користування ними, а отже, і прискорення виконуваних з їх допомогою обчислень. Семизначні логарифми чисел займають близько 200 сторінок великого формату, 4-значні мають удесятеро менший обсяг і вміщуються на двох сторінках великого формату, 3-значні можуть вміститися на одній сторінці.

Що ж до швидкості обчислень, то встановлено, що, наприклад, розрахунок, виконуваний за 5-значними таблицями, потребує втричі менше часу, ніж за 7-значними.

Логарифмічні диковинки

Якщо для технічних розрахунків цілком достатньо 3- і 4-значних таблиць, то до послуг теоретичного дослідника є таблиці з значно більшим числом знаків, ніж навіть 14-значні логарифми Брігга. Взагалі кажучи, логарифм у більшості випадків є число ірраціональне і не може бути точно виражений ніяким числом цифр. Логарифми більшості чисел, скільки б знаків не брати, виражаються лише наближено, тим точніше, чим більше цифр у їх мантисі.

Для наукових праць точність 14-значних логарифмів* іноді виявляється недостатньою. Серед 500 різноманітних зразків логарифмічних таблиць, які вийшли у світ з часу їх винайдення, дослідник завжди знайде такі, які його задовольняють. Назвемо, наприклад, 20-значні логарифми чисел від 2 до 1200, видані у Франції Калле (1795 р.). Для більш обмеженої групи чисел існують таблиці логарифмів з величезним числом десяткових знаків, — справжні логарифмічні диковинки, про існування яких, як переконався автор, не підозріває багато хто з математиків.

Ось ці логарифми-велетні; всі вони не десяткові, а натуральні**:

48-значні таблиці Вольфрама для чисел до 10 000;
61-значні таблиці Шарпа;
102-значні таблиці Паркхерста
і, нарешті, логарифмічна понаддиковинка:
260-значні логарифми Адамса.

В останньому випадку ми маємо не таблицю, а тільки так звані натуральні логарифми п'яти чисел: 2, 3, 5, 7 і 10 і перевідний (260-значний) множник для перерахування їх у десяткові. Неважко, однак, зрозуміти, що, маючи логарифми цих п'яти чисел, можна простим додаванням або множенням одержати логарифми безлічі складених чисел, наприклад, логарифм 12 дорівнює сумі логарифмів 2, 2 і 3 і т. д.

До логарифмічних диковинок можна було б цілком обгрунтовано віднести і лічильну лінійку — «дерев'яні логарифми», — коли б цей дотепний прилад не зробився завдяки своїй зручності таким же звичайним лічильним знаряддям для техніків, як десятикісточкова рахівниця для конторських працівників. Звичка гасить почуття подиву перед приладом, який працює за принципом логарифмів і притому не потребує від того, хто користується ним, знання того, що таке логарифм.

Логарифми на естраді

Найдивовижніший з номерів, який перед публікою виконує професіонал-обчислювач, безперечно є такий.

* 14-значні логарифми Брігга існують, однак, тільки для чисел від 1 до 20 000 і від 90 000 до 101 000.

** Натуральними називаються логарифми, обчислені не при основі 10, а при основі 2,718..., про яку у нас ще буде мова далі.

Сповіщені афішею, що обліковець-віртуоз усно буде добувати корені високих степенів з многозначних чисел, ви готуєте вдома шляхом довгих викладок 31-й степінь якого-небудь числа і маєте намір вразити віртуоза 35-значним числовим лінкором. У належний момент ви звертаєтесь до обчислювача із словами:

— А спробуйте-но добути корінь 31-го степеня з такого 35-значного числа! Запишіть, я продиктую.

Віртуоз-обчислювач бере крейду, але перш ніж ви встигли відкрити рота, щоб промовити першу цифру, у нього вже написано результат: 13.

Не знаючи числа, він добув з нього корінь, та й ще 31-го степеня, та й ще усно, та й ще з блискавичною швидкістю!..

Ви вражені, знищені, а проте у всьому цьому немає нічого надприродного. Секрет полягає просто в тому, що існує тільки о д н е число, саме 13, яке у 31-му степені дає 35-значний результат. Числа, менші від 13, дають менше 35 цифр, числа, більші від 13, дають більше цифр.

Звідки обчислювач знав це? Як відшукав він число 13? Йому допомогли логарифми, д в о з н а ч н і логарифми, які він знає напам'ять для перших 15—20 чисел. Запам'ятати їх зовсім не так важко, як здається, особливо якщо користуватися тим, що логарифм складеного числа дорівнює сумі логарифмів його простих множників. Знаючи твердо логарифми 2, 3 і 7*, ви вже знаєте логарифми першого десятка. Для другого десятка потрібно пам'ятати логарифми ще чотирьох чисел.

Як там не було б, естрадний обчислювач мислено користується такою табличкою двозначних логарифмів:

Число	Логарифм	Число	Логарифм	Число	Логарифм	Число	Логарифм
2	0,30	6	0,78	11	1,04	15	1,18
3	0,48	7	0,85	12	1,08	16	1,20
4	0,60	8	0,90	13	1,11	17	1,23
5	0,70	9	0,95	14	1,15	18	1,26
						19	1,28

Математичний трюк, що вразив вас, пояснюється так:

$$\lg \sqrt[31]{(35\ \text{цифр})} = \frac{34,\ldots}{31}.$$

* Нагадаємо, що $\lg 5 = \lg \frac{10}{2} = 1 - \lg 2$.

Шуканий логарифм може знаходитися між

$$\frac{34}{31} \text{ і } \frac{34,99}{31} \text{ або між } 1,09 \text{ і } 1,13.$$

У цьому інтервалі знаходиться логарифм тільки одного цілого числа, а саме 1,11 — логарифм 13. Таким способом знайдено результат, який вас приголомшив. Звичайно, щоб швидко зробити це в думці, треба мати спритність і кмітливість професіонала, але по суті, як бачите, справа досить проста. Ви й самі тепер зможете витворяти подібні фокуси, якщо не мислено, то на папері.

Нехай вам запропоновано задачу: добути корінь 64-го степеня з 20-значного числа.

Не запитуючи про те, що це за число, ви можете оголосити результат: корінь дорівнює 2.

Справді, $\lg \sqrt[64]{(20\ \text{цифр})} = \frac{19,\ldots}{64}$; отже, він повинен знаходитися між $\frac{19}{64}$ і $\frac{19,99}{64}$, тобто між 0,29 і 0,32. Такий логарифм для цілого числа тільки один: 0,30..., тобто логарифм 2.

Ви навіть можете остаточно приголомшити загадувача, сказавши йому, яке саме число він збирався вам продиктувати: знамените «шахове» число

$$2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616.$$

Логарифми на тваринницькій фермі

З А Д А Ч А

Кількість так званого «підтримуючого» корму (тобто та найменша кількість його, яка лише поповнює витрати організму на тепловіддачу, роботу внутрішніх органів, відтворення відмираючих клітин і т. п.*) пропорціональна зовнішній поверхні тіла тварини. Знаючи це, визначіть калорійність підтримуючого корму для вола, який важить 420 кілограмів, якщо при тих же умовах віл вагою 630 кілограмів потребує 13 500 калорій.

* На відміну від «продуктивного» корму, тобто частини корму, який іде на виробку продукції, заради якої утримують тварин.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Щоб розв'язати цю практичну задачу з галузі тваринництва, потрібно, крім алгебри, залучити до цього і геометрію. Згідно з умовою задачі шукана калорійність x пропорціональна поверхні (s) вола, тобто

$$\frac{x}{13\,500} = \frac{s}{s_1},$$

де s_1 — поверхня тіла вола, який важить 630 кілограмів. З геометрії ми знаємо, що поверхні (s) подібних тіл відносяться, як квадрати їх лінійних розмірів (l), а об'єми (отже, і вага) — як куби лінійних розмірів. Тому

$$\frac{s}{s_1} = \frac{l^2}{l_1^2}, \quad \frac{420}{630} = \frac{l^3}{l_1^3}, \text{ і таким чином, } \frac{l}{l_1} = \frac{\sqrt[3]{420}}{\sqrt[3]{630}},$$

звідки

$$\frac{x}{13\,500} = \frac{\sqrt[3]{420^2}}{\sqrt[3]{630^2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{420}{630}\right)^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2},$$

$$x = 13\,500\sqrt[3]{\frac{4}{9}}.$$

З допомогою логарифмічних таблиць знаходимо:

$$x = 10\,300.$$

Віл потребує 10 300 калорій.

Логарифми в музиці

Музиканти рідко захоплюються математикою; більшість їх, відчуваючи до цієї науки повагу, вважають за краще триматися від неї подалі. А проте музиканти — навіть ті, які не перевіряють, подібно до Сальєрі у Пушкіна, «алгеброю гармонію», — стикаються з математикою значно частіше, ніж самі підозрівають, і притому з такими страхітливими речами, як логарифми.

З цього приводу можна навести уривок із статті нині покійного фізика професора А. Ейхенвальда*.

«Мій товариш по гімназії любив грати на роялі, але не любив математики. Він навіть говорив з відтінком зне-

* Її було надруковано у «Російському астрономічному календарі на 1919 рік» і названо «Про великі і малі відстані».

ваги, що музика і математика одне з одним нічого не мають спільного. «Правда, Піфагор знайшов якісь співвідношення між звуковими коливаннями, — проте саме піфагорова гама для нашої музики і виявилася незастосовною».

Уявіть же собі, як неприємно був вражений мій товариш, коли я довів йому, що, граючи по клавішах сучасного рояля, він грає, власне кажучи, на логарифмах ... І дійсно, так звані «ступені» темперованої хроматичної гами не розставлені на рівних відстанях ні у відношенні до чисел коливань, ні у відношенні до довжин хвиль відповідних звуків, а являють собою логарифми цих величин. Тільки основа цих логарифмів дорівнює 2, а не 10, як прийнято в інших випадках.

Припустимо, що нота *do* найнижчої октави — назвемо її нульовою октавою — визначається n коливаннями за секунду. Тоді *do* першої октави робитиме $2n$ коливань, а m-ї октави $n \cdot 2^m$ коливань за секунду і т. д. Позначимо всі ноти хроматичної гами рояля номерами p, приймаючи основний тон *do* кожної октави за нульовий. Тоді, наприклад, тон *sol* буде 7-й, *la* буде 9-й і т. д.; 12-й тон буде знову *do*, тільки октавою вище. Оскільки у темперованій хроматичній гамі кожний наступний тон має у $\sqrt[12]{2}$ більше число коливань, ніж попередній, то число коливань будь-якого тону можна виразити формулою

$$N_{pm} = n \cdot 2^m \left(\sqrt[12]{2}\right)^p.$$

Логарифмуючи цю формулу, одержуємо:

$$\lg N_{pm} = \lg n + m \lg 2 + p\frac{\lg 2}{12}$$

або

$$\lg N_{pm} = \lg n + \left(m + \frac{p}{12}\right)\lg 2,$$

а приймаючи число коливань найнижчого тону *do* за одиницю ($n = 1$) і переводячи усі логарифми до основи, яка дорівнює 2 (або просто приймаючи $\lg 2 = 1$), маємо:

$$\lg N_{pm} = m + \frac{p}{12}.$$

Звідси ми бачимо, що номери клавішів рояля являють собою логарифми чисел коливань відповідних звуків*. Ми навіть можемо сказати, що номер октави являє собою характеристику, а номер звука в даній октаві** — мантису цього логарифма».

Так, наприклад, у тоні *sol* третьої октави, тобто у числі $3+\frac{7}{12}$ ($\approx 3{,}583$), число 3 є характеристикою логарифма числа коливань цього тону, а $\frac{7}{12}$ ($\approx 0{,}583$) — мантисою того ж логарифма при основі 2. Отже, число коливань у $2^{3,583}$, тобто в 11,98 раза більше від числа коливань тону *do* першої октави.

Зорі, шум і логарифми

Цей заголовок, який зв'язує такі, здавалось би, непорівнянні речі, не претендує бути пародією на твори Кузьми Пруткова; мова і справді піде про зорі і про шуми у тісному зв'язку з логарифмами.

Шум і зорі об'єднуються тут тому, що і гучність шуму і яскравість зір оцінюються однаковим способом — за логарифмічною шкалою.

Астрономи розподіляють зорі за ступенем видимої яскравості на світила першої, другої, третьої і т. д. величини. Послідовні зоряні величини сприймаються оком як члени арифметичної прогресії. Однак фізична яскравість їх змінюється за іншим законом: об'єктивні яскравості становлять геометричну прогресію із знаменником 2,5. Легко зрозуміти, що «величина» зорі є нічим іншим, як логарифмом її фізичної яскравості. Зоря, наприклад, третьої величини яскравіша від зорі першої величини в $2{,}5^{3-1}$, тобто в 6,25 раза. Коротше кажучи, оцінюючи видиму яскравість зір, астроном оперує з таблицями логарифмів, складеною при основі 2,5. Не зупиняємося тут докладніше на цих цікавих співвідношеннях, оскільки їм приділено достатню кількість сторінок у книзі «Цікава астрономія» того ж автора.

Подібним способом оцінюється і гучність шуму. Шкідливий вплив промислових шумів на здоров'я робітників і продуктивність праці змусив виробити прийоми

* Помножені на 12.

** Поділений на 12.

точної звукової оцінки гучності шуму. Одиницею гучності служить «бел», а практично — його десята частка — «децибел». Послідовні ступені гучності — 1 бел, 2 бели і т. д. (практично 10 децибелів, 20 децибелів і т. д.) становлять для нашого слуху арифметичну прогресію. Фізична ж «сила» цих шумів (точніше — енергія) становить геометричну прогресію із знаменником 10. Різниці гучності в 1 бел відповідає відношення сили шумів 10. Отже, гучність шуму, виражена в белах, дорівнює десятковому логарифмові його фізичної сили.

Справа буде більш зрозумілою, коли ми розглянемо кілька прикладів.

Тихий шелест листя оцінюється в 1 бел, голосна розмова — у 6,5 бела, ричання лева — у 8,7 бела. Звідси виходить, що розмовна мова перевищує шелест листя у

$$10^{6,5-1} = 10^{5,5} = 316\,000 \text{ раз;}$$

левове ричання сильніше від голосної розмовної мови у

$$10^{8,7-6,5} = 10^{2,2} = 158 \text{ раз.}$$

Шум, гучність якого більша від 8 белів, вважається шкідливим для людського організму. Вказана норма на багатьох заводах перевищується: тут бувають шуми у 10 і більше белів. Удари молотка об стальну плиту породжують шуми в 11 белів. Шуми ці у 100 і 1000 раз сильніші за допустиму норму і 10—100 раз гучніші від найбільш шумного місця Ніагарського водоспаду (9 белів).

Чи випадковість те, що і при оцінці видимої яскравості світил і при вимірюванні гучності шуму ми маємо справу з логарифмічною залежністю між величиною відчуття і подразнення, яке його викликає? Ні, те і друге — наслідок загального закону (що називається «психофізичним законом Фехнера»), який твердить: величина відчуття пропорціональна логарифмові величини подразнення.

Як бачимо, логарифми втручаються і в галузь психології.

Логарифми в електроосвітленні

ЗАДАЧА

Наповнені газом лампочки (які часто неправильно називаються «півватними») дають більш яскраве світло, ніж порожнисті лампочки з металевою ниткою з такого ж матеріалу. Причина цього полягає у різній температурі нитки розжарення. За правилом, установленим у фізиці, загальна кількість світла, яка випромінюється при білому жарі, росте пропорціонально 12-му степеню абсолютної температури. Знаючи це, зробимо таке обчислення: визначимо, у скільки разів «півватна» лампа, температура нитки розжарення якої 2500° абсолютної шкали (тобто при відлічуванні від — 273° C), випромінює більше світла, ніж порожниста лампа з ниткою, розжареною до 2200°.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Позначаючи шукане відношення через x, маємо рівняння

$$x = \left(\frac{2500}{2200}\right)^{12} = \left(\frac{25}{22}\right)^{12},$$

звідки

$$\lg x = 12(\lg 25 - \lg 22), \quad x = 4{,}6.$$

Наповнена газом лампа випромінює світла у 4,6 раза більше, ніж порожниста. Виходить, якщо порожниста лампа дає світло у 50 свічок, то наповнена газом при тих же умовах дасть 230 свічок.

Зробимо ще такий розрахунок: яке підвищення абсолютної температури (у процентах) необхідне для п о д в о є н н я яскравості лампочки?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Складаємо рівняння

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right)^{12} = 2,$$

звідки

$$\lg\left(1 + \frac{x}{100}\right) = \frac{\lg 2}{12} \text{ і } x = 6\%.$$

Нарешті, третій розрахунок: на скільки (у процентах) збільшиться яскравість лампочки, якщо температура її нитки (абсолютна) підвищиться на 1%?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Виконуючи за допомогою логарифмів обчислення

$$x = 1{,}01^{12},$$

знаходимо:

$$x = 1{,}13.$$

Яскравість збільшиться на 13%.

Зробивши обчислення для підвищення температури на 2%, знайдемо збільшення яскравості на 27%, при підвищенні температури на 3% яскравість збільшиться на 43%.

Звідси можна зрозуміти, чому у техніці виготовлення електролампочок так піклуються про підвищення температури нитки розжарення і дорожать кожним зайвим градусом.

Заповіти на сотні років

Хто не чув про те легендарне число пшеничних зерен, яке ніби зажадав собі у винагороду винахідник шахової гри? Число це складалося шляхом послідовного подвоєння одиниці: за одне поле шахівниці винахідник зажадав 1 зернину, за друге 2 і т. д., все подвоюючи, до останнього 64-го поля.

Однак з несподіваною швидкістю числа ростуть не тільки при послідовному подвоєнні, але і при значно більш помірній нормі збільшення. Капітал, який приносить 5%, збільшується щороку у 1,05 раза. Ніби не таке вже й помітне зростання. А проте, після того як мине достатній проміжок часу, капітал встигає зрости у величезну суму. Цим пояснюється неймовірне збільшення капіталів, заповіданих на дуже довгий строк. Здається дивним, що заповідач, залишаючи досить скромну суму, робить розпорядження про сплату величезних капіталів. Так, відомий заповіт знаменитого американського державного діяча Веньяміна Франкліна, опублікований у «Збірці різних творів Веньяміна Франкліна». Ось витяг з нього:

«Заповідаю тисячу фунтів стерлінгів бостонським жителям. Якщо вони приймуть цю тисячу фунтів, то повинні доручити її найдобірнішим громадянам, а вони даватимуть їх з процентами, по 5 на сто за рік, у позику молодим ремісникам*. Сума ця через сто років збільшиться до 131 000 фунтів стерлінгів. Я бажаю, щоб тоді 100 000 фунтів було витрачено на спорудження громадських будівель, а решта 31 000 було віддано на проценти на 100 років. До закінчення другого століття сума зросте до 4 061 000 фунтів стерлінгів, з яких 1 060 000 фунтів залишаю у розпорядженні бостонських жителів, а 3 000 000 заповідаю правлінню Массачузетської громади. Далі не наважуюсь простягати своїх видів».

Залишаючи всього 1000 фунтів, Франклін розподіляє мільйони. Тут немає, однак, ніякого непорозуміння. Математичний розрахунок засвідчує, що міркування заповідача цілком реальні. 1000 фунтів, збільшуючись щороку у 1,05 раза, через 100 років повинні перетворитися на

$$x = 1000 \cdot 1{,}05^{100} \text{ фунтів.}$$

Цей вираз можна підрахувати за допомогою логарифмів

$$\lg x = \lg 1000 + 100 \lg 1{,}05 = 5{,}11893,$$

звідки

$$x = 131\ 000$$

згідно з текстом заповіту. Далі, 31 000 фунтів протягом наступного століття перетворяться на

$$y = 31\ 000 \cdot 1{,}05^{100},$$

обчислюючи за допомогою логарифмів, знаходимо:

$$y = 4\ 076\ 500$$

— суму, яка неістотно відрізняється від вказаної у заповіті.

Надаємо читачеві можливість самостійно розв'язати таку задачу, запозичену у російського письменника Салтикова-Щедріна «Пани Головльови».

* В Америці в ту епоху ще не було кредитних установ.

«Порфирій Володимирович сидить у себе в кабінеті, списуючи цифровими викладками аркуші паперу. Цього разу його займає питання: скільки було б у нього тепер грошей, якби матуся подаровані йому при народженні дідусем на зубок сто карбованців не привласнила собі, а поклала у ломбард на ім'я малолітнього Порфирія? Виходить, однак, небагато: всього сімсот карбованців».

Припускаючи, що Порфирієві на момент розрахунку було 50 років, і роблячи припущення, що обчислення він зробив правильно (припущення малоімовірне, оскільки навряд чи знав Головльов логарифми і вправлявся із складними процентами), треба встановити, по скільки процентів платив у той час ломбард.

Безперервне зростання капіталу

В ощадних касах процентні гроші приєднуються до основного капіталу щороку. Якщо приєднання здійснюється частіше, то капітал росте швидше, оскільки в утворенні процентів бере участь більша сума. Візьмемо чисто теоретичний, дуже спрощений приклад. Нехай у ощадну касу покладено 100 карбованців із 100% річних. Якщо процентні гроші будуть приєднані до основного капіталу лише через рік, то до цього строку 100 карбованців перетворяться на 200. Поглянемо тепер, на що перетворяться 100 карбованців, якщо процентні гроші приєднувати до основного капіталу кожні півроку. Після півроку 100 карбованців виростуть на

$$100 \cdot 1{,}5 = 150,$$

а ще через півроку — на

$$150 \cdot 1{,}5 = 225 \text{ карбованців.}$$

Якщо приєднання робити кожні $\frac{1}{3}$ року, то через рік 100 карбованців перетворяться на

$$100 \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^3 = 237 \text{ крб. } 03 \text{ коп.}$$

Будемо робити більш частими строки приєднання процентних грошей до 0,1 року, до 0,01 року, до 0,001 року і т. д. Тоді із 100 карбованців через рік вийде:

$$100 \text{ крб.} \cdot 1{,}1^{10} \approx 259 \text{ крб. } 37 \text{ коп.}$$
$$100 \text{ крб.} \cdot 1{,}01^{100} \approx 270 \text{ крб. } 48 \text{ коп.}$$
$$100 \text{ крб.} \cdot 1{,}001^{1000} \approx 271 \text{ крб. } 69 \text{ коп.}$$

Методами вищої математики доводиться, що при безмежному скороченні строків приєднання нарощений капітал не росте безмежно, а наближається до деякої границі, яка приблизно дорівнює*

271 крб. 83 коп.

Більше як у 2,7183 раза капітал, покладений з 100%, зрости не може, навіть коли б проценти, що наросли, приєднувалися до капіталу щосекунди.

Число «e»

Одержане число 2,718..., яке у вищій математиці відіграє величезну роль,— не меншу, мабуть, ніж знамените число π,— має особливе позначення: e. Це — число ірраціональне: воно не може бути виражене конечним числом цифр** і обчислюється тільки наближено з будь-яким ступенем точності за допомогою такого ряду:

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

З наведеного вище прикладу з зростанням капіталу за складними процентами легко бачити, що число e є границею виразу

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

при безмежному зростанні n.

За багатьма причинами, яких тут викласти ми не можемо, число e дуже доцільно прийняти за основу системи логарифмів. Такі таблиці («натуральних логарифмів») існують і знаходять собі широке застосування у науці і техніці. Ті логарифми — велетні з 48, з 61, з 102 і з

* Дробові частки копійки ми відкинули.

** Крім того, воно, як і число π, трансцендентне, тобто його не можна одержати в результаті розв'язання якого там не було б алгебраїчного рівняння з цілими коефіцієнтами.

260 цифр, про які ми говорили раніше, мають основою саме число e.

Число e з'являється нерідко там, де його зовсім не чекали. Поставимо собі, наприклад, таку задачу:

На які частини треба розбити дане число a, щоб добуток усіх частин був найбільший?

Ми вже знаємо, що найбільший добуток при постійній сумі дають числа тоді, коли вони дорівнюють одне одному. Зрозуміло, що число a треба розбити на рівні частини. Але на скільки саме частин? На дві, на три, на десять? Прийомами вищої математики можна встановити, що найбільший добуток буває тоді, коли частини по можливості ближчі до числа e.

Наприклад, треба розбити 10 на таке число рівних частин, щоб частини були по можливості ближчі до 2,718... Для цього треба знайти частку

$$\frac{10}{2{,}718\dots} = 3{,}678\dots$$

Оскільки поділити на 3,678... рівних частин не можна, то доводиться вибрати дільником найближче ціле число 4. Ми одержимо, отже, найбільший добуток частин 10, якщо ці частини дорівнюють $\frac{10}{4}$, тобто 2,5.

Отже,
$$(2{,}5)^4 = 39{,}0625$$
є найбільше число, яке можна одержати від перемножування однакових частин числа 10. Дійсно, поділивши 10 на 3 або на 5 рівних частин, ми одержимо менші добутки:

$$\left(\frac{10}{3}\right)^3 = 37,$$
$$\left(\frac{10}{5}\right)^5 = 32.$$

Число 20 для одержання найбільшого добутку його частин треба розбити на 7 однакових частин, оскільки

$$20 : 2{,}718\dots = 7{,}36 \approx 7.$$

Число 50 треба розбити на 18 частин, а 100 — на 37, оскільки

$$50 : 2{,}718\dots = 18{,}4,$$
$$100 : 2{,}718\dots = 36{,}8.$$

Число e відіграє велику роль у математиці, фізиці, астрономії та інших науках. Ось деякі питання, при математичному розгляді яких доводиться користуватися цим числом (список можна було б збільшувати необмежено):

Барометрична формула (зменшення тиску з висотою),
Формула Ейлера*,
Закон охолодження тіл,
Радіоактивний розпад і вік Землі,
Коливання маятника у повітрі,
Формула Ціолковського для швидкості ракети**,
Коливальні явища у радіоконтурі,
Зростання клітин.

Логарифмічна комедія

ЗАДАЧА

На додаток до тих математичних комедій, з якими читач познайомився у розділі V, наведемо ще зразок того ж роду, а саме «доведення» нерівності $2 > 3$. Цього разу в доведенні бере участь логарифмування.

«Комедія» починається з нерівності

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{8},$$

безперечно правильної. Потім іде перетворення:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3,$$

яке також не викликає сумніву. Більшому числу відповідає більший логарифм, отже,

$$2\lg_{10}\left(\frac{1}{2}\right) > 3\lg_{10}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Після скорочення на $\lg_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$ маємо: $2 > 3$. У чому помилка цього доведення?

---

* Про неї дивись статтю «Жюль-вернівський силач і формула Ейлера» у другій книзі Я. І. Перельмана «Занимательная физика», М., «Наука», 1971.

** Дивись книгу Я. І. Перельмана «Межпланетные путешествия», Л. — М., ГТТИ, 1934.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Помилка в тому, що при скороченні на $\lg_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$ не було змінено знак нерівності ($>$ на $<$). А проте це треба було зробити, оскільки $\lg_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$ є числом від'ємним. Коли б ми логарифмували при основі не 10, а іншій, меншій від $\frac{1}{2}$, то $\lg\left(\frac{1}{2}\right)$ був би додатний, але ми не мали б права тоді твердити, що більшому числу відповідає більший логарифм.

Будь-яке число — трьома двійками

ЗАДАЧА

Закінчимо книжку дотепною алгебраїчною головоломкою, якою розважалися учасники одного з'їзду фізиків в Одесі. Пропонується задача: будь-яке дане число, ціле і додатне, зобразити за допомогою трьох двійок і математичних символів.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Покажемо, як розв'язується задача, спочатку на окремому прикладі. Нехай дане число 3. Тоді задача розв'язується так:

$$3 = -\lg_2 \lg_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}.$$

Легко переконатися у правильності цієї рівності. Дійсно,

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = \left[\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2^3}} = 2^{2^{-3}},$$

$$\lg_2 2^{2^{-3}} = 2^{-3}, \quad -\lg_2 2^{-3} = 3.$$

Коли б дане число було 5, то ми розв'язали б задачу тим же способом:

$$5 = -\lg_2 \lg_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}.$$

Як бачимо, ми використовуємо тут те, що при квадратному радикалі показник кореня не пишеться.

Загальний розв'язок задачі такий. Якщо дане число N, то

$$N = -\lg_2 \lg_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{\sqrt{2}}}}}_{N \text{ раз}},$$

причому число радикалів дорівнює числу одиниць у заданому числі.

ЗМІСТ

Яков Исидорович Перельман

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ АЛГЕБРА

(На украинском языке)

Редактор видавництва *інж. Л. О. Циба*
Художник *Є. В. Попов*
Художні редактори: *А. П. Валькович, А. П. Коробейников*
Технічний редактор *Л. І. Копанова*
Коректор *Я. Я. Чигрина*

Здано до складання 22.VI. 1972 р. Підписано до друку 8.XII. 1972 р. Папір друкарський № 2. Формат паперу $84\times108^{1}/_{32}$. Обсяг: 5,875 фіз. арк.; 9,87 умовн. арк.; 8,36 обл.-вид. арк. Зам. № 93. Тираж 50 000. Ціна 25 коп.

Издательство «Техніка», 252601, Киев, 1, ГСП, Пушкинская, 28.

Надруковано з матриць книжкової фабрики ім. М. В. Фрунзе на Київській книжковій фабриці республіканського виробничого об'єднання «Поліграфкнига» Держкомвидаву УРСР, вул. Воровського, 24.