МАТЕМАТИЧНА ХРЕСТОМАТІЯ

ДЛЯ 6 — 8 КЛАСІВ

а редакцією заслуженого діяча науки УРСР
рофесора О. С. Смогоржевського

орядник Т. М. Хмара

51(075)
Х64

7 — 6 — 3
№ 37 — БЗ № 11—1968

Юний друже!

Якщо ти вчишся в VI, VII або VIII класі, то сміливо бери в руки цю книжку. Знання з математики, які ти здобув за попередні роки, допоможуть зрозуміти все, що в ній написано. Але попереджаємо тебе відразу ж, що ця книжка не для легкого читання. Над деякими її статтями треба вдумливо і зосереджено попрацювати з олівцем у руках — дещо довести, а може, й виконати деякі геометричні побудови. Нехай тебе не лякає, коли яка-небудь стаття при першому читанні виявиться важкою. Повернись до неї пізніше або розглянь її разом з друзями з математичного гуртка, або звернись по допомогу до вчителя математики.

Статті цієї хрестоматії можна читати незалежно одну від одної. Для кращого розуміння деяких з них дамо кілька порад.

Перш ніж прочитати статтю «Паскалів арифметичний трикутник», корисно ознайомитися з уривком із книжки І. С. Сомінського «Метод математичної індукції». Статті четвертого розділу «Як обчислюють істину і проектують автомати, або що таке математична логіка», «Алгоритми» та «Математичні машини і програмування» найкраще читати в тій послідовності, в якій їх розміщено.

Матеріал цієї книжки базується на шкільному курсі математики, але не повторює його. Ознайомлення з ним допоможе тобі розширити і поглибити знання з математики, набути деяких уявлень про її окремі галузі.

Ця хрестоматія містить статті, які написані спеціально для неї, а також уривки з популярних книжок. Якщо наведений уривок зацікавить тебе, прочитай усю книжку. Назву її ти знайдеш у змісті в кінці хрестоматії. Які ще існують книжки з того чи іншого питання, можна довідатись з анотованого списку літератури «Що читати з математики».

Цікавий, невеликий за обсягом матеріал і задачі вміщено на полях хрестоматії. На полях можна знайти і розв'язання багатьох задач.

Сподіваємось, що наша книжка тебе зацікавить.

Чи сподобалася вона тобі? Які ще питання з математики тебе цікавлять? Напиши нам про це на адресу: м. Київ, 53, Ю. Коцюбинського, 5, видавництво «Радянська школа», редакція математики.

ЧИМ ПРИВАБЛЮЄ МАТЕМАТИКА?

Юнак закінчує середню школу... Перед ним відкриваються неосяжні обрії його майбутнього життя, життя дорослої людини, коли він сам вибиратиме шлях, яким піде далі. Що ж вибере він? Чи відразу порине в трудову діяльність, чи не залишить учнівської парти, пересівши лише на лаву вищої школи? І що він там вивчатиме? Адже наук багато, і вони різнобарвні, як кольори веселки. Кинемо погляд на деякі з них.

Надбання агрономічних знань — копітка справа, але агроном пишається тим, що його знання дають безпосередню, зриму користь людям, що наслідки його праці — гори зерна, буряків та інших культур — є джерелом існування людини.

Дуже приваблюють медичні науки з їх благородним призначенням полегшувати страждання хворих, боротися за життя людини.

А ось ентомологія — наука про комах. Серед цих дрібних, ефемерних істот є чимало корисних, але багато з них завдають іноді величезних збитків сільському господарству. Ентомологи шукають надійних засобів боротьби з цими шкідниками, а для цього треба вивчити їх життя, інстинкти, виявити їх природних ворогів. Багато цікавого й захопливого є в цій науці!

Перелічені науки спаяні з природою, в них повсякчас відчувається пульс життя.

Що ж являє собою порівняно з ними математика? Чим може привабити ця «суха» наука? Тим, що без її допомоги, без використання її потужного апарату неможливий розвиток техніки і більшості наук. Тим, що вона, у зв'язку з потребами практики і в результаті свого внутрішнього розвитку, ставить нові й нові задачі, розв'язання яких потребує творчої ініціативи, повного напруження розумових здібностей, уміння відшукувати неходжені шляхи.

Якої форми треба надати дзеркалу телескопа, щоб зробити чіткими зображення в ньому зір і планет? Які обриси крил літака найвигідніші? Як найкраще систематизувати статистичні матеріали? Чому при коливанні пружних мембран (пластинок), покритих тонким шаром піску, на них утворюються досить красиві візерунки, що називаються за ім'ям ученого, який їх виявив, фігурами Хладні? Математика дає вичерпні відповіді на ці і на багато інших практичних питань.

За допомогою математичних розрахунків було навіть відкрито нове космічне тіло. Коли астроном Гершель відкрив планету Уран, виявилося, що на її рух впливає якесь тіло з великою масою, можливо, невідома ще планета. Ураховуючи цей вплив, французький учений Левер'є обчислив

елементи орбіти цієї планети (пізніше її назвали Нептуном) і її місце на небі, відкривши її, як хтось влучно висловився, «на кінчику свого пера». Коли в Берлінській астрономічній обсерваторії одержали повідомлення Левер'є, того самого вечора знайшли нову планету близько від визначеного ним місця. Це був великий тріумф математики і астрономії.

Трапляється, що давно відомі математичні поняття знаходять нові несподівані застосування. Наприклад, основні властивості еліпса відкрив і описав видатний геометр античної Греції Аполлоній, що жив у III ст. до нашої ери. Минуло близько двох тисяч років, і еліпс виступив на науковій арені в новій ролі: славетний німецький астроном Кеплер виявив, що орбіта Марса (чи будь-якої іншої планети сонячної системи) є еліпс, в одному з фокусів якого знаходиться Сонце. Чому ж планета «вибирає» такий шлях? Досліджуючи це питання, геніальний англійський учений Ньютон відкрив закон всесвітнього тяжіння і довів, що еліптичний рух планет є наслідком цього закону.

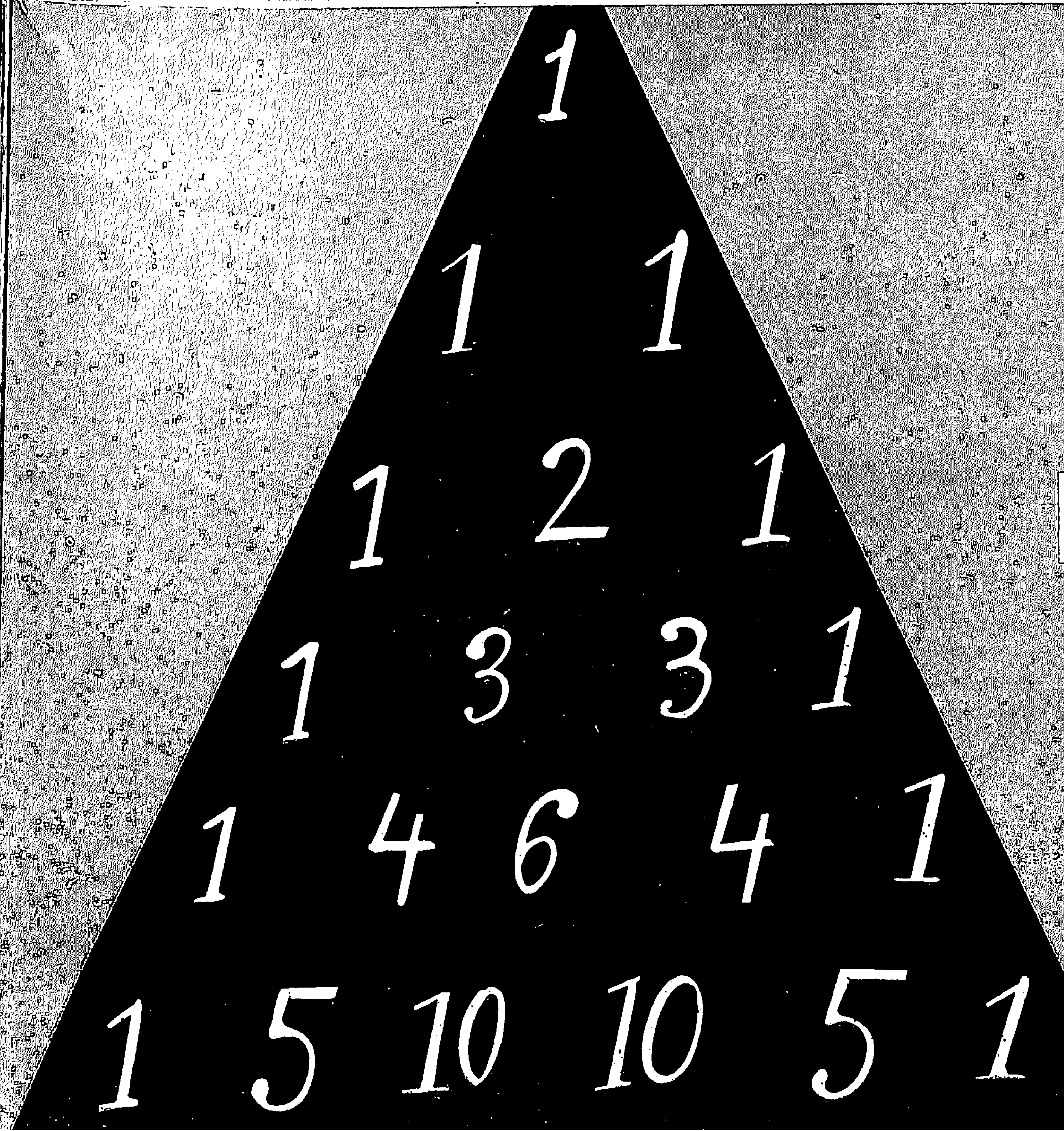
Але найбільш чарує математика бездоганною, неспростовною логікою своїх глибоко продуманих теорій, стрункість і витонченість яких дають її любителям велике естетичне задоволення. Саме в цій особливості математики криється її привабливість. У наш час наукову роботу, зокрема з математики, ведуть не поодинокі особи, а великі колективи науково-дослідних інститутів і вищих шкіл. У Радянському Союзі над розв'язанням математичних проблем працюють десятки тисяч кваліфікованих учених.

Останніми роками математика озброїлась потужною технікою — швидкодіючими електронними обчислювальними машинами, значення яких для розвитку математики важко переоцінити. Дещо про ці машини ви прочитаєте в цій хрестоматії.

Сучасна математика широко розгалужена. Вона розпадається на багато окремих наук, які за своїм змістом і методами досить далекі одна від одної. Назвемо з них теорію чисел, вищу алгебру, нарисну геометрію, теорію ймовірностей, математичну статистику, теорію множин, історію математики. Дальший перелік нічого не говоритиме читачеві без докладних пояснень, яких ми тут не можемо подати. Скажемо лише, що для осіб з різними уподобаннями, які вирішили вивчати математику, є великий вибір математичних наук на будь-який смак.

У цій книжці зібрано статті різноманітного математичного змісту. Сподіваємося, що вони зацікавлять юного читача і, можливо, прищеплять йому любов до математики.

О. С. Смогоржевський

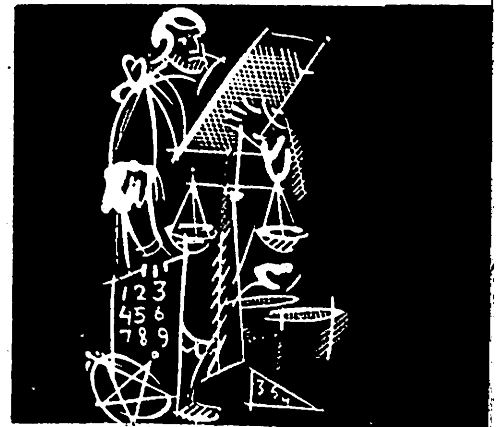


1

Л. П. МАГНІЦЬКИЙ І ЙОГО «АРИФМЕТИКА»

1703 рік є важливим в історії математичного розвитку в Росії. У цьому році було видано величезну книгу під довгим заголовком:

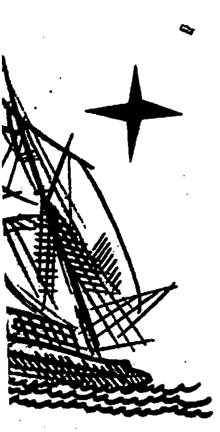
Арїѳметїка, сирѣчь наука числителнаѧ.
Сразныхъ дїалектωвъ на славенскїй ѧзыкъ преведенаѧ, и во едино собрана, и на двѣ книги раздѣлена.
Сочинисѧ сїѧ книга чрез труды Леонтїа Магницкагω



Книга ця містить основи математичних знань того часу: арифметики, алгебри, геометрії і тригонометрії. В кінці книги є розділ з численними таблицями, приєвячений морській справі. Більшу частину книги, як показує її заголовок, автор приділив арифметиці.

Використавши, крім російської рукописної літератури, все, що здавалось йому корисним, з іноземних джерел, Магніцький весь матеріал пристосовує до потреб російського читача і надає своєму викладові багато в чому характеру російських рукописних книг, у зв'язку з якими й слід розглядати «Арифметику» Магніцького.

За Петра І, коли книга побачила світ, в Росії швидко зростали промисловість і торгівля, відбувався переворот у військовій техніці.



Країні потрібно було тепер освічених людей значно більше, ніж у попередні десятиріччя. Було створено ряд технічних навчальних закладів, першим з яких була школа математичних і навігацьких наук, відкрита в Москві, в Сухаревій башті, в 1701 році.

На учнів цієї школи насамперед була розрахована книга Магніцького. Вона була відповіддю палкого патріота на запити батьківщини.

Протягом півстоліття книга була посібником для всіх росіян, які прагнули до математичної освіти.

Про автора цієї чудової книги ми знаємо дуже небагато.

Леонтій Пилипович Магніцький народився 9 червня 1669 року, помер у 1739 році.

Надгробний напис на могилі Магніцького, зроблений його сином, розповідає, що «Петро І многократно розмовляв з ним про математичні науки і був такий захоплений глибокими знаннями його, що називав його магнітом і наказав писатись Магніцьким». «Яке він мав прізвище до цього, то навіть близьким його не відомо», читаємо в ранньому його життєписі.

Де і як Магніцький вивчав математику, ми не знаємо. Довгий надгробний напис говорить: «Він навчився наукам дивним і нелегковірогідним способом».

Цілком імовірно, що Магніцький був самоуком, і, можливо, саме через те йому пощастило написати книгу, яка стала корисною для багатьох самоуків. В усякому разі він мав на увазі самоуків, коли писав у передмові своєї книги:

И мню аз, яко то имать быть,
Что сам себя всяк может учить.

Але Магніцький знав мови латинську, грецьку, німецьку та італійську і зазначає, що він матеріал для своєї книги

Из многих разных книг собравше —
Из грецких убо и латинских,
Немецких же и итальянских.

Великий російський учений М. В. Ломоносов називав «Арифметику» Магніцького і «Граматику» Мелетія Смотрицького «вратами своєї вчености». «Арифметику» Ломоносов вивчив напам'ять.

«Вратами вчености» ця книга була для всіх росіян першої половини XVIII століття, які прагнули до освіти.

Магніцький розумів як потребу російської громадськості в математичній літературі, так і те, що не можна російському читачеві пропонувати переклад іноземної математичної книги, яка не враховує багатовікового самобутнього розвитку російського народу.

Саме тому Магніцький широко використав російську рукописну літературу, додаючи до неї досягнення світової наукової думки, перероблені і пристосовані до потреб російського читача, і підкреслював, що

Разум весь собрал и чин[1]
Природно русский, а не немчин.

У результаті всього цього виник перший оригінальний російський підручник математики. Російська математична література не знає іншої книги, яка мала б таке значення в історії російської математичної освіти.

Написана як підручник для спеціальної школи, книга Магніцького набула поширення серед багато більшого кола споживачів, як цього й сподівався автор:

И желаем, да будет сей труд
Добре пользовать русский весь люд.

Магніцький до самої своєї смерті був учителем навігацької школи — цього першого розсадника математичних і морських знань у Росії.

Фактичний начальник школи дяк Курбатов, що сам походив з кріпаків, пише у звіті за 1703 рік:

«По 16 июля прибрано и учатся 200 человек. Англичане учат их науке чиновно, а когда временем и загуляются, или по своему обыкновению, по часту и долго проспят. Имеем еще определенного им помоществователем Леонтия Магницкого, который непрестанно при той школе бывает и всегда имеет тщание не только к единому ученикам в науке радению, но и к иным ко добру поведениям...»

З цієї характеристики бачимо, що роль Магніцького в навігацькій школі була значно більша, ніж до того зобов'язувала його скромна посада учителя початкових класів.

[1] «Зібрав і виклав у порядку»; у книгах XVIII століття часто зустрічається зворот: «математичний чин» у розумінні «математичний виклад».

За допомогою однакових цифр

Нехай треба написати якесь число за допомогою найменшої можливої кількості однакових цифр. При цьому можна використовувати знаки чотирьох арифметичних дій, дужки і дію піднесення до степеня.

Задачу розв'язуємо для кожної цифри окремо. Наприклад, для числа 48 матимемо:

одиниці: $(11+1)(1+1+1+1) = 48$ (використано 7 цифр);

двійки: $(22+2)\cdot 2 = 48$ (використано 4 цифри);

трійки: $3\cdot 3^3 - 33 = 48$ (використано 5 цифр);

четвірки $44+4=48$ (використано 3 цифри);

п'ятірки: $55-5-(5+5):5=48$ (використано 6 цифр);

шістки: $6\cdot 6+6+6=48$ (використано 4 цифри);

сімки: $7\cdot 7-7:7=48$ (використано 4 цифри);

вісімки: $8\cdot 8-8-8=48$ (використано 4 цифри);

дев'ятки: $(9\cdot 9-9)(9+9):(9+9+9)=48$ (використано 8 цифр).

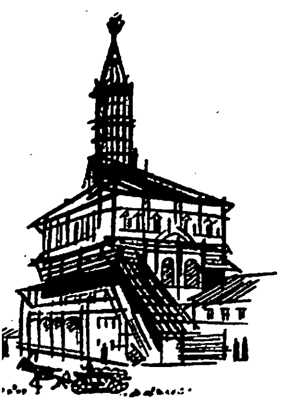
Пропонуємо читачеві розв'язати такі задачі для чисел 20, 25, 36, 50, 100. Іншим видом таких вправ є такі задачі: написати підряд якомога більше натуральних чисел за допомогою заданого числа певних цифр. При цьому, як і в попередній задачі, можна використовувати дужки, знаки арифметичних дій і дію піднесення до степеня.

(Див. стор. 27).

Літературна діяльність Л. Магніцького не обмежилась його «Арифметикою».

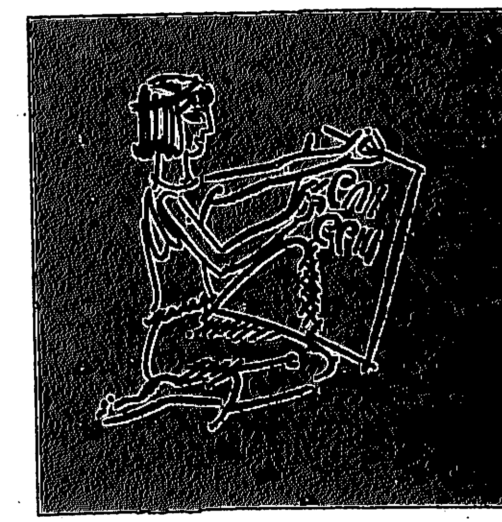
У тому самому 1703 році Магніцький спільно з своїми англійськими товаришами видає — вперше російською мовою — «Таблицы логарифмов и синусов, тангенсов и секансов к научению мудролюбивых тщателей».

У 1722 році вони ж видали мореплавний довідник: «Таблиц горизонтальных северные и южные широты». Коли Андрієві Фархварсону в 1737 році було присвоєно чин бригадира, офіціальна характеристика вказувала: «Понеже через него первое обучение математики в России введено». Ще з більшим правом ці слова можна віднести до першого російського вчителя математики в Росії — Леонтія Пилиповича Магніцького.



СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ

Загальний спосіб письмового зображення чисел за допомогою спеціальних знаків у математиці називають нумерацією, або системою числення. Отже, мова йтиме про різні системи числення. Окремі народи в різний час користувалися різними способами називання і записування чисел. Десяткова нумерація, якою ми тепер користуємось, є результатом тривалого історичного розвитку.



Різні народи користувались різними лічильними групами, але більшість народів застосовувала десяткові групи лічби, в основі якої лежала лічба за допомогою пальців.

Лічба групами по два (попарно) спостерігалася, наприклад, в остров'ян західної частини Торресової протоки.

Використання при лічбі пальців однієї руки привело людей до створення п'ятіркового числення, сліди якого ми знаходимо зокрема, в римській письмовій нумерації.

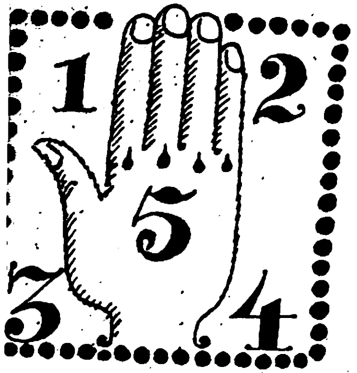
В окремих народів, наприклад чукчів, можна спостерігати користування усною п'ятірковою системою числення ще й тепер.

Дослідження вчених показують, що в деяких народів існувала дванадцяткова система числення. І тепер ми знаходимо її сліди в лічбі предметів дюжинами (дюжина ложок, виделок, гудзиків тощо). На Заході ще й досі, крім дюжин, користуються «великою дюжиною» — гроссом. Гросс — це дюжина дюжин, тобто 144.

Ацтеки — жителі Мексіки — лічили двадцятками, а спосіб записування чисел у них відповідав лічбі п'ятірками. Жителі півострова Юкатан (народ майя) також лічили двадцятками.

Сліди лічби двадцятками залишилися в сучасній французькій мові, де, наприклад, числівник вісімдесят («quatre-vingts») у дослівному перекладі означає «чотири двадцять» (чотири двадцятки). Числівник дев'яносто («quatre-vingts-dix») означає «чотири двадцять десять».

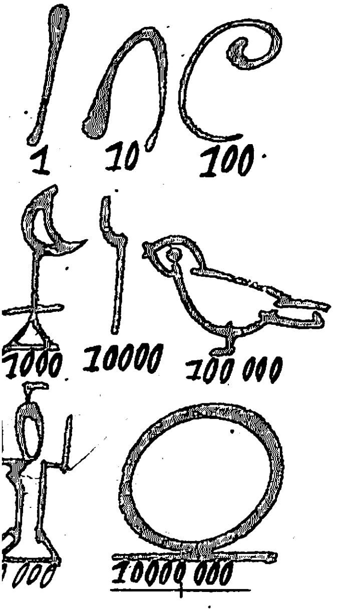
Групами по шістдесят лічили в стародавньому Вавілоні. Це відбилося на вавілонській системі мір, в якій відношення одиниць вимірювання дорівнювало 60. Від вавілонян веде свій початок існуюча система мір часу і кутів.



Першими позначеннями чисел були зарубки на паличках (у Росії їх називали бирками). Зокрема, у різних народів таким способом «записувалися» боргові зобов'язання, а пізніше й податки. Паличку з нанесеними на ній нарізами, що відповідали сумі боргу або податку, розколювали пополам і давали одну половину боржникові, а другу — позикодавцеві або, відповідно, платникові і казначейству. При розплаті обидві половинки палички прикладали одну до одної і таким способом перевіряли правильність визначення сум, які треба було повернути. В Англії цей спосіб записування податків існував до недавнього часу (докладніше див.: І. Депман, Розповіді про математику, «Радянська школа», 1957, стор. 28—29).

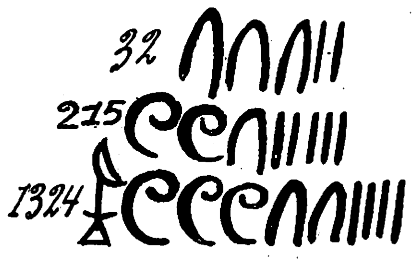
Для запам'ятання чисел люди користувалися також вузлами на вірьовках. Відомо, наприклад, що деякі негритянські та індійські племена користувались шнурами з вузлами, кількість яких відповідала кількості голів худоби. Шнури з вузлами використовували також для відліку часу. У міскітів (Нікарагуа) є звичай, за яким чоловік, збираючись у дорогу, залишає жінці шнур із стількома вузлами, скільки днів він буде відсутній.

Зарубки на бирках і вузли на шнурах пов'язувалися з лічбою окремих одиниць. З розвитком письма з'являються окремі позначення й малюнки для груп одиниць. Наприклад, число п'ять зображали малюнком руки, число десять — відповідно двох рук. Пригадайте римське V, адже це не що інше, як малюнок долоні. В Єгипті для позначення груп одиниць застосовувались спеціальні ієрогліфи.



В основі записування чисел за єгипетською нумерацією лежить повторюваність знаків, що позначають певні розряди, і додавання розрядних одиниць.

Наприклад, число 4 зображали як IIII і т. д.

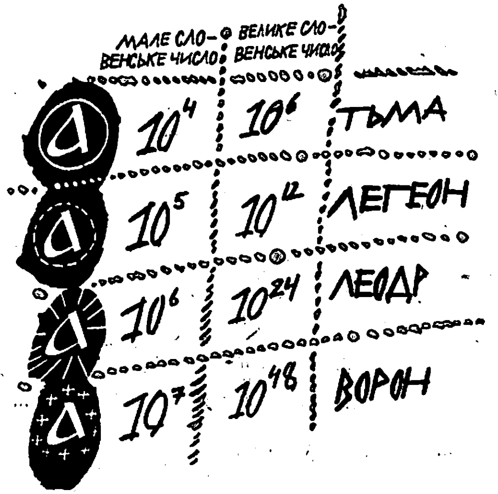


Окремі народи використовували як числові знаки букви алфавіту. Під впливом алфавітної нумерації греків наші предки слов'яни записували числа за допомогою букв слов'янського алфавіту, над якими ставили спеціальний знак — титло.

Наприклад, число 1967 у слов'янській нумерації мало такий вигляд, як на рисунку, поданому на стор. 17 внизу зліва.

Крім так званого «малого числа», яке доходило до 10 000 і вживалося в господарському житті, у слов'ян існувала ще система «великого числа». Для позначення цих великих чисел користувалися тими самими буквами, що й для позначення простих одиниць, але кожний вищий розряд обводили відповідним бордюром.

Наведені вище способи записування чисел мають великі незручності. Вони неекономні навіть для записування невеликих чисел, а про великі



2 7-237

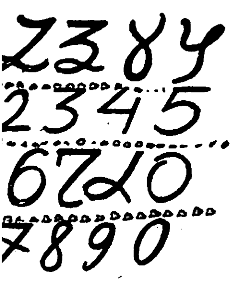
числа — нема чого й говорити. Адже кожний розряд потребує тут спеціального знака.

Найкраще розв'язали це питання індійці. Вони винайшли спосіб записування чисел натурального ряду за допомогою небагатьох знаків, створивши в VI ст. н. е. десяткову нумерацію, якою користуються тепер у всьому світі.

Індійську нумерацію розвинув у IX ст. видатний узбецький учений Мухаммед, син Муси з Хорезма, у рукописі «Арифметика Індорум», написаному арабською мовою.

В Європі арабсько-індійська система нумерації стала відома на початку XIII ст. завдяки італійському вченому Леонардо Пізанському, а повне визнання вона дістала тільки в XV—XVI ст. У Росії в XVII ст. індійською системою записування чисел користувалися вже для нумерації сторінок у книгах, на золотих монетах, в окремих друкованих і рукописних працях.

Відомий вітчизняний підручник «Арифметика» Л. П. Магніцького (1703 р.) викладений на основі арабсько-індійської системи числення.



ПРО ІНДІЙСЬКУ СИСТЕМУ ЧИСЛЕННЯ

Індійська система числення, якою ми користуємось, характеризується двома основними ознаками: по-перше, вона десяткова, по-друге,— позиційна.

Пояснимо докладніше суть цих ознак.

Ще з першого класу ви знаєте, що лічба ведеться десятками: десять простих одиниць утворюють один десяток, десять десятків — одну сотню, десять сотень — одну тисячу і т. д. Спосіб лічби, при якому десять одиниць нижчого розряду утворюють одну одиницю вищого розряду, і є основною ознакою д е с я т к о в о ї системи числення, або десяткової нумерації.

Система числення називається п о з и ц і й н о ю, якщо вона грунтується на принципі помісцевого значення цифр — знаків, якими зображають числа. Вдумайтесь у відомий вам спосіб записування чисел і ви помітите, що в ньому та сама цифра має різне значення залежно від місця, яке вона займає в зображенні числа.

Наприклад, цифра 2 в записі числа 2222 має чотири різних значення. Крайня справа двійка зображує тут прості одиниці, цифра 2, яка стоїть зліва від неї, зображує десятки, а далі, відповідно, маємо дві сотні і дві тисячі.

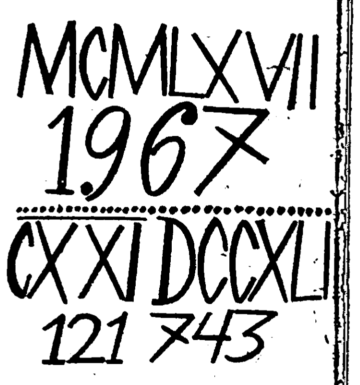
Положення (позиція) цифр у записі числа істотно впливає на його величину. Так, числа 871, 817, 781, 718, 187 і 178 не однакові за величиною, бо в їх записі цифри 1, 7 і 8 займають різні місця.

У десятковій позиційній системі числення назви всіх натуральних чисел до 999 мільйонів утворюються за допомогою лише 13 слів: один, два, три, чотири, п'ять, шість, сім, вісім, дев'ять, десять, сто, тисяча, мільйон. У деяких назвах слово «десять» скорочується в «дцять».

Щоб записати будь-яке число в десятковій системі, досить десяти різних знаків — цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Порівняймо запис будь-якого досить великого числа в індійській і римській системах нумерації. Ви знаєте, що в римській системі для позначення чисел застосовують такі символи:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Результат множення на тисячу позначається рискою вгорі: $\overline{\text{VI}}$ = = 6000. Отже, наприклад, запис числа 287 649 у римській системі нумерації матиме вигляд: $\overline{\text{CCLXXXVII}}\text{DCXLIX}$. Замість шести знаків, якими зображається число 287 649 у позиційній (десятковій) системі, для зображення цього самого числа в непозиційній системі потрібно було 15 знаків.



Переваги позиційної системи нумерації виявляються не тільки в записуванні чисел, а й у виконанні дій над ними. Упевніться в цьому, спробувавши виконати на письмі дії над невеликими числами, записаними римськими цифрами. Ви побачите, що по суті тут доводиться виконувати дії в умі, бо застосовувати при такому записуванні чисел відомі нам способи письмових обчислень неможливо.

Навчившись в ранньому дитинстві записувати числа, ми потім ніколи не задумуємось над тим, який важливий був винахід позиційної десяткової системи числення і скільки труднощів довелося подолати, поки була знайдена письмова нумерація на основі помісцевого значення цифр. З цього приводу відомий французький математик П'єр Лаплас (1749—1827) сказав:

«Думка зображати всі числа дев'ятьма знаками, надаючи їм, крім значення за формою, ще значення за місцем, така проста, що саме через цю простоту важко зрозуміти, яка вона дивовижна. Як нелегко було прийти до цього способу, ми добре бачимо на прикладі видатних геніїв грецької вченості Архімеда і Аполлонія, для яких ця думка залишилася прихованою».

СИСТЕМНІ ЧИСЛА

Чи можна створити довільну недесяткову позиційну систему числення? Позитивну відповідь на це питання дав французький математик Б. Паскаль ще в 1665 р. Він стверджував, що за лічильну групу, або за основу системи числення, можна взяти будь-яке натуральне число. Покажемо, що, користуючись принципом помісцевого значення цифр, можна створити різні позиційні системи числення, відмінні від десяткової.

Будемо давати назву системі числення залежно від її основи (лічильної групи), тобто числа одиниць, що становлять одиницю дальшого, вищого порядку (розряду). Отже, якщо лічба ведеться двійками, то основою системи числення є число два, і систему числення називатимемо д в і й к о в о ю. Якщо за основу взято число 4, то таку систему називатимемо ч е т в і р к о в о ю і т. д.

Побудова будь-якої системи числення грунтується на принципі: якесь певне число одиниць становить одну нову одиницю дальшого, вищого порядку, або розряду.

Якщо, наприклад, за основу взяти 5, то в такій системі 5 одиниць одного розряду становлять одиницю вищого розряду. Одиницею II розряду є п'ятірка, відповідно III розряду — п'ять п'ятірок, тобто 5^2, і т. д.

Число, позначене за допомогою певної позиційної системи числення, називається с и с т е м н и м.

Розглянемо загальний спосіб системного записування натурального числа. Щоб краще зрозуміти його, почнемо з загальної форми записування числа за десятковою нумерацією.

Ви знаєте, що будь-яке натуральне число N за десятковою системою числення розкладається на прості одиниці, десятки, сотні, тисячі і т. д., причому одиниць кожного розряду менше десяти. Нехай число N містить a_0 простих одиниць, a_1 десятків, a_2 сотень, a_3 тисяч і т. д.; тоді число, яке має $n+1$ розрядів, можна записати так:

$$N = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0.$$

Наприклад, користуючись цією формою зображення чисел, можна записати:

$$724 = 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 4;$$
$$3571 = 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 1;$$
$$203\,405 = 2 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5.$$

Навпаки:

$$8 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 4 = 82\,574;$$
$$3 \cdot 10^6 + 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^2 + 1 = 3\,010\,201.$$

Якщо додержуватись принципу помісцевого значення цифр, то число N, що має $n+1$ розрядів, за п'ятірковою системою можна зобразити так:

$$N = a_n 5^n + a_{n-1}5^{n-1} + \ldots + a_3 5^3 + a_2 5^2 + a_1 5 + a_0,$$

де кожне з чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ менше п'яти.

Для зображення числа за п'ятірковою системою досить п'яти цифр: 0, 1, 2, 3, 4. У випадку вісімкової системи для зображення числа потрібно 8 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Найменше цифр (0 і 1) потрібно для зображення чисел за двійковою системою числення. У двійковій системі одиниця кожного старшого розряду дорівнює двом одиницям попереднього розряду. Щоб записати число в двійковій системі, треба подати його у вигляді суми послідовних степенів числа 2. Наприклад, сума

$$1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 +$$
$$+ 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1$$

є зображенням десяткового числа 327 (перевірте!).

Користуються і такою формою записування:

$$327_{10} = 101\,000\,111_2.$$

Числа 10 і 2, які стоять унизу біля зображень відповідних чисел, показують основи систем, в яких вони записані.

У загальному випадку будь-яке ціле число N у певній системі числення, за основу якої взято число k, можна єдиним способом подати у вигляді суми степенів основи (записаної в десятковій системі) з коефіцієнтами $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, що дорівнюють цифрам вихідного числа:

$$N = a_n k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \ldots + a_3 k^3 + a_2 k^2 + a_1 k + a_0.$$

Вправи на недесяткові системи числення

У поданих нижче вправах записано додавання в системах, відмінних від десяткової. Основу системи щоразу зазначаємо. Замість цифр записано букви або інші знаки так, що та сама буква (або знак) завжди означає лише одну цифру, а різні букви — різні цифри. Замість букв або знаків поставте потрібні цифри.

1) *АР + АКР = МІРИ* (система шісткова).

2) *ДУБ + ДУБ + ДУБ + ДУБ + ДУБ = ЛІС* (система шісткова).

3)
```
  □○△⬡
+ ⏢□○⬡
  ────
  △⏢□○
```
(система вісімкова)

4) *ДУГА + ДУГА + ДУГА = ОВАЛ* (система вісімкова).

5) *СТАРТ + СПУРТ = УСПІХ* (система дев'яткова).

6) *ВОДА + ВОДА + ВОДА = ОКЕАН* (система дев'яткова).

7) *ОЦЕ ВЖЕ ДУЖЕ ВАЖКО* (система дев'яткова; останнє число є сумою трьох перших).

8) *КОЛО + КОЛО = ДОТИК* (система дванадцяткова).

9) *А, Б, В, Г, Д, Е* — різні цифри. В якій системі числення запис *АБВГД + ДГВБА = ЕЕЕЕЕ* без урахування перестановок доданків має один розв'язок?

ільки разів число 1000$_5$ більше від ла 134$_5$?

кій системі лення:

21 12 — 2 2

$\times$ 231 54 — 1144 1375 — 15114

Серед цифр a_0, a_1, a_2, ..., a_n можуть бути і рівні між собою, але кожна з них являє собою невід'ємне ціле число, менше за k.

Обчисливши цю суму за правилами дій у десятковій системі числення, дістанемо десяткове число, еквівалентне даному числу, записаному в системі числення з основою k.

Зауважимо, що для зображення чисел за системою, в якій основа перевищує 10, не досить цифр 0, 1, 2, ..., 9. Для записування чисел за будь-якою системою числення треба мати нуль і стільки значущих цифр, скільки одиниць без однієї містить основа числення.

Так, для записування чисел у системі числення з основою 12, крім загальновживаних десяти цифр, потрібні ще два символи — цифри «десять» і «одинадцять». Позначимо їх відповідно буквами c і d. Тоді число $2dc7$, записане в дванадцятковій системі числення, являтиме собою таке десяткове число:

$$2 \cdot 12^3 + 11 \cdot 12^2 + 10 \cdot 12 + 7 =$$
$$= 2 \cdot 1728 + 11 \cdot 144 + 10 \cdot 12 + 7 = 5167.$$

Для основи системи не потрібний спеціальний знак. У будь-якій системі, побудованій за принципом помісцевого значення цифр, основа системи зображається одиницею з нулем.

Початок натурального ряду, записаного в різних системах числення, має такий вигляд:

у десятковій: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...;
у двійковій: 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, ...;
у трійковій: 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, ...;
у четвірковій. 1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, ...;

і т. д.

Якщо відомі цифри, що використовуються в певній системі числення, то послідовні цілі числа цієї системи можна записувати за таким правилом. Для утворення наступного за даним числа крайню праву цифру даного числа замінюють наступною за величиною цифрою. Якщо якась цифра після заміни стала нулем, то замінюють наступною цифру, що стоїть ліворуч від крайньої правої.

За цим правилом у п'ятірковій системі числення за числом 3043 йтиме число 3044, а за числом 3044 — число 3100.

У двійковій системі крайніми справа цифрами в записі числа є 0 або 1. Отже, 0 замінюємо на 1, а 1 на 0. Так, за числом 100110 ітиме число 100111, а за числом 100111 — число 101000.

Дуже просто виконуються в двійковій системі числення арифметичні дії.

Слід мати на увазі, що відомі правила дій у десятковій системі числення зберігають силу і в будь-яких інших позиційних системах числення, але для кожної системи треба користуватися «своїми» таблицями додавання і множення одноцифрових чисел. Для двійкової системи ці таблиці мають вигляд:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Приклади:

$$\begin{array}{r} 1001101 \\ +\,11100111 \\ \hline 100110100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 110101 \\ \times\,11001 \\ \hline 110101 \\ 110101 \\ 110101 \\ \hline 10100101101 \end{array}$$

Як видно з розв'язання другого прикладу, множення чисел у двійковій системі зводиться до переписування множеного у відповідних розрядах і наступного додавання. При наявності в множнику нулів множене зсувають уліво на відповідну кількість розрядів. Віднімання в двійковій системі числення виконують так само, як і в десятковій. Приклад:

$$\begin{array}{r} 11011001 \\ -\,1100101 \\ \hline 1110100 \end{array}$$

Ділення виконують у такій самій послідовності, як ділення десяткових чисел у стовпчик. Якщо в процесі ділення дільник виявляється більшим від діленого, то в частці записують цифру 0. Якщо дільник менший від діленого, то в частці записують 1. Приклад:

$$\begin{array}{r|l} 101100 & 100 \\ \cline{2-2} -100 & 1011 \\ \cline{1-1} 110 & \\ -100 & \\ \cline{1-1} 100 & \\ -100 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

В ЯКІЙ СИСТЕМІ ЧИСЛЕННЯ ПОСЛІДОВНИМИ НЕПАРНИМИ ЧИСЛАМИ Є:
13, 10, 12, 14, 21, ...

В ЯКІЙ СИСТЕМІ ЧИСЛЕННЯ ПОСЛІДОВНИМИ ПАРНИМИ ЧИСЛАМИ Є:
2, 11, 20, 22, 101, ...

В ЯКІЙ СИСТЕМІ ЧИСЛЕННЯ ЗАПИСАНА ДАНА ПОСЛІДОВНІСТЬ ПРОСТИХ ЧИСЕЛ?
2, 3, 11, 13, 23, ...

$$\frac{17_{10}}{18_{10}} = \frac{15_?}{16_?}$$

В ЯКІЙ СИСТЕМІ?

Отже, ділення двійкових чисел зводиться до віднімання дільника від відповідних розрядів діленого.

За записом числа в двійковій системі легко визначити, чи це число парне, чи непарне. Парне число закінчується нулем, а непарне — одиницею.

У різних системах числення ознаки подільності, взагалі кажучи, різні. Але, якщо, наприклад, у десятковій системі число закінчується цифрою 5, то в системі числення з основою 2, воно також буде кратне 5. Адже кількість простих одиниць у числі не змінилася від того, що воно записане по-іншому.

Коли ми кажемо «цілі числа в двійковій системі числення» або «цілі числа в десятковій системі числення» і т. д., то маємо на увазі ту саму множину цілих чисел, записаних різними способами — в різних системах числення.

Наприклад, символи 1111101 і 125 є двома різними способами записування того самого цілого числа в двійковій і десятковій системах числення.

Завдяки тому, що в двійковій системі числення використовується лише два знаки — 0 і 1, вона широко застосовується в електронних обчислювальних машинах, бо в їх основу покладені схеми, що можуть перебувати тільки в двох стійких станах (замкнений або розімкнений контакт; намагнічена або розмагнічена певна ділянка магнітної стрічки тощо): одному з цих станів відповідає одиниця, а другому — нуль.

Двійкова система числення має переваги над іншими системами і в техніці виконання операцій над числами. Її застосування створює також можливості для використання методів математичної логіки, бо наявність двох протилежних можливостей «так» і «ні» відповідає логічним висловленням «правильне» і «хибне»[1].

ій системі
лення?
+2=11
−12=12
·2=32

ПЕРЕХІД ВІД ОДНІЄЇ СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ ДО ІНШОЇ

За допомогою десяти цифр десяткової системи можна зобразити будь-яке число в новій системі, основа якої менша за 10. Нехай, наприклад, число 345 десяткової системи треба подати у вісімковій системі. Запишемо це так: $345_{10} = x_8$. Визначимо спочатку, скільки одиниць другого розряду за вісімковою системою можна утворити з 345 простих одиниць. Для цього 345 поділимо на 8. У частці дістанемо 43.

[1] Див. статтю в цьому збірнику «Як обчислюють істину і проектують автомати, або що таке математична логіка».

$$345 : 8 = 43 \text{ (одиниці II розряду)}.$$

Перша остача: 1 одиниця I розряду.

Знайдемо, скільки одиниць III розряду міститься в 43 одиницях II розряду:

$$43 : 8 = 5 \text{ (одиниць III розряду)}.$$

Друга остача: 3 одиниці II розряду.

Отже, найвищим у цьому числі буде III розряд (5 одиниць), потім треба записати II розряд (3 одиниці) і, нарешті, I розряд (1 одиниця).

Маємо: $345_{10} = 531_8$.

Щоб перетворити число десяткової системи числення в число нової системи, треба поділити його на основу нової системи, нову частку знову поділити на основу нової системи і т. д., поки дістанемо частку, меншу від основи нової системи. Остання частка і послідовні остачі, записані в зворотному порядку, будуть розрядними числами шуканого числа. Запишемо те саме число 345 десяткової системи в двійковій системі, тобто знайдемо $345_{10} = x_2$.

```
345 (I) | 2
1        172 (II) | 2
         0         86 (III) | 2
                   0         43 (IV) | 2
                             1        21 (V) | 2
                                      1       10 (VI) | 2
                                              0        5 (VII) | 2
                                                       1        2 (VIII) | 2
                                                                0          1 (IX)
```

Найвищим розрядом у шуканому записі числа буде дев'ятий. Виписуючи за ним послідовні остачі в зворотному порядку, дістанемо:

$$345_{10} = 101011001_2.$$

Якщо 4·4=20, то чому дорівнює 5·5 (у тій самій системі числення)?

У скільки разів збільшиться число 356_7, якщо приписати до нього один нуль?

У скільки разів 7210_8 більше від 721_8?

З ЯКИХ СИСТЕМАХ
ИСЛЕННЯ ЗАПИСАНІ
ЦІ ТАБЛИЦІ
ИНОЖЕННЯ:

	2	3	4
2	4	11	13
3	11	14	22
4	13	22	31

	2	3	4	5	6	7
	4	6	10	12	14	16
	6	11	14	17	22	25
	10	14	20	24	30	34
	12	17	24	31	36	43
	14	22	30	36	44	52
	16	25	34	43	52	61

2	3	4	5	6
4	6	11	13	15
6	12	15	21	24
11	15	22	26	33
13	21	26	34	42
15	24	33	42	51

ОБЕРНЕНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ

Перейти від записування числа в будь-якій системі числення до записування цього числа в десятковій системі можна двома способами.

Спосіб I. Нехай треба знайти: $3142_5 = x_{10}$.

Найстаршим у цьому записі числа є четвертий розряд.

Одиниця IV розряду в п'ятірковій системі дорівнює 5 одиницям III розряду, а 3 одиниці IV розряду містять $3 \times 5 = 15$ одиниць III розряду; додаємо ще 1 одиницю III розряду, $15 + 1 = 16$, і дізнаємось, що в 16 одиницях III розряду міститься $16 \cdot 5 = 80$ одиниць II розряду.

Усіх одиниць II розряду буде $80 + 4 = 84$, а одиниць I розряду — $84 \times 5 + 2 = 422$.

Отже, $3142_5 = 422_{10}$.

Спосіб II. Скориставшись загальним способом записування числа в п'ятірковій системі числення, матимемо:

$$3142_5 = 3 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 2.$$

Виконавши дії в правій частині рівності, підрахуємо число простих одиниць у цьому числі і запишемо їх у десятковій системі числення:

$$3142_5 = 375 + 25 + 20 + 2 = 422_{10}.$$

Отже, $3142_5 = 422_{10}$.

Щоб замінити число n-ої системи числом m-ої системи, можна спочатку число n-ої системи замінити числом десяткової системи, а потім це останнє — числом m-ої системи.

Приклад: $323014 = x_6$.

Розв'язання. Знайдемо $x_{10} = 32301_4$. Маємо:

$$x_{10} = 3 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 1 = 768 + 128 + 48 + 1 = 945.$$

Тепер визначимо $945_{10} = x_6$.

945 (I) | 6
3 | 157 (II) | 6
1 | 26 (III) | 6
2 | 4 (IV)

Отже, $945_{10} = 4213_6$, тобто $32301_4 = 4213_6$.

Порівнюючи записи чисел у різних позиційних системах числення, помічаємо, що в двійковій системі записи чисел містять велику кількість розрядів. Це дуже незручно і при складанні програм для електронних обчислювальних машин, і при введенні програм та чисел у машину. Тому при виконанні цих операцій часто користуються іншими позиційними системами, в яких для записування чисел потрібна менша кількість розрядів. Найбільшого поширення набули вісімкова і шістнадцяткова системи числення, від яких легко переходити до двійкової системи, бо 8 і 16 є цілими степенями числа 2.

Наприклад, щоб перейти від записування числа за вісімковою системою до записування в двійковій системі, кожний розряд вісімкового числа перетворюють у двійкову систему окремо. Нехай треба здійснити такий перехід:

$$651_8 = x_2.$$

Маємо:

6 (I) | 2
0 | 3 (II) | 2
1 | 1 (III)

6 одиниць третього розряду у вісімковій системі відповідають групі цифр 110; 5 одиниць другого розряду дають, відповідно,

5 (I) | 2
1 | 2 (II) | 2
0 | 1 (III)

або групу цифр 101; 1 одиницю першого розряду (просту одиницю) записуємо у вигляді 001.

Отже, $651_8 = 110101001_2$.

Кожній цифрі числа 651_8 відповідає три розряди числа 110101001_2.

(Див. стор. 13).

Розв'яжемо задачу, коли задано п'ять трійок.

$1 = 3 - 3 : 3 - 3 : 3$, $2 = 3 - 33 : 33$, $3 = 3 + 3 + 3 - 3 - 3$, $4 = 3 + 33 : 33$, $5 = 3 + 3 : 3 + 3 : 3$, $6 = (3 \cdot 3 + 3 \cdot 3) : 3$, $7 = (33 - 3) : 3 - 3$, $8 = 3 + 3 + 3 - 3 : 3$, $9 = 3 + 3 + 3 + 3 - 3$, $10 = 3 + 3 + 3 + 3 : 3$, $11 = 3 \cdot 3 + (3 + 3) : 3$, $12 = 33 : 3 + 3 : 3$, $13 = (33 + 3 + 3) : 3$, $14 = (33 + 3 \cdot 3) : 3$, $15 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$, $16 = 3^3 - 33 : 3$, $17 = 33 : 3 + 3 + 3$, $18 = 3 \cdot 3 + 3 + 3 + 3$, $19 = (3 + 3) \cdot 3 + 3 : 3$, $20 = 33 : 3 + 3 \cdot 3$, $21 = 3 \cdot 3 \cdot 3 - 3 - 3$, $22 = (33 + 33) : 3$, $23 = 3^3 - 3 - 3 : 3$, $24 = 33 - 3 - 3 - 3$, $25 = 3^3 - (3 + 3) : 3$, $26 = 3 \cdot 3 \cdot 3 - 3 : 3$, $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 - 3$, $28 = 3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 : 3$, $29 = 33 - 3 - 3 : 3$, $30 = 33 + 3 - 3 - 3$, $31 = 33 - (3 + 3) : 3$, $32 = 33 - (3 : 3)^3$, $33 = 3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 + 3$, $34 = 33 + (3 : 3)^3$, $35 = 33 + (3 + 3) : 3$, $36 = 3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3$, $37 = 33 + 3 + 3 : 3$, $38 = 3^3 + 33 : 3$, $39 = 33 + 3 \cdot 3 - 3$.

У ряді випадків той самий результат можна було б дістати й іншим шляхом. Наприклад, 28 дорівнює також $3^3 + (3 : 3)^3$, а 39 дорівнює також $3^3 + 3 \cdot 3 + 3$. Тут є простір для винахідливості.

Пропонуємо читачеві в дусі наведеного зразка розв'язати задачі:

1) За допомогою п'яти двійок написати числа 1, 2, 3,. . ., 26.

2) За допомогою п'яти четвірок написати числа 1, 2, 3,. . ., 22.

(Див. стор. 29).

ЯКІЙ СИСТЕМІ
ИСЛЕННЯ?

$$\begin{array}{r} 1452 \\ 1545 \\ \hline 217 \end{array} \qquad - \begin{array}{r} 10202 \\ 3205 \\ \hline 4775 \end{array}$$

$\frac{3}{0} = \frac{3}{4}$ $\qquad \frac{12}{15} = \frac{3}{4}$

$\frac{11}{14} = \frac{3}{4}$

У випадку, коли треба перейти від двійкової до десяткової системи, можна як проміжну використовувати вісімкову систему. При цьому двійково-вісімково-десятковий перехід здійснюється так:

1) У двійковому записі числа утворюємо групи цифр справа наліво по три цифри в кожній групі.

2) Записуємо десятковий вираз для кожної групи і дістаємо запис шуканого числа у вісімковій системі.

3) Переходимо від вісімкової системи записування числа до десяткової.

Застосуємо цю схему до перетворення $11010110_2 = x_{10}$.

Маємо:

$$011010110_2 = 326_8; \quad 326_8 = 3 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8 + 6 = 3 \cdot 64 + 16 + 6 = 214,$$

отже, $11010110_2 = 214_{10}$.

Це перетворення можна виконувати досить швидко, якщо знати десятковий вираз двійкових чисел від 1 до 7, а саме:

$$001 - 1; \quad 010 - 2; \quad 011 - 3; \quad 100 - 4; \quad 101 - 5; \quad 110 - 6; \quad 111 - 7.$$

Для перетворення будь-якого десяткового числа N у двійкову систему можна застосовувати також спосіб послідовного віднімання від числа N спадних степенів числа 2.

Суть цього способу покажемо на прикладі вираження у двійковій системі числення десяткового числа 580.

$$\begin{array}{r} 580 \\ -\ 512 = 2^9 \\ \hline 68 \\ -\ 64 = 2^6 \\ \hline 4 \\ -\ 4 = 2^2 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 580 = 2^9 + 2^6 + 2^2, \\ 580_{10} = 1001000100_2. \end{array}$$

За знайденою сумою степенів 2 можна безпосередньо визначити розряди шуканого числа в двійковій системі числення.

На закінчення розглянемо відому задачу про найкращу систему гир. Цією задачею цікавилися математики різних часів (Леонардо Пізанський, XIII ст.; Лука Пачіолі, XV ст. та ін.). Видатний російський учений Д. І. Менделєєв сформулював її так: при якому наборі гир, маючи їх по одній, можна зважувати різноманітні вантажі до деякої найбільшої ваги, кладучи гирі тільки на одну шальку терезів (при цьому малися на увазі вантажі, вага яких виражається цілим числом основних вагових одиниць, наприклад грамів).

Найбільший вантаж, який може бути зважений даним набором гир, має вагу, що дорівнює сумі ваг усіх гир цього набору. Гирі треба дібрати так, щоб ними можна було зрівноважити будь-який вантаж, який не перевищує даної суми ваг. Зрозуміло, що набір гир, що задовольняють цю умову, не може бути довільним.

Якщо, наприклад, є гирі в 1, 10, 20, 40 грамів, то найбільший вантаж, який ними можна зважити, дорівнює 71 граму $(1 + 10 + 20 + 40 = 71)$. Але за допомогою цього набору ми не можемо зрівноважити багато речей, що важать менше 71 *Г*.

Виявляється, що, маючи набір гир двійкової системи, тобто гирі в 1, 2, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$ і т. д. грамів, можна зважити будь-який вантаж, кладучи на одну шальку терезів вантаж, а на другу — гирі.

Отже, найкращі набори гир, що задовольняють умову даної задачі, виражаються такими числами двійкової системи: 111, 1111, 11111, 111111, 1111111 і т. д., тобто відповідно в десятковій системі:

$$\begin{aligned} 111 &= 4 + 2 + 1 &&= 7, \\ 1111 &= 8 + 4 + 2 + 1 &&= 15, \\ 11111 &= 16 + 8 + 4 + 2 + 1 &&= 31, \\ 111111 &= 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 &&= 63, \\ 1111111 &= 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 &&= 127 \text{ і т. д.} \end{aligned}$$

Як бачимо, для зважування вантажів, що не перевищують 127 *Г*, треба скористатися набором гир в 127 *Г*. Зокрема, для зрівноважування вантажу в 71 *Г* треба взяти гирі в $64 + 4 + 2 + 1$ (грамів). Це легко встановити, подавши число 71 у двійковій системі числення:

$$71_{10} = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 64 + 4 + 2 + 1.$$

3) За допомогою п'яти п'ятірок написати числа 1, 2, 3, . . ., 17.

4) За допомогою п'яти шісток написати числа 1, 2, 3, . . ., 14.

5) За допомогою п'яти сімок написати числа 1, 2, 3, . . ., 22.

6) За допомогою п'яти вісімок написати числа 1, 2, 3, . . ., 20.

7) За допомогою п'яти дев'яток написати числа 1, 2, 3, . . ., 13.

8) Скільки натуральних чисел підряд (1, 2, 3, . . .) можна написати за допомогою шести одиниць?

9) Написати якомога більше натуральних чисел підряд (1, 2, 3, . . .) за допомогою шести однакових цифр (двійок, трійок, четвірок і т. д.).

10) Написати якомога більше натуральних чисел підряд (1, 2, 3, . . .) за допомогою чотирьох однакових цифр (двійок, трійок, четвірок і т. д.)

Вантаж у 108 грамів можна зрівноважити гирями у 64 + 32 + 8 + 4 (грамів), бо

$$108 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 = 64 + 32 + 8 + 4.$$

Цей спосіб визначення найкращої системи гир грунтується на тому, що всяке ціле число можна подати у вигляді суми степенів числа 2 або степенів числа 2 і одиниці. Доданки цієї суми знаходять за допомогою подання даного числа у двійковій системі числення.

Подібна задача розв'язується для трійкової системи гир при умові, що гирі можна класти на обидві шальки терезів. У цьому випадку користуються тим, що кожне натуральне число можна подати у вигляді суми та різниці степенів числа 3 і одиниці.

Наприклад,

$$55 = (3^4 + 1) - 3^3,$$

$$74 = (3^4 + 3) - (3^2 + 1) \text{ і т. п.}$$

Щоб зрозуміти, як здійснити таке перетворення, розгляньте подані нижче записи:

$$55 = 2001_3 \Rightarrow 2 \cdot 3^3 + 1 = (3 - 1) \cdot 3^3 + 1 = 3^4 - 3^3 + 1;$$

$$74 = 2202_3 = 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 2 = (3 - 1) \cdot 3^3 + (3 - 1) \cdot 3^2 + 3 - 1 = 3^4 - 3^3 + 3^3 - 3^2 + 3 - 1 = (3^4 + 3) - (3^2 + 1).$$

$0\,5\,\overline{10}_{15} = 11 \cdot 15^3 + 5 \cdot 15 + 10 = 37210$

ЕВІР!

$561_{10} = 3\,\overline{13}\,\overline{12}\,\overline{41}_{60}$

1 БУДЬ-ЯКОМУ $K > 5$

$123454321_K = 11111_K^2$

СТАРЕ І НОВЕ ПРО ПРОСТІ ЧИСЛА

ОЗНАЧЕННЯ, ПОЧАТОК ІСТОРІЇ

Математика найчастіше вивчає не кожне число окремо, а поєднуючи числа за певними властивостями в сукупності. Так, ще в початковій школі ви довідались про числа парні і непарні, про числа, кратні трьом, п'яти і про інші множини чисел.

Розглянемо множину дільників натурального числа N. Очевидно, що кожне число, крім одиниці, має принаймні два дільники — одиницю і самого себе, оскільки воно завжди ділиться на ці два числа. Для деяких чисел множина їх дільників вичерпується одиницею і самим числом N. Це числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13,... — їх називають п р о с т и м и. Отже, простими називаються ті числа, які діляться тільки самі на себе і на одиницю.

Існують числа, які мають більше двох дільників: 4, 6, 8, 9, 10, 12,...,— вони називаються с к л а д е н и м и. Нарешті, одиниця — єдине натуральне число, яке має тільки один дільник, — утворює третій клас натуральних чисел, в якому вона є єдиним числом.

Кожне натуральне число, більше за одиницю, має принаймні один простий дільник. Справді, якщо N — число просте, то цим дільником буде саме число N, якщо ж N число складене, то, за означенням, воно повинно мати принаймні один дільник p $(1 < p < N)$, який буде простим числом.

Якщо N має кілька дільників, відмінних від одиниці і N, то найменший з них є число просте. Наприклад, єдиним простим дільником числа 23 буде саме число 23; дільниками 16 будуть 1, 2, 4, 8, 16, найменший відмінний від одиниці дільник є просте число 2.

Отже, прості числа є ніби тими цеглинами, з яких утворено всі числа натурального ряду. Це й привернуло увагу вчених до вивчення простих чисел. Багато задач з теорії простих чисел були поставлені вченими стародавнього світу; деякі з цих задач удалося тоді й розв'язати, інші були розв'язані математиками в наступні часи, а деякі виявились такими складними, що ще й досі чекають свого розв'язання.

СКІЛЬКИ ПРОСТИХ ЧИСЕЛ?

Відповідь на це питання знаходимо в творі «Начала» старогрецького математика Евкліда (III ст. до н. е.). Двадцята теорема дев'ятої книги «Начал» стверджує: «Первісних (простих) чисел існує більше від будь-якого названого числа їх». Ця теорема стверджує, що не існує найбільшого простого числа.

Припустимо, що множина простих чисел скінченна, тобто що існує найбільше просте число p. Перемножимо всі прості числа від найменшого (числа 2) до p і знайдений добуток збільшимо на одиницю:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots p + 1 = M.$$

Очевидно, $M > 1$, тому воно або просте, або складене. Якщо M просте, то теорему доведено, бо $M > p$ (де p — найбільше, за припущенням, просте число). Якщо ж M складене, то воно повинно мати принаймні один простий дільник. Але цим дільником не може бути жодне з простих чисел 2, 3, 5, ..., p, бо при діленні M на кожне з них дістаємо в остачі одиницю. Отже, M або само просте, або ділиться на просте число, яке більше за p. Припущення, що існує найбільше просте число, виявилось неправильним. Отже, множина простих чисел нескінченна.

$$\left.\begin{aligned} 2 + 1 &= 3 \\ 2 \cdot 3 + 1 &= 7 \\ 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 &= 31 \\ 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 &= 211 \\ 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 &= 2311 \end{aligned}\right\} \text{прості числа}$$

$$\left.\begin{aligned} 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 &= 59 \cdot 509 \\ 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 + 1 &= 19 \cdot 97 \cdot 277 \end{aligned}\right\} \text{складені числа}$$

У двох останніх рядках ми дістали складені числа, але кожне з них має прості дільники, які більші від найбільшого простого числа, яке фігурує в добутку.

ПРОСТЕ ЧИ СКЛАДЕНЕ?

Коли було доведено нескінченність множини простих чисел, виникло питання, як виділити їх з множини натуральних чисел. Перший спосіб такого виділення запропонував старогрецький учений Ератосфен (бл. 276—194 рр. до н. е.). Робив він це приблизно так. Нехай треба відокремити прості числа в межах до якогось числа N, наприклад $N = 50$.

Оскільки 1 є число ні просте, ні складене, то закреслимо його; 2, як число просте, підкреслюємо. Усі парні числа, більші за 2, будуть складеними. Їх закреслюємо. Наступним простим числом є число 3, підкреслимо його. Числа, кратні 3 і більші за 3, складені. Їх закреслюємо. При цьому виявиться, що деякі числа, кратні 3 (6, 12, 18 і т. д.), вже закреслені — це всі числа, кратні 6, тобто ті, які діляться і на 3, і на 2. Наступним числом є 5, його підкреслюємо, а всі числа, кратні 5, закреслюємо і т. д. Підкреслені числа і утворюють таблицю простих чисел, менших за 50.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

Складено спеціальні таблиці простих чисел. Нові прості числа в наш час шукають за допомогою швидкодіючих електронно-обчислювальних машин. Але коли треба знайти небагато простих чисел і немає під рукою таблиць, то добре, коли вмієш користуватись і звичайним ератосфеновим «решетом» або дещо вдосконаленим його варіантом, наприклад тим, який винайшов індійський студент-математик С. П. Сундарам.

«Решето» С. П. Сундарама є таблиця, яка складається з безлічі нескінченних арифметичних прогресій, в яких кожний член першої прогресії 4, 7, 10, 13, 16, ... починає нову прогресію. Різницями прогресій є всі непарні числа, починаючи з 3: $d_1 = 3$; $d_2 = 5$; $d_3 = 7$; $d_4 = 9$ і т. д.

4	7	10	13	16	19	...
7	12	17	22	27	32	...
10	17	24	31	38	45	...
13	22	31	40	49	58	...
16	27	38	49	60	71	...
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Леонард Ейлер (1707—1783)

Леонард Ейлер — найвидатніший математик XVIII ст. — народився в швейцарському селі Ріхен біля міста Базеля. Батько хотів, щоб Леонард став священиком. Тому, поступивши в Базельський університет, Ейлер був змушений вивчати богословські науки, але таємно від батьків відвідував лекції з математики професора Йоганна

Бернуллі (1667—1748). Останній скоро звернув увагу на виключні математичні здібності Ейлера і почав проводити з ним додаткові заняття.

Не знайшовши застосування своїм знанням у Швейцарії, Ейлер приїжджає в 1727 р. в Росію, яка з цього часу стає для нього другою батьківщиною. Пізніше вчений виїжджав з Росії і жив тривалий час у Берліні, але й тоді не поривав зв'язків з російськими вченими. Він залишався

(Див. стор. 35).

3 7-237

Якщо число N зустрічається в цій таблиці, то $2N + 1$ буде числом складеним. Якщо ж N у таблиці немає, то $2N + 1$ — число просте.

Приклади: 1) У таблиці немає $N = 2$, отже, $2 \cdot 2 + 1 = 5$ — число просте.

2) У таблиці немає $N = 3$, отже, $2 \cdot 3 + 1 = 7$ — число просте.

3) У таблиці є $N = 4$, отже, $2 \cdot 4 + 1 = 9$ — число складене і т. д.

Так можна дістати всі прості числа, крім найменшого — 2.

ЗАКОН ВЕЛИКИХ ПРОМІЖКІВ

Раніше ми показали, що немає найбільшого простого числа. Тим несподіванішим виявляється той факт, що в натуральному ряді існують як завгодно довгі числові проміжки, утворені тільки з складених чисел.

Доведемо твердження про те, що: яке б велике не було число $k > 1$, в натуральному ряді можна знайти k складених чисел, які безпосередньо йдуть одне за одним.

При доведенні ми використаємо символ $k!$ (читається «k факторіал»). Це скорочений запис добутку всіх натуральних чисел від 1 до k. Так,

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5, \quad 2! = 1 \cdot 2, \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n.$$

Число $2 \cdot 3 \ldots (k+1)$ ділиться на всі k чисел: $2, 3, \ldots, (k+1)$. Отже, серед чисел:

$$(k+1)! + 2, \quad (k+1)! + 3, \quad (k+1)! + 4, \ldots, (k+1)! + (k+1)$$

немає жодного простого числа. Перше число цього ряду ділиться на 2, друге на 3 і т. д., а останнє ділиться на $(k+1)$. Зрозуміло, що k можна взяти як завгодно великим і побудувати числові проміжки, які міститимуть сотні мільйонів і більше послідовних натуральних чисел, і всі вони будуть складеними.

Побудуємо, наприклад, проміжок, де 7 послідовних натуральних чисел будуть складеними. Це числа $8! + 2$, $8! + 3$, $8! + 4$, $8! + 5$, $8! + 6$, $8! + 7$, $8! + 8$, або, через те що $8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320$, матимемо:

$$40\,322, \ 40\,323, \ 40\,324, \ 40\,325, \ 40\,326, \ 40\,327, \ 40\,328.$$

Числа $8! - 8$, $8! - 7$, $8! - 6$, $8! - 5$, $8! - 4$, $8! - 3$, $8! - 2$ також будуть усі складені.

Натуральний ряд міститиме і менші натуральні числа, які утворюють ряд послідовних складених чисел. Наприклад, сім послідовних натуральних чисел: 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96 — складені.

Коли б ми захотіли побудувати зазначеним вище способом проміжок складених чисел для $k = 100$, то дістали б велетенські числа, але вже між простими числами 370 261 і 370 373 міститься 111 послідовних складених чисел. Серед ста послідовних чисел від 1 671 800 до 1 671 900 також немає жодного простого числа.

Побудуйте числовий проміжок, де 10 послідовних натуральних чисел будуть складеними.

БЛИЗНЮКИ

Розглядаючи таблицю простих чисел

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31
37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79
83	89	97	...,							

можна поставити ряд запитань, зрозумілих учням V—VI класів. Але тільки на деякі з цих запитань легко дати відповідь. Найменші прості числа 2 і 3 є послідовними числами натурального ряду. Легко довести, що другої пари послідовних натуральних чисел, які були б простими, немає. Справді, з двох послідовних натуральних чисел одне завжди парне, а оскільки це парне число більше двох, то воно складене. Серед простих чисел є тільки одне парне число 2, усі інші прості числа — непарні.

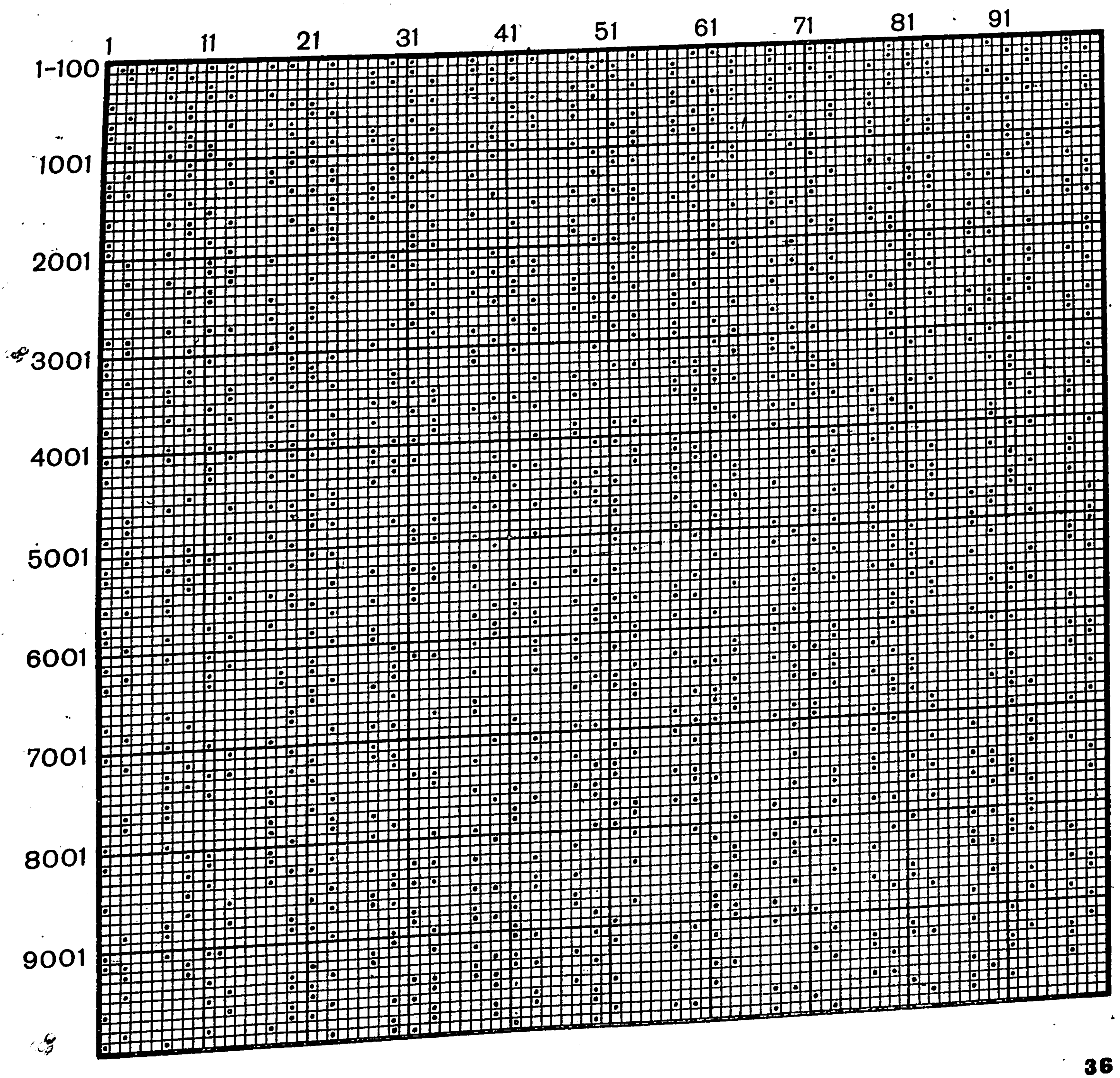
Зрозуміло, що не всі непарні числа — прості, але існують пари послідовних непарних чисел, кожне з яких просте, наприклад, пари: 3 і 5, 5 і 7, 11 і 13, 17 і 19, 29 і 31. Вони називаються «близнюками». До 30 мільйонів є 152 892 таких пари. Відомі величезні числа «близнюки», наприклад: 1 000 000 007 і 1 000 000 009; 1 000 000 009 649 і 1 000 000 009 651.

почесним членом Петербурзької академії наук і брав активну участь в її роботі. Усього Ейлер прожив у Петербурзі тридцять один рік.

Геній ученого охопив усі галузі сучасних йому фізико-математичних наук. Ейлер займався не тільки теоретичними дослідженнями, а й активно допомагав у розв'язуванні багатьох практичних проблем і в підготовці наукових кадрів. Ейлер постійно допомагав ученим, вихідцям з народу, зокрема великому Ломоносову.

Наукова спадщина вченого величезна. Він написав понад 800 наукових праць і багато тисяч листів до вчених наукового змісту та відзивів на наукові праці. Йому належать технічні відкриття, винаходи. Він добився цікавих результатів у галузі елементарної математики. Зокрема, він довів, що точка перетину медіан трикутника, центр описаного кола і точка перетину його висот (ортоцентр) лежать на одній прямій. Цю пряму було названо *прямою Ейлера* (див. стор. 165 «Хрестоматії»).

Ейлер відкрив також, що середини сторін трикутника, основи його висот і середини відрізків висот трикутника між вершинами та ортоцентром лежать на одному колі, яке було названо *колом Ейлера*.



Учені давно поставили питання: чи існує нескінченна кількість пар чисел «близнюків»? Це питання не розв'язане й досі.

За допомогою «решета» Ератосфена складіть таблицю простих чисел третьої і четвертої сотень і знайдіть серед них пари «близнюків».

ПОШУКИ НЕВЛОВИМОГО ЗАКОНУ

Нехай у поданій зліва таблиці кожному найменшому квадратику відповідає натуральне число: першому квадратику верхнього ряду — число 1, другому квадратику того самого ряду — число 2 і т. д., сотому — число 100 і т. д., тобто самих чисел ми не пишемо, а тільки визначаємо їх місця. Отже, клітки нашої таблиці відповідають першим 10 000 чисел натурального ряду. Поставимо крапки в тих квадратиках, які відповідають простим числам. Марно шукатимемо закономірність їх розташування в натуральному ряді. Але підрахунки показують, що чим далі йти від початку натурального ряду, тим менше траплятиметься простих чисел. Коли підрахувати кількість простих чисел у межах кожної сотні, то зменшення їх кількості при переході від однієї сотні до наступної ще не має регулярного характеру. Так, у третій і четвертій сотнях знаходимо по 16 простих чисел, у п'ятій 17, у шостій — 14, а в сьомій — знову 16.

Коли ж розглядати, скільки простих чисел у кожному з десяти перших мільйонів, то тут у кожному наступному мільйоні простих чисел вже завжди менше, ніж у попередньому.

Учені різних епох доклали багато зусиль, намагаючись знайти закон розміщення простих чисел у натуральному ряді.

Ще в 1760 р. видатний петербурзький математик академік Л. Ейлер писав, що навряд чи знайдеться математик, який би не витратив багато часу, намагаючись розв'язати цю проблему. При цьому найчастіше шукали такий алгебраїчний вираз, який при значеннях $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ давав би прості числа.

Числові проміжки	Кільк. простих чисел
1 - 100	25
101 - 200	21
201 - 300	16
301 - 400	16
401 - 500	17
501 - 600	14
601 - 700	16
701 - 800	14
801 - 900	15
901 - 1000	14
1001 - 1100	16
1101 - 1200	12
1201 - 1300	13
1301 - 1400	11
1401 - 1500	17
1501 - 1600	12
1601 - 1700	15
1701 - 1800	12
1801 - 1900	12
1901 - 2000	13

Числові проміжки	Кількість простих чисел
Перший мільйон	78498
Другий мільйон	70435
Третій мільйон	67883
Четвертий мільйон	66330
П'ятий мільйон	65367
Шостий мільйон	64336
Сьомий мільйон	63799
Восьмий мільйон	63129
Дев'ятий мільйон	62712
Десятий мільйон	62090

Ейлер знайшов квадратний тричлен $n^2 - n + 41$, який при $n = 0, 1, 2, \ldots, 39, 40$ дає 41 просте число. Але вже при $n = 41$ дістаємо $41^2 - 41 + 41 = 41^2 = 1681$ — число складене. Пізніше було знайдено, що тричлен $A = n^2 - 79n + 1601$ при $n = 0, 1, 2, \ldots, 78, 79$ дає 80 простих чисел. Наприклад, при $n = 0$ $A = 1601$, при $n = 1$ $A = 1523$ і т. д. Та при $n = 80$ $A = 80^2 - 79 \cdot 80 + 1601 = 1681$ — число складене.

Цікавий приклад виразу, який дає прості числа при деяких значеннях змінної, подав радянський математик О. Ф. Бермант (1904—1959). Якщо у формулі $N = \frac{2^p + 1}{3}$ надавати p значення простих чисел $2 < p < 37$, то значення N також будуть простими числами. Але знову ж є значення p, при якому і ця формула не дає простого числа. При $p = 37$

$$N = \frac{2^{37} + 1}{3} = 45\,812\,984\,491 = 1777 \cdot 25\,781\,083 \text{ — число складене.}$$

Виникає питання: чи існує взагалі многочлен $f(x)$ від змінної x з цілими коефіцієнтами, який для кожного натурального значення x дає просте число. Доведено, що такого многочлена не існує. Є многочлени першого степеня (наприклад, $2x + 1$), які для натуральних значень x дають нескінченну множину простих чисел, але не знайдено жодного такого многочлена степеня $n > 1$. Невідомо, чи буде таким многочлен $x^2 + 1$, який дає прості числа при $x = 0, 1, 2, 4, 6, 10$.

Для $x \leqslant 10\,000$ знайдено 842 прості числа виду $x^2 + 1$, для $x \leqslant 100\,000$ таких чисел 6656, для $x \leqslant 180\,000$ їх 11 232 і все-таки не доведено, чи буде нескінченною множина всіх простих чисел виду $x^2 + 1$.

Вже з XVIII ст. вчені шукали також формулу для обчислення кількості простих чисел у проміжку від 1 до n. Уперше таку наближену формулу відкрив французький математик Лагранж (1736—1813), а пізніше точнішу наближену формулу знайшов німецький математик Гаусс (1777—1855). Але тільки геніальному російському математикові П. Л. Чебишову вдалося вивести не тільки більш точну формулу для обчислення кількості простих чисел у проміжку від 1 до n, а й відкрити новий метод розв'язання складних задач теорії простих чисел.

Формула П. Л. Чебишова дає, взагалі, дещо більше простих чисел, які не перевищують n, ніж їх є в дійсності. Але чим більшим будемо брати n, тим точніші результати діставатимемо, тобто точність цієї формули збільшується із збільшенням n. Вже в наш час доведено, що в натуральному ряді є таке натуральне число N, що при $n > N$ формула

Чебишова даватиме не більше простих чисел, ніж їх є в дійсності, а менше. У 1933 р. встановлено, що N наближено визначається рівністю:

$$N \approx 10^{10^{10^{34}}}$$

Цей числовий гігант, що називається числом Скьюза, записується одиницею з $10^{10000000000000000000000000000000000}$ нулями.

ШУКАЧІ ПРОСТИХ ЧИСЕЛ

Історія математики знає імена вчених, які самовіддано працювали над складанням таблиць простих чисел і над доведенням простоти чисел певного виду, які зустрічалися при розв'язуванні деяких задач. Перші спроби складання таблиць простих чисел робили вже в стародавньому світі.

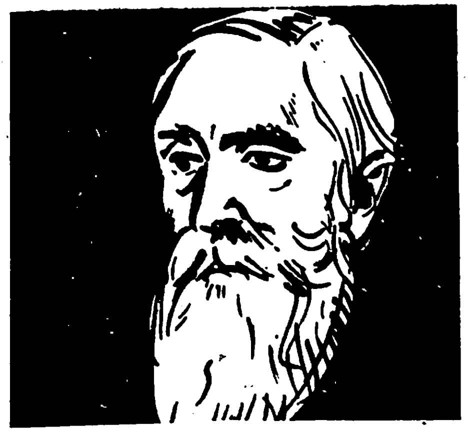
У 1603 р. італійський математик Катальді опублікував у Болоньї першу відому таблицю простих чисел, менших за 750. Пізніше математики все далі просувалися в глибини натурального ряду, відкриваючи нові й нові прості числа.

Вже в 1770 р. Ламберт надрукував таблицю найменших дільників усіх чисел, менших за 102 000, які не діляться на 2, 3 і 5. Це була величезна робота. Недаремно ж, закликаючи вчених продовжити складання таблиць, Ламберт гарантував безсмертя тому, хто доведе таблицю дільників до 1 000 000.

До середини XIX ст. були складені таблиці найменших дільників чисел не тільки першого мільйона, як про це мріяв Ламберт, а й другого, третього і аж до дев'ятого включно. Водночас у пресі з'явилися повідомлення, які здавались абсолютно неймовірними: у Віденську академію наук надійшов рукопис празького математика Кулика, що містить таблицю дільників чисел, не кратних 2, 3 і 5, яку Кулик довів до 100 мільйонів... Редактор нових таблиць дільників чисел Лемер відвідав Відень і пересвідчився, що в бібліотеці академії зберігається сім великих томів ру-

П. Л. Чебишов (1821 1894)

Видатний російський математик минулого століття П. Л. Чебишов народився в селі Окатово Калузької губернії. Середню освіту він здобув дома, а в 1837 р. вступив у Московський університет. Після закінчення університету П. Л. Чебишов відмовився від державної служби і повністю присвятив себе математиці.



Наполеглива робота і блискучі математичні здібності молодого вченого скоро дали перші плоди. У 1846 р. Чебишов захищає магістерську дисертацію, стає ад'юнктом, а згодом і професором Петербурзького університету.

Докторська дисертація, яку Чебишов захистив у 1849 р., містила не тільки повний виклад теорії простих чисел, а й власні грунтовні дослідження вченого в цій галузі.

(Див. стор. 41).

кописних таблиць: «Великий канон дільників усіх чисел, які не діляться на 2, 3 і 5, і простих чисел між ними до 100330201 Якуба Філіпа Кулика, публічного ординарного професора вищої математики в Празькому університеті».

Якуб Філіп Кулик (1793—1863) народився в м. Львові. Закінчивши місцеву гімназію, він вивчав філософію, право і математику в Львівському університеті, а з 1814 р. став професором математики Оломуцького ліцею. З 1826 р. Кулик працює професором вищої математики Празького університету. Усі свої сили віддав учений справі розвитку освіти і культури в рідному краї. Він роздав багато книжок чеським і галицьким гімназіям та Львівському університету, бібліотека якого згоріла в 1848 р. Кулик є автором багатьох наукових праць. Та в історію математики він увійшов насамперед як неперевершений обчислювач і укладач математичних таблиць.

У галузі теорії простих чисел працювало багато людей, які не були математиками за фахом, але безкорисливо віддавали науці весь свій вільний час, енергію і пристрасть. Таким був росіянин Іван Міхеєвич Первушин (1827—1900).

Народився І. М. Первушин у селищі Лисьвенського заводу (тепер м. Лисьва Пермської області). Здобувши духовну освіту, він почав викладати математику в Пермській духовній семінарії.

Прогресивними настроями молодого вченого були незадоволені місцеві власті. Через деякий час Первушин змушений був залишити викладання математики і піти працювати священиком у глухе село Замараєвське Пермської губернії.

Через свої передові погляди і відданість справі освіти народу Первушин не раз наражався на немилість духовного начальства, яке намагалося позбавити його роботи. Тільки завдяки клопотанню відомих російських учених перед вищим духовним органом країни — синодом Первушина не було звільнено з роботи, а переведено в село Мехонське. Позбавлений можливості одержувати потрібну літературу і зустрічатися з ученими-математиками, Первушин продовжував до кінця життя працювати над різними питаннями з теорії простих чисел. Як і багато його попередників та сучасників, Первушин шукав прості числа виду $2^n \pm 1$ і $2^{2^m} \pm 1$. Він довів простоту числа $2^{61} - 1$ і складеність чисел $2^{2^6} + 1$, $2^{2^{12}} + 1$, $2^{2^{23}} + 1$.

Французький математик П'єр Ферма (1601—1665) висловив припущення, що числа виду $F_n = 2^{2^n} + 1$ прості при будь-якому n. Вже в 1732 р. Ейлер показав, що число $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297$ ділиться на 641, тобто є складеним.

У 1877 р. Первушин повідомив Петербурзьку Академію наук про те, що $F_{12} = 2^{2^{12}} + 1$ ділиться на 114 689, а в 1878 р. довів, що число $F_{23} = 2^{2^{23}} + 1$ також складене і ділиться на 167 772 161. У 1883 р. Первушин надіслав замітку «Число $2^{61} - 1 = 2305843009213693951$ є просте». В історії математики це число називають Первушинським. Академія наук відмовилась опублікувати замітку Первушина, оскільки академік В. Я. Буняковський не взяв на себе відповідальність стверджувати, що в обчисленнях не було допущено помилок, а перевірка обчислень забрала б дуже багато часу навіть у досвідченого обчислювача. Замітка Первушина була опублікована тільки в 1887 р., коли один західноєвропейський учений повторив доведення Первушина. Багато енергії доклав І. М. Первушин до складання таблиць простих чисел, які він довів до 1 000 000. Це були перші в Росії таблиці простих чисел такого великого розміру. Над їх складанням він працював понад сорок років.

Вже в наш час у галузі простих чисел успішно працює вчитель математики з м. Кувшиново В. А. Голубєв (народ. в 1891 р.). Ще навчаючись в учительській семінарії, він відкрив графічний спосіб складання таблиць простих чисел, а пізніше застосував його до складання таблиць простих чисел десятого, одинадцятого і дванадцятого мільйонів.

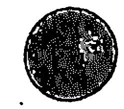
Багато праць В. А. Голубєва присвячено проблемі розподілу простих чисел у натуральному ряді. Він працює і над розв'язанням проблеми «близнят», а також над її узагальненням, тобто над пошуками трійок і четвірок простих чисел з мінімальними інтервалами; прикладами таких трійок будуть 11, 13, 17 і 37, 41, 43, а четвірка — 7, 11, 13, 17.

ЕЛЕКТРОННО-ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МАШИНИ ШУКАЮТЬ ПРОСТІ ЧИСЛА

Якщо раніше доведення простоти великого числа забирало роки напруженої праці обчислювачів, то тепер такі задачі дуже швидко розв'язують потужні обчислювальні машини. При цьому доведення простоти якогось числа, як правило, є складовою частиною іншої задачі.

Праці з теорії простих чисел принесли вченому світову славу. У 1859 р. його обрано ординарним академіком Петербурзької академії наук, а в 1874 р. членом Паризької академії наук.

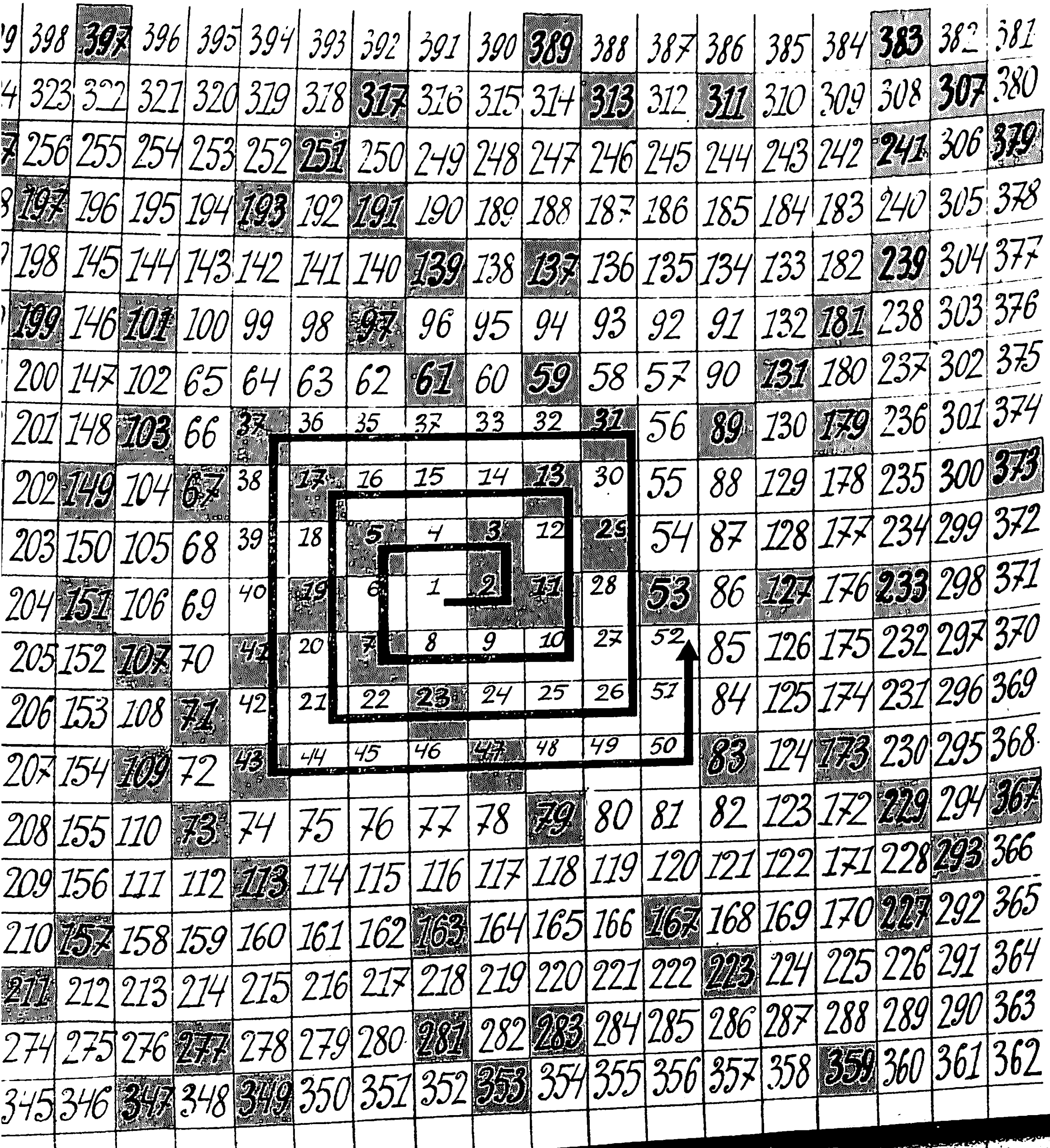
П. Л. Чебишов добився блискучих успіхів у багатьох галузях математики: теорії чисел, теорії імовірностей, математичному аналізі тощо. Його праці значною мірою пов'язані з запитами практики. Велике значення мали дослідження Чебишова в галузі математичної картографії і теорії механізмів. Він винайшов перший автоматичний арифмометр і ряд інших механізмів, серед яких широко відомий механізм для перетворення безперервного обертального руху в прямолінійний і навпаки.



І. М. Виноградов

Іван Матвійович Виноградов (нарід. 1891 р.) — один з найвидатніших сучасних математиків, академік, член багатьох зарубіжних академій і наукових товариств. Народився в селі Милолюб Псковської губернії. Закінчив фізико-математичний факультет Петербурзького університету (1914 р.). У 1915 р. написав свою першу наукову працю і був залишений в університеті для підготовки до наукової

(Див. стор. 43).



Нагадаємо, що **досконалими** називаються числа, які дорівнюють сумі своїх дільників (саме число до суми його дільників не включається). Досконалими будуть, наприклад, числа 6 і 28, бо $6 = 1 + 2 + 3$; $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

Ще Евклід довів, що кожне число, яке можна подати у вигляді добутку $2^{n-1}(2^n - 1)$, де $(2^n - 1)$ — просте, буде досконалим. Отже, для знаходження досконалих чисел треба було доводити простоту чисел виду $(2^n - 1)$. До 1914 р. було знайдено всього 12 досконалих чисел. Останнє 39-цифрове просте число $2^{127} - 1$ було з 1914 по 1952 р. найбільшим з відомих простих чисел. У січні 1952 р. американський учений Р. М. Робінзон використав електронно-обчислювальну машину для вивчення простоти чисел виду $2^n - 1$. Він почав з числа $2^{257} - 1$.

У 1932 р. після року напруженої праці американський математик Д. Г. Лемер довів, що це число складене. У 1952 р. Лемер побачив, як машина, виконавши за 18 *сек* усю роботу, дістала той самий результат.

Надвечір машина знайшла 13-е досконале число, а опівночі — і 14-е: було доведено, що числа $2^{521} - 1$ і $2^{607} - 1$ є простими.

У 1957 р. шведський математик Г. Різель також за допомогою швидкодіючої електронно-обчислювальної машини довів простоту числа $2^{3217} - 1$, яке записується 969-ма цифрами. Найбільшим простим числом, відомим на початок 1965 р., є $2^{11213} - 1$. Цей числовий гігант записується приблизно 3370-ма цифрами.

СПІРАЛЬ УЛАМА І „ГЕНЕРАТОРИ" ПРОСТИХ ЧИСЕЛ

Сучасний американський математик Улам випадково помітив, що коли числа натурального ряду записувати у вигляді спіралі, то прості числа мають тенденцію шикуватись у ряди, які ланцюгами по діагоналях перетинають таблицю.

Оскільки всі прості числа, більші за 2, непарні, то немає нічого дивного в тому, що поблизу центра спіралі вони розміщуються по діагоналі. Якщо ви пронумеруєте, починаючи від центра, по спіралі всі квадрати шахової

роботи. З 1925 р. Виноградов працює професором Ленінградського університету, завідує кафедрою теорії чисел і теорії імовірностей, а з 1932 р. стає директором математичного інституту Академії наук СРСР ім. В. А. Стеклова.

Наукова діяльність Виноградова стосується теорії чисел, збагаченої

новими методами досліджень. У 1941 р. за книгу «Новий метод в аналітичній теорії чисел» Виноградов дістав Державну премію.

Здобуті Виноградовим важливі результати з теорії чисел принесли йому та радянській науці заслужену славу і визнання вчених усього світу.

дошки, то побачите, що непарні номери квадратів будуть одного кольору. Розмістивши на відповідних квадратах 17 шашок, які зображатимуть відповідні прості числа, ви помітите, що вони утворять ланцюжки, які в діагональних напрямах перетинають таблицю (див. стор. 42).

Але закон великих проміжків стверджує, що в міру віддалення від початку натурального ряду кількість простих чисел зменшується. Отже, при віддаленні від центра спіралі ланцюги простих чисел повинні зникати. Щоб це перевірити, Улам «доручив» електронно-обчислювальній машині розмістити на спіралі 65 тисяч простих чисел. Він побачив, що й поблизу країв таблиці прості числа утворюють діагональні ланцюги.

Як не дивно, але прості числа ланцюга можна описати за допомогою рівняння параболи. Так, прості числа 5, 19, 41, 71 і 109 (стор. 42) описуються виразом $y = 4x^2 + 10x + 5$, коли $x = 0, 1, 2, 3, 4$.

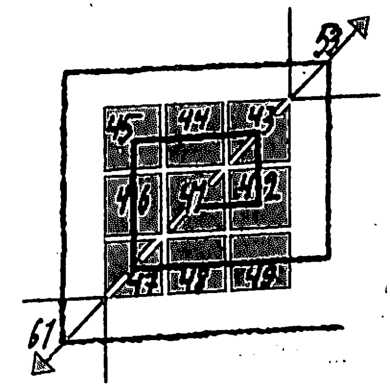
Нові цікаві властивості простих чисел можна виявити, якщо почати спіраль не з 1, а з якогось простого числа, наприклад з 17 (див. рис.). Тоді на зазначеній діагоналі квадрата розмістяться прості числа, які описуються виразом $y = x^2 + x + 17$. Такі формули математики називають *генераторами простих чисел*, бо при різних, звичайно деяких, значеннях x ці формули породжують (генерують) прості числа. Зокрема, формула $y = x^2 + x + 17$ генерує прості числа для $x = 0, 1, 2, \ldots, 15$. Отже, коли б ми збільшили нашу таблицю до розмірів 16×16, то всі прості числа, розміщені на головній діагоналі, були б утворені цим генератором. Найпотужніший із знайдених Ейлером «генераторів» простих чисел зображається відомою вже вам формулою $y = x^2 + x + 41$. Спіраль для цього генератора слід було б починати з числа 41 (див. рис. на стор. 45). Він генерує прості числа, послідовність яких повністю займе діагональ квадрата 40×40.

Спостерігаючи розміщення простих чисел у спіралях Улама, учені поставили ряд питань, які ще чекають свого розв'язання. Ось кілька таких нерозв'язаних на сьогодні проблем. Чи існує серед уламівських спіралей така, яка містить нескінченний ланцюг простих чисел? Чи є відмінність у середній густині простих чисел зверху і знизу від головної діагоналі таблиці, у правій і лівій половинах таблиці?

Нашим вітчизняним математикам належать визначні відкриття в теорії простих чисел. Член Петербурзької академії наук, геніальний учений Леонард Ейлер (1707—1783) був першим математиком, який проявив справжню турботу про розвиток теорії чисел. «Можна без перебільшення сказати, що праці Ейлера заклали міцний фундамент загальної теорії чисел, дали початок цілком новим напрямам цієї науки, підготували умови для дальшого її розвитку», — писав про досягнення Л. Ейлера в галузі теорії чисел радянський математик Б. О. Венков

Мемуари П. Л. Чебишова (1821—1894) про прості числа присвячені різним питанням теорії простих чисел. Так, у відомій праці «Про прості числа» П. Л. Чебишов майстерно довів твердження французького математика Бертрана про те, що між n і $2n$ (n — ціле число, більше одиниці) завжди знайдеться просте число. Там же наведено славнозвісний асимптотичний закон розподілу простих чисел та інші важливі результати досліджень П. Л. Чебишова.

У 1892 р. французький математик Ерміт писав ректору Петербурзького університету: «Ваш знаменитий колега П. Л. Чебишов був окрилений генієм Ейлера в своїх працях з теорії чисел, які уславили російську науку».



Вже в наші дні світового визнання дістали праці в галузі теорії простих чисел радянського математика академіка І. М. Виноградова. Ще в 1742 р. в листі до Л. Ейлера член Петербурзької академії наук Х. Гольдбах висловив гіпотезу (припущення), що «будь-яке ціле число $n \geqslant 6$ можна подати у вигляді суми трьох простих чисел». Справедливість гіпотези Гольдбаха було перевірено для багатьох чисел, але довести її в загальному вигляді нікому не вдалося. Навіть у 1922 р. деякі визначні математики вважали, що сучасна математика не тільки не знає методів, за допомогою яких можна було б довести це твердження, а й не скоро їх відкриє. У 1937 р. І. М. Виноградов майже повністю розв'язав цю проблему. Він довів, що серед натуральних чисел існує таке число c, що кожне непарне натуральне число, яке перевищує c, є сума трьох простих чисел. Ми сказали — майже довів. Справа в тому, що саме число c надзвичайно велике. Коли б його записати на смужці паперу, то цією смужкою можна було б 100 мільйонів раз обгорнути Землю по екватору.

Розв'язування задач
(див. стор. 299).

1. При кожній неправильній відповіді учасник втрачав $7+12=19$ (очок). Він мав можливість дістати $7 \times 30 = 210$ (очок). Отже, всього було втрачено $210 - 77 = 133$ (очок). А тому він дав $133 : 19 = 7$ неправильних відповідей. Правильних відповідей було дано $30 - 7 = 23$.

2. Кількість відвідувачів до зниження цін приймемо за 1; тоді після зниження цін кількість відвідувачів становитиме 1,6.

1) $1 \cdot 1{,}6 = 1{,}6$ — загальна сума грошей за квитки до зниження цін у частинах.

2) Грошей збільшилось на $1{,}6 \times 0{,}25 = 0{,}4$ (частини).

3) $1{,}6 + 0{,}4 = 2$ — загальна сума грошей за квитки після зниження цін у частинах.

4) $2 : 1{,}6 = 1{,}25$ (крб.) — вартість одного квитка після зниження цін.

5) $1{,}6 - 1{,}25 = 0{,}35$ (крб.) — на стільки подешевшав один квиток.

3. $(2a+1)^2 = 4a^2 + 4a + 1 = 4a \times (a+1) + 1$. Але a і $(a+1)$ — два послідовні числа натурального ряду і одне з них обов'язково ділиться на 2. Отже, $4a(a+1)$ ділиться на 8.

4. $100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 99a - 99c = 99(a - c)$.

За допомогою значущих цифр

Пригадаємо стару задачу. У рядок записано всі значущі цифри: 123456789. Треба розставити між цифрами знаки арифметичних дій (якщо потрібно, то й дужки), щоб в результаті вийшло задане число. Найчастіше вимагають, щоб результат дорівнював 100, але це не обов'язково. Розв'язки можна знайти і для іншої заданої суми. Часто їх буває дуже багато. Наприклад, для числа 80 матимемо:

$$1 \cdot 2 + 3 + 45 + 6 + 7 + 8 + 9 = 80;$$
$$1 + 2 + 3 + 4 - 5 + 6 + 78 - 9 = 80;$$
$$1 \cdot 2 + 3 + 4 - 5 - 6 - 7 + 89 = 80;$$
$$1 + 2 - 3 + 4 + 5 + 6 + 7 \cdot 8 + 9 = 80.$$

А ось кілька розв'язків для числа 150:

$$12 + 3 + 45 - 6 + 7 + 89 = 150;$$
$$1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 6 - 7 + 89 = 150;$$
$$12(3 + 4) + 56 - 7 + 8 + 9 = 150.$$

Ця задача не втратила своєї привабливості і в наші дні. Можна навіть змагатися з друзями: хто швидше напише задане число або хто знайде більше розв'язків за відведений час. Для змагання візьміть числа: а) 40; б) 64; в) 75; г) 108; д) 125; е) 155.

Є ще одна задача, зв'язана з використанням значущих цифр. Вона полягає в тому, щоб скласти три числа, які відносяться, як 1 : 2 : 3. При цьому треба використати всі значущі цифри і до того ж тільки по разу. Цю задачу доводиться розв'язувати на основі випробувань. Вона має не один розв'язок, а чотири:

1) 192, 384, 576; 2) 219, 438, 657; 3) 273, 546, 819; 4) 327, 654, 981.

А тепер наведемо кілька вправ для читачів.

1) Використавши всі значущі цифри по одному разу, скласти найбільше можливе число, кратне 11.

2) Використавши всі значущі цифри по одному разу, скласти найменше можливе число, кратне 11.

Розв'язуючи ці дві задачі, треба пам'ятати, що число ділиться на 11, якщо різниця між сумою цифр, які стоять на непарних місцях, і сумою цифр, які стоять на парних місцях, ділиться на 11.

3) Використавши всі значущі цифри по одному разу, скласти найбільше можливе число, кратне 13.

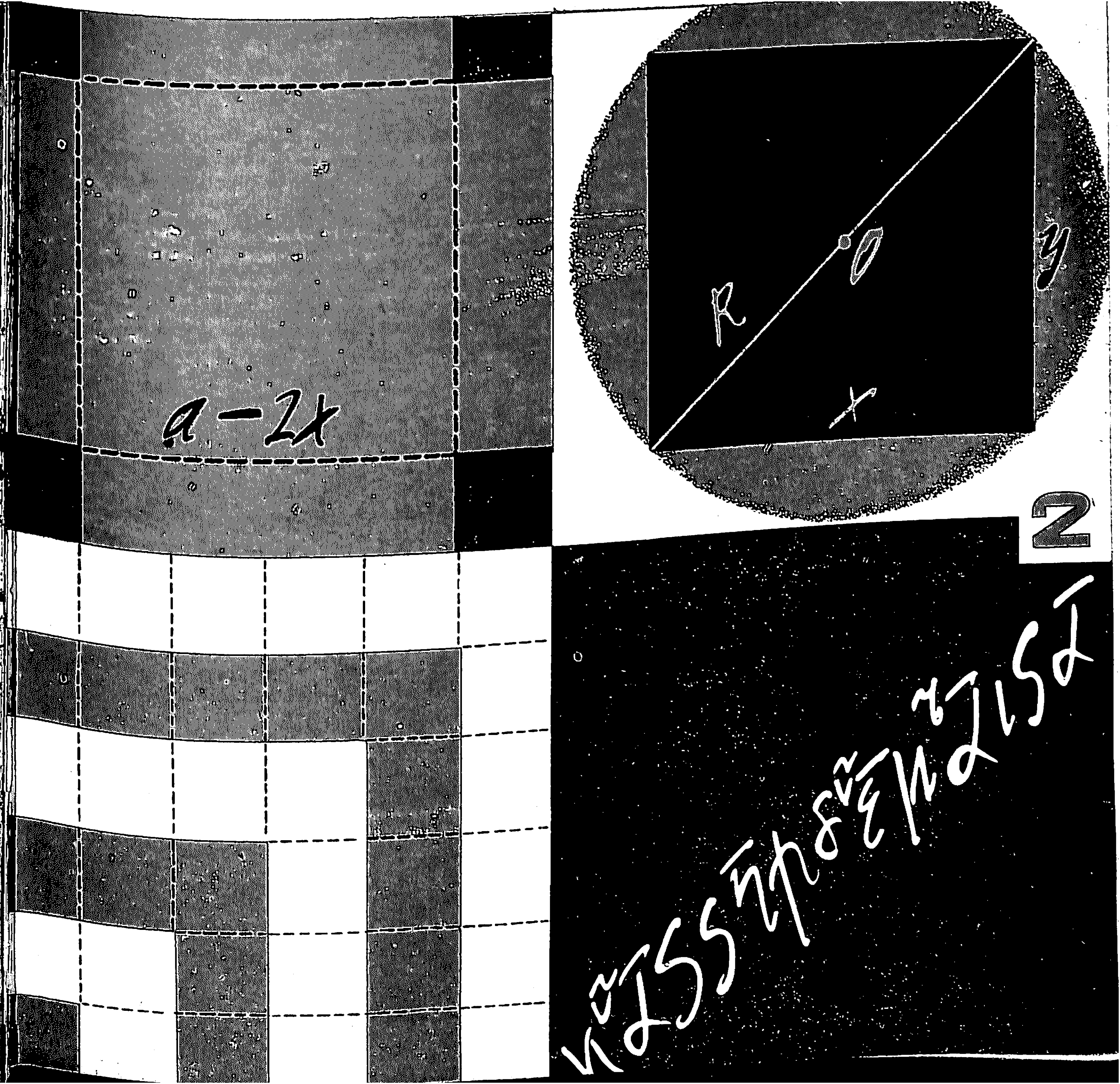
4) Використавши всі значущі цифри по одному разу, скласти три числа, кожне з яких є точним квадратом.

Задача розв'язується за допомогою випробувань. Вона має десятки розв'язків.

До наведених вправ близько стоїть ще одна:

5) Використавши всі цифри (в тому числі і нуль) по одному разу, скласти п'ять чисел, які відносяться, як 1 : 2 : 3 : 4 : 5.

На відміну від попередньої задачі вона має лише один розв'язок.



ПАСКАЛІВ АРИФМЕТИЧНИЙ ТРИКУТНИК

Іноді досить буває уважного спостереження, щоб установити важливу математичну закономірність. Це ми й хочемо зараз показати читачеві на одному цікавому прикладі.

Усім добре відомі тотожності:

$$(a+b)^0 = 1, \quad a + b \neq 0;$$
$$(a+b)^1 = a + b;$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Блез Паскаль

Природно виникає питання про те, яка закономірність лежить в основі утворення коефіцієнтів у правих частинах цих формул і чи не можна передбачити, які формули будуть для $(a+b)^n$ при $n = 4, 5, 6, \ldots$. Неважко зрозуміти, що, наприклад, при $n = 4$ повинна бути справедлива формула виду

$$(a+b)^4 = a^4 + Aa^3b + Ba^2b^2 + Cab^3 + b^4, \tag{1}$$

де A, B, C — деякі цілі додатні числа, а при довільному $n \geqslant 4$ — формула

$$(a+b)^n = a^n + A_{n,\,n-1}\, a^{n-1}b + A_{n,\,n-2}\, a^{n-2}b^2 + \ldots + A_{n,\,k}\, a^k b^{n-k} + \ldots + b^n, \tag{2}$$

де $A_{n,\,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ — також деякі цілі додатні числа. За яким же законом утворюються числа $A_{n,\,k}$, $n \geqslant 4$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$? Цей закон уперше винайшов славетний французький математик, фізик і філософ Блез Паскаль (1623—1662) у формі так званого арифметичного трикутника. Ось як це могло статися.

Помножаючи обидві частини тотожності

$$a + b = a + b$$

4 7-273

на $a + b$, послідовно дістаємо:

$$(a+b)^2 = a(a+b) + b(a+b) = a^2 + (1+1)ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2. \quad (3)$$

Аналогічно

$$(a+b)^3 = a(a^2+2ab+b^2) + b(a^2+2ab+b^2) = a^3 + (2+1)a^2b + (1+2)ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \quad (4)$$

Уважно розглядаючи перетворення (3) і (4), приходимо до думки створити таку числову таблицю:

$$\begin{array}{l} 1 \\ 1,\ 1 \\ 1,\ 2,\ 1 \\ 1,\ 3,\ 3,\ 1 \end{array} \quad (5)$$

У цій таблиці число 2 в третьому рядку дорівнює сумі двох чисел попереднього рядка, з яких одно стоїть на тому самому місці, що й число 2, а друге — на попередньому місці. Легко зміркувати, що числа 3 і 3 в четвертому рядку обчислюються за таким самим правилом за числами попереднього, тобто третього, рядка. Якщо це правило істинне і надалі, то наступний рядок чисел має бути такий: 1, 4, 6, 4, 1, так що у формулі (1) повинно бути $A = 4$, $B = 6$, $C = 4$. Справді, безпосередні обчислення за зразком (3) і (4) стверджують цей висновок.

Отже, наша гіпотеза підтвердилась. Щоб її довести остаточно, треба застосувати *метод математичної індукції* [1], дуже поширений при доведенні теорем, в яких відіграє істотну роль якесь ціле додатне число n, що може набувати всіх значень, починаючи з якогось найменшого n_0 (іноді $n_0 = 1$). Додержуючись позначень коефіцієнтів, застосованих у (2), досить довести рівність

$$A_{n+1,\,k} = A_{n,\,k} + A_{n,\,k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n; \quad A_{n,\,n} = A_{n,\,0} = 1, \quad (6)$$

щоб мати повне обгрунтування правила утворення цих коефіцієнтів, якщо врахувати попередні дані про це правило (тобто його справедливість для $n = 2, 3$). Доведення рівності (6) залишаємо читачеві. Таблиця (5), нескінченно продовжена вниз за доведеним правилом додавання двох сусідніх чисел попереднього рядка, має назву арифметичного трикутника Паскаля.

[1] Див. статтю цієї книжки «Метод математичної індукції».

Установлена форма закону обчислення коефіцієнтів $A_{n,\,k}$ в (2) має істотну хибу: щоб обчислити якийсь рядок чисел в арифметичному трикутнику, треба спочатку обчислити всі рядки, які стоять над ним. А чи не існує такої формули, яка б давала можливість обчислювати навіть окремий коефіцієнт $A_{n,k}$ при заданих значеннях n і k, $0 \leqslant k \leqslant n$? Така формула, справді, є. Вона має вигляд:

$$A_{n,\,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \quad (7)$$

де $k!$ читається «k факторіал» і означається так:

1) $0! = 1! = 1$; 2) якщо $k > 1$, то $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k$.

Формулу (7) виводять у тому розділі алгебри, який називається *теорією сполук.* Ми не маємо змоги спинятися на виведенні формули (7). Пропонуємо читачеві просто перевірити її правильність, довівши такі твердження: 1) з (7),ураховуючи означення символу $k!$, випливає $A_{1,0} = A_{1,1} = 1$; 2) з (7) при $n \geqslant 1$ і $0 \leqslant k \leqslant n$ випливає $A_{n+1,\,k} = A_{n,k} + A_{n,\,k-1}$. Цього досить (чому?), щоб упевнитись у тотожності закону арифметичного трикутника з законом, визначеним формулою (7).

Формулу (7) установив славетний математик і фізик Ісаак Ньютон (1642—1727). Ця формула одночасно дає відповідь на запитання, скільки з n будь-яких різних предметів можна скласти сукупностей по k предметів у кожній з таким розрахунком, щоб кожна сукупність відрізнялась від кожної іншої сукупності принаймні на один предмет? Наприклад, скільки різних наборів по три листівки в кожному можна утворити з 10 різних художніх листівок? Це число дорівнює

$$A_{10,\,3} = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Блез Паскаль (1623—1662)

Блез Паскаль — французький математик, фізик і філософ; народився в м. Клермон-Феррані. У 1631 р. його батько Етьєн Паскаль оселився в Парижі, де з успіхом почав займатись математикою і фізикою. Він сам навчав свого сина. У нього часто збиралися видатні вчені, між якими точилися палкі наукові суперечки. Слухаючи їх, малий Паскаль рано захопився наукою. До того ж у нього виявилось і надзвичайне математичне обдарування. Розповідають, що він, не вивчаючи геометрії, самостійно відкрив теорему про суму кутів трикутника, а в 16-річному віці написав працю «Міркування про конічні перерізи».

З 1641 р. по 1649 р. сім'я Паскалів жила в м. Руані. У цей час 18-річний Паскаль винайшов арифмометр для спрощення дій додавання і віднімання, займався фізичними дослідженнями, а також так званим арифметичним трикутником, комбінаторикою і деякими іншими проблемами. Повернувшись до Парижа, Б. Паскаль працював над задачами теорії імовірностей. Пізніші геометричні дослідження Б. Паскаля, зокрема кривої, що називається циклоїдою, дають підставу вважати його одним з попередників Г. Лейбніца і І. Ньютона в справі створення числення нескінченно малих. З ім'ям Паскаля пов'язаний також метод математичної індукції.

Математичні кросворди

Математичні кросворди дещо відрізняються від звичайних. У них по горизонталях і вертикалях записують числа. У кожну клітку записують одну цифру знайденого числа. Кому і нуль цілих (якщо вони є в числі) опускають. Якщо знайдене число наближене, то його значення записують стількома значущими цифрами, скільки відведено для нього кліток.

Кросворд 1

По горизонталі:

2. Ціна 1 *кг* суміші цукерок: 6 *кг* по 2,8 крб. і 2 *кг* по 1,68 крб.

4. Найменше спільне кратне чисел 225, 245 і 385.

6. Число, яке в сумі з числом, написаним тими самими цифрами в зворотному порядку, дає 154, причому цифра десятків на 4 більша від цифри одиниць.

7. Найменше двоцифрове просте число.

9. $793\frac{1}{3} : \left(\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{3}{5\cdot 8}+\frac{5}{8\cdot 13}+\frac{7}{13\cdot 20}\right)$.

10. Добуток шести послідовних цілих чисел.

11. Найбільший спільний дільник чисел 8281 і 1001.

13. Середня швидкість руху мотоцикла, який від *А* до *Б* їхав із швидкістю 25 *км/год*, а назад —із швидкістю 37,5 *км/год*.

14. Площа квадрата, периметр якого дорівнює 940.

17. Кількість хвилин у третині доби.

По вертикалі:

1. Шлях автомобіля, який першого дня проїхав 30% шляху, другого дня $\frac{6}{7}$ цієї віддалі, а третього і четвертого 682 *км*, які залишалися.

2. Просте число.

3. Число, яке в 3 рази більше від суми його цифр.

4. Добуток п'яти послідовних простих чисел.

5. Кількість робітників на чотирьох заводах, про які відомо, що на I, II і III робітників 34 293, на I, III і IV — 39 335, на I, II і IV — 39 436, на II, III і IV — 40 041.

6. Сума простих чисел, які не перевищують 100.

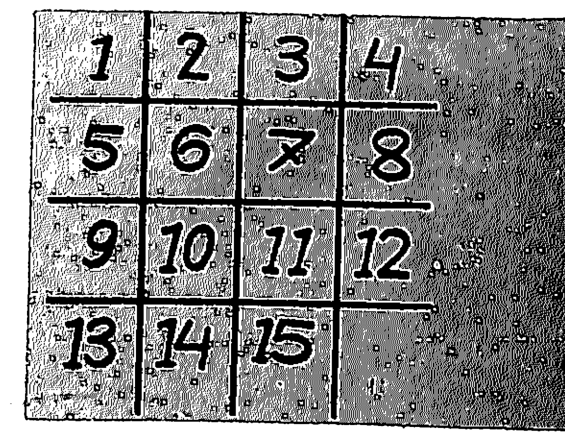
8. Вага в тоннах вантажу, для перевезення якого п'ятитонних грузовиків потрібно було б на 42 менше, ніж двохтонних.

12. Добуток трьох послідовних непарних чисел, одне з яких 11.

15. Число, яке ділиться на 9 і на 9 більше від числа, написаного тими самими цифрами в зворотному порядку.

16. Число, яке в 10 раз більше від суми його цифр.

ГРА В П'ЯТНАДЦЯТЬ



Ми розглянемо тут одну гру, аналіз якої пов'язаний з важливим математичним поняттям — інверсією.

Беремо кілька послідовних чисел натурального ряду, починаючи з одиниці, і розташовуємо їх у будь-якому порядку, тобто позначаємо, яке з цих чисел ми вважаємо першим, яке другим і т. д. Наприклад, числа 1, 2, 3, 4, 5 можна впорядкувати так:

$$3,\ 2,\ 1,\ 5,\ 4. \qquad (1).$$

Ми говоритимемо, що в упорядкованій множині чисел два числа утворюють інверсію, якщо більше з них передує меншому. У нашому прикладі такими будуть пари чисел: 3 і 1, 3 і 2, 2 і 1, 5 і 4. Отже, у ряду чисел (1) маємо чотири інверсії[1].

Поміняймо місцями в ряду (1) два сусідні числа, наприклад, 1 і 5:

$$3,\ 2,\ 5,\ 1,\ 4. \qquad (2)$$

Для стислості говоритимемо, що ми пересунули 5 на один крок ліворуч (або 1 на один крок праворуч). Можна в ряду (1) пересунути 5 і на один крок праворуч, помінявши його місцем з числом 4:

$$3,\ 2,\ 1,\ 4,\ 5. \qquad (3)$$

Легко помітити, що в ряду (2) на одну інверсію більше, а в ряду (3) на одну менше, ніж у ряду (1). Справді, помі-

[1] Термін *інверсія* (від латинського слова inversio — переставляння, перетворення) в різних науках має різне значення. Так, у літературознавстві інверсією називають порушення звичайного порядку слів у реченні, наприклад: «Гетьте думи, ви хмари осінні!», замість «... осінні хмари».

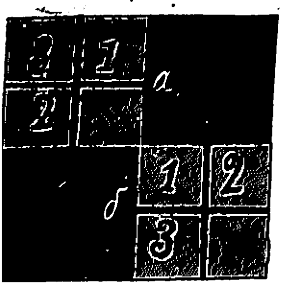


Рис. 1.

нявши місцями два сусідні числа, які не утворюють інверсії, дістанемо пару чисел, що перебувають в інверсії, і навпаки. З другого боку, кількість інверсій, утворених кожним з цих двох чисел з іншими числами ряду, не зміниться, бо коли, наприклад, число 5 стояло після 2 у ряду (1), то воно стоятиме після 2 і в ряду (2).

Пересунувши число на один, а потім ще на один крок в одному напрямі, тобто на два кроки в цьому напрямі, побачимо, що кількість інверсій змінилася на парне число одиниць. Наприклад, у рядах

3, 5, 2, 1, 4

3, 2, 4, 1, 5

є відповідно 6 і 4 інверсії, отже, їх кількість порівняно з рядом (1) змінилася на 2 і 0 одиниць.

Неважко узагальнити ці міркування і на складніші випадки. Якщо, наприклад, у впорядкованій множині чисел пересунути якесь число на три кроки в одному напрямі, то, очевидно, кількість інверсій у цій множині зміниться на непарне число одиниць.

Запропонуємо тепер читачеві таку простеньку гру. Нехай квадратну дошку поділено на чотири квадрати; на три з них, крім правого нижнього, кладемо в будь-якому порядку три фішки з номерами 1, 2, 3 на них; одне з можливих розташувань фішок, або, як кажуть, одну з позицій, подано на рис. 1, *а*.

Фішки пересуваємо, додержуючи правила: на порожню клітку можна ставити фішку з квадрата, що має з порожньою кліткою спільну сторону (на рис. 1, *а* фішку 1 або 2, але не фішку 3). Мета цих пересувань — перейти до нормальної позиції, тобто до розташування фішок, зображеного на рис. 1, *б*.

З рис. 2 бачимо, як можна досягти цього в нашому прикладі. Стрілки показують, яку саме фішку треба пересунути.

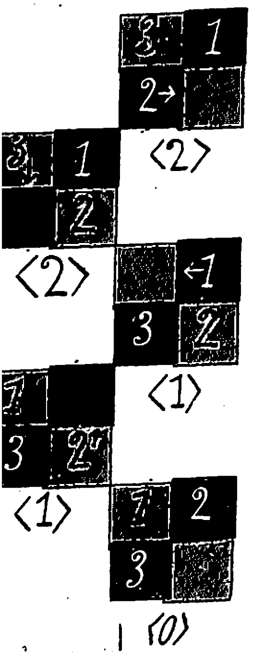


Рис. 2.

Вважатимемо, що на наших рисунках числа верхнього ряду передують числам нижнього, а з чисел одного ряду попереднім буде те, яке стоїть ліворуч (порожня клітка не враховується). Отже, записавши в один ряд порядок фішок на окремих частинах рис. 2, матимемо:

$$3,\ 1,\ 2; \quad 3,\ 1,\ 2; \quad 1,\ 3,\ 2; \quad 1,\ 3,\ 2; \quad 1,\ 2,\ 3. \qquad (4)$$

Ми помічаємо, що кількість інверсій (на рис. 2 — число в дужках під відповідною позицією) залишається незмінною при зсуві фішки

в межах одного ряду, але при її переході з одного ряду до іншого змінюється на одиницю, бо цей перехід пересуває на один крок відповідне число в одній з трійок (4); так, у третій трійці пересунулося праворуч число 3, у п'ятій — ліворуч число 2.

При переході від початкової позиції до нормальної доведеться стільки ж разів пересувати фішки з верхнього ряду до нижнього, скільки й з нижнього до верхнього; адже за правилами гри в обох цих позиціях (але не в проміжних) вільною має бути права нижня клітка. Отже, при зазначеному переході число таких пересувань обов'язково буде парним, а тому кількість інверсій зміниться на парне число одиниць, бо сума або різниця двох одиниць (і взагалі двох непарних чисел) є парне число.

Але в нормальній позиції (рис. 1, *б*) кількість інверсій дорівнює нулю; тому на початку гри їх має бути парне число, бо інакше прийти до нормальної позиції неможливо. Так, на рис. 3, *а* маємо одну, на рис. 3, *б* — три інверсії; отже, в обох цих випадках гру не можна довести до кінця, тобто не можна перейти до розташування фішок, подано-

Німецький математик Аренс, який займався дослідженням ігор, про «Гру в 15» розповідає, що вона дуже швидко поширилась по всій Європі; захоплення цією грою перетворилось у справжнє громадське лихо. Грали всі і всюди. Квадратну коробочку з цією грою можна було бачити в руках службовців, торговців і навіть у депутатів німецького рейхстагу під час його засідань. Шалене захоплення грою посилилося ще більше, коли її винахідник Самуель Ллойд запропонував видавцеві однієї нью-йоркської газети опублікувати задачу, за розв'язання якої він призначав премію 1000 доларів.

Розповідають, що, шукаючи розв'язання цієї задачі, яке здавалося таким доступним, торговці забували відкривати свої магазини, штурмани кидали кермо і саджали на мілину кораблі, машиністи минали станції без зупинки. Марно шукаючи розв'язання задачі, службовці частенько проводили ночі на вулицях під ліхтарями.

Але, на щастя, ця лихоманка тривала недовго. Скоро математики довели нерозв'язність ряду таких задач, зокрема й тієї, за розв'язання якої було призначено премію.

Якби не математики, то, мабуть, ще багато років тривала б ця безглузда гонитва за премією, поки її шукачі не перепробували б усіх можливих комбінацій.

го на рис. 1, *б*. На рис. 3, *в* маємо 2 інверсії, тому в цій позиції «виграш» можливий; пропонуємо читачеві знайти його.

Застосуймо ті самі правила до випадку, коли дошку поділено на 16 квадратів, усіх фішок маємо 15 з номерами від 1 до 15 на них, а за нормальну позицію вважаємо розташування фішок, зображене на стор. 53; це й буде так звана «гра в п'ятнадцять». Тут зсув фішки на порожню клітку сусіднього рядка змінює кількість інверсій у розташуванні фішок на непарне число одиниць; наприклад, пересунувши фішку 12 на вільну клітку, дістанемо позицію з трьома інверсіями, утвореними парами чисел: 13 і 12, 14 і 12, 15 і 12,— адже фішка з номером 12 пересунулася в цьому разі на три кроки праворуч. Тому і в цій грі треба, щоб у початковій позиції було парне число інверсій. «Гру в п'ятнадцять» вигадав у 1878 р. видатний американський проблеміст (автор шахових задач) Самюель Лойд.

Вона довгий час захоплювала багатьох. Ця гра належить до таких ігор, коли людина грає, так би мовити, сама з собою, не потребуючи партнера, а виграш полягає в досягненні нормальної позиції (стор. 53). Грали вдома, у дорозі, на засіданнях тощо; у журналах друкували різні позиції і призначали премії за знаходження виграшу в них. Проте захоплення цією грою минуло після втручання математиків, які довели, що виграти можна тоді і тільки тоді, коли в початковій позиції маємо парне число інверсій. Це дуже добре ілюструє потужність математичних методів: замість величезного числа безнадійних спроб досягти виграшу, коли це неможливо, ми в кожному окремому випадку легко можемо виявити, як має закінчитися гра — виграшем чи програшем.

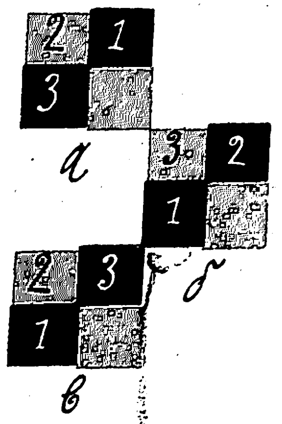


Рис. 3.

АРИФМЕТИКА ЛИШКІВ

АРИФМЕТИКА ЛИШКІВ ЗА МОДУЛЕМ *m*, або *m*-АРИФМЕТИКА[1]

При додаванні двох одноцифрових чисел можна дістати або одноцифрове число, наприклад $1 + 4 = 5$, $7 + 2 = 9$, або двоцифрове число, наприклад $3 + 9 = 12$, $5 + 8 = 13$, $7 + 9 = 16$, $4 + 6 = 10$ Домовимося, коли сума двоцифрова, залишати тільки останню цифру і писати

$$3 + 9 = 2,$$
$$5 + 8 = 3,$$
$$7 + 9 = 6,$$
$$4 + 6 = 0.$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8

При такому новому означенні операції додавання сума будь-яких двох одноцифрових чисел є знову одноцифрове число.

Перемножуючи два одноцифрових числа, можемо дістати або одноцифрове число: $2 \cdot 3 = 6$, $1 \cdot 8 = 8$, $3 \cdot 3 = 9$, або двоцифрове число: $6 \cdot 7 = 42$, $7 \cdot 8 = 56$, $9 \cdot 9 = 81$. Якщо добуток двоцифровий, братимемо тільки останню цифру і писатимемо

$$6 \cdot 7 = 2, \quad 7 \cdot 8 = 6, \quad 3 \cdot 3 = 9.$$

При цьому новому означенні операції множення добуток двох одноцифрових чисел завжди буде одноцифровим числом. Введені нами операції відрізняються від дій, які ми звикли називати додаванням і множенням і позначати знаками «+» і «·». Тому, строго кажучи, слід було б ввести для цих нових операцій нові назви і нові знаки. Проте виявляється, що всі формули звичайної алгебри, що містять у собі тільки знаки «+», «·» і будь-яку кількість дужок, зберігаються і для нових операцій[2]. Зокрема, залишаються

[1] Буквою *m* позначається будь-яке натуральне (ціле додатне) число, більше за одиницю.

[2] Ці формули можуть містити також піднесення до цілого додатного степеня, бо цілий додатний степінь є просто скорочений запис добутку кількох однакових співмножників.

вірними формули

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$
$$a + b = b + a,$$
$$a(bc) = (ab)c,$$
$$a(b + c) = ab + ac,$$

а також формули

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$$

та інші. Тому вживання звичайних знаків «+», «·» в новому значенні не може спричинити непорозуміння.

Отже, ми побудували нову арифметику, відмінну від арифметики, що вивчається в школі, але при всьому цьому дуже схожу на неї. Ця нова арифметика буде корисною нам при розв'язуванні багатьох задач із звичайної арифметики та алгебри.

Нашу нову арифметику ми називатимемо *арифметикою лишків за модулем* 10, або *10-арифметикою*, тому що в ній тільки 10 чисел:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Складемо таблиці додавання і множення в 10-арифметиці:

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8

·	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Зробимо ще одне важливе зауваження: якщо в будь-якій правильній числовій рівності із звичайної арифметики, яка містить, крім чисел, тільки знаки додавання, множення і дужки, замінити кожне число його останньою цифрою, то дістанемо рівність, яка вірна в розумінні 10-арифметики. Наприклад, з вірних рівностей

$$(18 + 15)\ (123 + 1341) = 11 \cdot 8 \cdot 549,$$
$$10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = (10 + 15) \cdot 3,$$
$$2^{10} + 151 = 1175$$

цим способом дістанемо вірні 10-арифметичні рівності

$$(8 + 5)\ (3 + 1) = 1 \cdot 8 \cdot 9,$$
$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = (0 + 5)\,3,$$
$$2^{10} + 1 = 5^1.$$

1. Розкладіть всіма можливими способами число 0 у добуток двох співмножників (в розумінні 10-арифметики).

2. Напишіть всі можливі розклади на множники для числа 1.

3. Якою цифрою закінчуються числа

6^{811}, 2^{1000}, 3^{999}?

В 7-а р и ф м е т и ц і сім чисел:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Додавання і множення в 7-арифметиці визначаються такими правилами: щоб додати два числа, треба знайти їх суму в розумінні звичайної арифметики і потім взяти остачу від ділення цієї суми на 7; щоб перемножити два числа, треба знайти їх звичайний добуток і взяти остачу від ділення його на 7.

■

[1] Зрозуміло, що показник степеня не слід заміняти останньою цифрою. Показник степеня відіграє в формулі іншу роль, ніж числа, які не є показниками: він є просто скорочене позначення того, скільки разів треба взяти співмножником основу степеня.

Унікурсальні лінії

Не кожну геометричну фігуру можна накреслити, не відриваючи олівця від паперу. Проте багато фігур можна накреслити неперервною лінією. Такі фігури називають *унікурсальними*.

Як же дізнатися наперед, чи можна накреслити фігуру одним розчерком? Для цього треба придивитися до точок перетину ліній фігури. Назвемо такі точки в у з л а м и. З кожного вузла виходить кілька ліній. Якщо кількість цих ліній парна, то вузол називається парним; якщо ж кількість ліній, які виходять з вузла, непарна, то вузол називається непарним.

Наприклад, у квадраті з проведеними діагоналями з кожної вершини виходять три лінії (дві сторони і діагональ). Отже, усі вершини цього квадрата — непарні вузли. А от точка перетину діагоналей — парний вузол: з неї виходять чотири лінії.

Накреслити одним розчерком можна лише таку фігуру, в якої всі вузли парні або непарних вузлів тільки два. У першому випадку починати креслити можна з будь-якої точки фігури, а в другому — обов'язково з непарного вузла.

Докладно ці питання розглядає математична дисципліна, яка називається т о п о л о г і є ю. Пропонуємо читачеві накреслити одним розчерком кілька кривих (див. стор. 58). Радимо спочатку перевірити, які з вузлів фігури непарні, а вже потім братися за роботу.

Наведемо кілька прикладів:

$$3+5=1, \qquad 5\cdot 3=1,$$
$$4+6=3, \qquad 3\cdot 6=4,$$
$$3+4=0, \qquad 2\cdot 6=5.$$

4. Складіть таблицю додавання і таблицю множення в 7-арифметиці. Випишіть усі розклади чисел 0 і 1 на два співмножники.
5. Визначте остачу від ділення на 7 числа 3^{100}.

Розглянуті нами 10-арифметика і 7-арифметика є окремими видами арифметики лишків за модулем m, або m-арифметики. Нехай m — будь-яке ціле додатне число. Елементами m-арифметики є числа 0, 1, 2, ..., $m-1$. Додавання і множення в m-арифметиці означають так: щоб додати (або перемножити) два числа, треба взяти остачу від ділення на m їх звичайної суми (відповідно добутку).

6. Скласти таблицю додавання і таблицю множення в 2-арифметиці, 3-арифметиці, 4-арифметиці і 9-арифметиці.
7. Обчислити в 11-арифметиці вирази:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10;$$
$$2^{10};\ 3^{10};\ 4^{10};\ 5^{10};\ 6^{10};\ 7^{10};\ 8^{10};\ 9^{10};\ 10^{10}.$$

8. Визначити остачі від ділення числа 2^{1000} на 3, 5, 11, 13.

Віднімання в m-арифметиці, подібно до звичайної арифметики, означають як дію, обернену до дії додавання: число x називається різницею чисел b і a $(x=b-a)$, якщо

$$a+x=b.$$

Наприклад, в 7-арифметиці

$$2-5=4, \quad \text{бо} \quad 5+4=2,$$
$$1-6=2, \quad \text{бо} \quad 6+2=1.$$

Найшвидший спосіб для обчислення різниці двох чисел в m-арифметиці такий: треба знайти різницю у звичайному розумінні і, якщо вона від'ємна, збільшити її на m. Наприклад, в 7-арифметиці

$$1-5=-4=3,$$
$$2-3=-1=6.$$

Віднімання в m-арифметиці завжди можливе і приводить до єдиної відповіді. Вживання для m-арифметичної операції віднімання звичайного знака «—» виправдано тим, що коли формула з звичайної алгебри правильна і містить тільки знаки «+», «—», «·» і будь-яку кількість дужок, то така формула залишається правильною і при m-арифметичному тлумаченні знаків, що в ній зустрічаються. Зокрема, зберігаються формули

$$-(-a)=a^{1}, \qquad -(a-b)=-a+b,$$
$$-(a+b)=-a-b, \qquad a+(-b)=a-b,$$

а також формули:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b), \quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2,$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

та інші.

m-арифметика застосовується до звичайної арифметики для перевірки дій додавання, віднімання і множення. При цьому користуються тим, що правильна рівність із звичайної арифметики перетворюється в правильну рівність з m-арифметики, якщо замінити кожне число його остачею від ділення на m. Перевіримо, наприклад, з допомогою 7-арифметики рівність

$$74\,218\cdot 21\,363-81\,835=1\,585\,446\,299. \qquad (1)$$

Замінивши кожне число його остачею від ділення на 7, матимемо:

$$4\cdot 6-5=1.$$

Ця рівність не є правильною в 7-арифметиці і, отже, вихідний приклад містить у собі помилку. Найчастіше для пере-

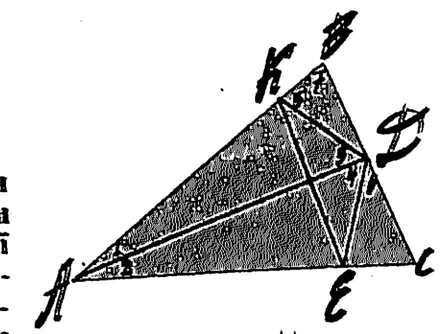
[1] $-a$, як і звичайно, позначає число $0-a$. Так, наприклад, у 8-арифметиці $-3=5$.

Розв'язання задач

(див. стор. 299).

5. 1) Відкладемо на AB відрізок $AK=AE$ і виконаємо побудови, подані на рисунку.

2) $\triangle AKD=\triangle AED$: AD — спільна сторона, $\angle 1=\angle 2$ (AD — бісектриса $\angle BAC$), $AK=AE$ (за побудовою). Тоді $KD=DE$. Отже, $\triangle KDE$ — рівнобедрений. З рівності тих самих трикутників випливає, що $\angle 3=\angle 4$,



тобто в $\triangle KDE$ DA є бісектрисою $\angle KDE$.

3) $\angle 5=\angle 1+\angle 3$ (як зовнішній кут $\triangle AKD$); $\angle 6=\angle 1+\angle 2=2\angle 1$ (за умовою). $\angle KDC=2\angle 3+2\angle 1$, $\angle KDC=\angle 5+\angle 7$ (як зовнішній у $\triangle KBD$). Звідси $\angle 7=\angle KDC-\angle 5=2\angle 3+2\angle 1-(\angle 1+\angle 3)=\angle 1+\angle 3$, тобто $\angle 5=\angle 7$. Отже, $\triangle KBD$ рівнобедрений. А звідси $KD=BD$, а оскільки вже доведено, що $KD=ED$, то $ED=BD$.

1. *Маємо*

$$0 = 0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0 \cdot 2 = 0 \cdot 3 = 0 \cdot 4 = 0 \cdot 5 = 0 \cdot 6 = 0 \cdot 7 = 0 \cdot 8 = 0 \cdot 9 = 2 \cdot 5 = 4 \cdot 5 = 6 \cdot 5 = 8 \cdot 5.$$

Добуток числа 0 на будь-яке число, як і в звичайній арифметиці, завжди дорівнює нулю. Проте, на відміну від звичайної арифметики, добуток може дорівнювати нулю навіть тоді, коли кожний з співмножників відмінний від нуля. Числа 0, 2, 4, 6, 8, 5, які можуть давати нуль при множенні на число, що не дорівнює нулю, називаються *дільниками нуля*.

2. *Маємо*

$$1 = 1 \cdot 1 = 3 \cdot 7 = 9 \cdot 9.$$

Зауважимо, що в ці рівності не входить жодне число, яке є дільником нуля, і входять усі без винятку інші числа.

3. Щоб розв'язати задачу, досить обчислити вирази 6^{811}, 2^{1000} і 3^{999} в 10-арифметиці. В 10-арифметиці справедлива рівність $6^2 = 6$. Помножаючи цю рівність послідовно на 6, 6^2, 6^3, . . . , дістанемо

$$6^3 = 6^2; \quad 6^4 = 6^3, \quad 6^5 = 6^4, \ldots .$$

Звідси виходить, що при будь-якому показнику n $6^n = 6$. Зокрема, $6^{811} = 6$. Для обчислення 2^{1000} враховуємо, що $2^4 = 6$; отже, $2^{1000} = 2^{4 \cdot 250} = 6^{250} = 6$. Нарешті, з рівності $3^4 = 1$ виводимо $3^{999} = 3^{4 \cdot 249 + 3} = (3^4)^{249} \cdot 3^3 = 3^3 = 7$.

4. Таблиця додавання

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

Таблиця множення

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

Розклади нуля і одиниці мають вигляд.

$$0 = 0 \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 2 \cdot 0 = 3 \cdot 0 = 4 \cdot 0 = 5 \cdot 0 = 6 \cdot 0,$$

$$1 = 1 \cdot 1 = 2 \cdot 4 = 3 \cdot 5 = 6 \cdot 6.$$

Розв'язування задач

Отже, в 7-арифметиці добуток двох чисел може дорівнювати нулю тільки тоді, коли хоч би один з співмножників дорівнює нулю. В цьому 7-арифметика схожа із звичайною арифметикою і відмінна від 10-арифметики.

Порівняємо подану тут 7-арифметичну таблицю множення з таблицею множення в 10-арифметиці (стор. 58). Між цими таблицями є така істотна відмінність: в кожному рядку 7-арифметичної таблиці (крім рядка, що відповідає нулю) зустрічаються всі числа з 7-арифметики, кожне по одному разу; тоді як в 10-арифметичній таблиці в окремих рядках деяких чисел з 10-арифметики немає, а інші повторюються кілька разів. Такими рядками з повтореннями, крім рядка 0, є також рядки 2, 4, 5, 6, 8, тобто рядки, що відповідають дільникам нуля (див. розв'язання задачі 1). Відсутність в 7-арифметичній таблиці рядків з повтореннями зв'язане з відсутністю в 7-арифметиці дільників нуля, відмінних від нуля.

5. Обчислимо 3^{100} в 7-арифметиці:

$$3^2 = 2, \quad 3^3 = 6, \quad 3^4 = 4, \quad 3^5 = 5, \quad 3^6 = 1.$$

Отже,

$$3^{100} = 3^{6 \cdot 16 + 4} = (3^6)^{16} \cdot 3^4 = 3^4 = 4.$$

6. Наводимо таблиці для 2-арифметики і 4-арифметики:

2-арифметика

Таблиця додавання

	0	1
0	0	1
1	1	0

Таблиця множення

	0	1
0	0	0
1	0	1

4-арифметика

Таблиця додавання

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Таблиця множення

	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Таблиці множення в 2-арифметиці і 3-арифметиці належать до того ж типу, що й 7-арифметична таблиця: в них немає рядків з повтореннями, крім рядка 0. Навпаки, 4-арифметична і 9-арифметична таблиці множення, подібно до 10-арифметичної таблиці, містять ненульові рядки з повтореннями.

7. Відповіді: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 10$,

$$2^{10} = 3^{10} = \ldots = 10^{10} = 1.$$

8. Відповіді: 1; 1; 1; 3.

вірки користуються 9-арифметикою. Справа в тому, що будь-яке число N і сума його цифр дають при діленні на 9 однакові остачі, і це значно полегшує знаходження остач від ділення на 9[1].

Зауважимо, що перевірка за допомогою m-арифметики не завжди дає змогу виявити помилку. Так, якби ми почали перевіряти неправильну рівність (1) за допомогою 9-арифметики, то прийшли б до правильної 9-арифметичної рівності

$$4 \cdot 6 - 7 = 8.$$

Щоб зробити пропуск помилки менш імовірним, перевірку можна виконувати одночасно за допомогою кількох різних m-арифметик, наприклад за допомогою 7-арифметики і 9-арифметики.

9. Доведіть, що сума кубів усіх чисел з 1001-арифметики дорівнює нулю.

10. а) Доведіть, що коли кожне з чисел m-арифметики (при непарному m) піднести до одного й того самого непарного степеня k і всі результати додати, то дістанемо нуль.

б) Доведіть, що якими б не були непарні числа m і k, сума $1^k + 2^k + \ldots + (m-1)^k$ ділиться на m.

АРИФМЕТИКА ЛИШКІВ ЗА МОДУЛЕМ p, або p-АРИФМЕТИКА[2]

Схеми множення. *Мала теорема Ферма.* Зобразимо числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 з 7-арифметики у вигляді крапок на рисунку і покажемо стрілками, у що переходить кожне число при множенні на 4. Маємо схему[3], зображену на рис. 1. Цією схемою можна користуватися як таблицею множення на 4 в 7-арифметиці. Тому ми називаємо її *схемою множення* на 4 в 7-арифметиці.

[1] Числа 10, 10^2, 10^3, ... дають при діленні на 9 в остачі 1. Тому числа $N = a \cdot 10^n + b \cdot 10^{n-1} + \ldots + f$ та $a + b + \ldots + f$ дають при діленні на 9 однакові остачі.

[2] Буквою p позначається будь-яке просте число, тобто натуральне число, яке більше за одиницю і не має дільників, крім одиниці і самого себе.

[3] Оскільки розташування на рисунку крапок, що відповідають числам 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, зовсім байдуже, ми розташували ці крапки так, щоб не доводилося проводити довгих стрілок.

Так само будується схема множення на 4 в 10-арифметиці (рис. 2). Послідовність n чисел, зображених на деякій схемі, називається *циклом*,

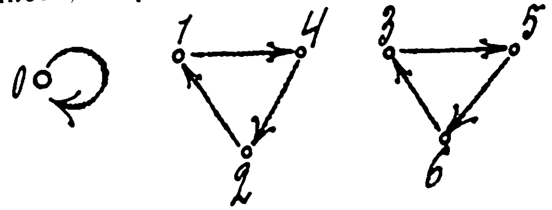


Рис. 1.

якщо від кожного з цих чисел до наступного і від останнього до першого веде стрілка. На побудованих нами схемах є такі цикли:

Схема на рис. 1: 0; 1, 4, 2; 3, 5, 6;

Схема на рис. 2: 0; 4, 6; 2, 8.

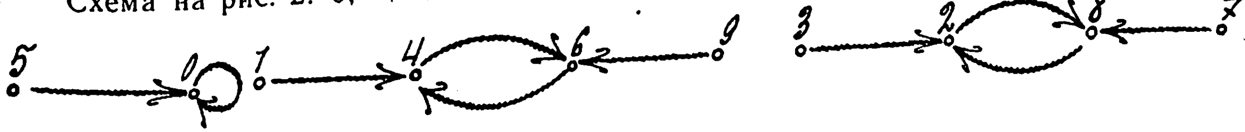


Рис. 2.

Ці схеми істотно відрізняються одна від одної: на першій кожне число потрапляє в деякий цикл (до того ж тільки один); на другій є числа 1, 3, 5, 7, 9, що не належать жодному циклу.

11. Побудуйте схеми множення на 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 в 7-арифметиці, схеми множення на 2 і 5 в 10-арифметиці і схему множення на 3 в 9-арифметиці.

12. Доведіть, що коли a і b — числа з p-арифметики і $ab = 0$, то або $a = 0$, або $b = 0$.

13. Нехай a — будь-яке відмінне від нуля число з p-арифметики. Доведіть, що схема множення на a має такі властивості:

а) до жодного числа не можуть підходити дві стрілки;

б) до кожного числа підходить певна стрілка.

14. Нехай a і b — будь-які числа з p-арифметики, причому $a \neq 0$. Використовуючи попередню задачу, довести, що в p-арифметиці знайдеться і до того ж тільки одне число x таке, що $ax = b$.

15. Нехай a — відмінне від нуля число з p-арифметики. Доведіть, що:

а) схема множення на a розпадається на цикли;

б) всі ці цикли (крім цикла 0) мають однакову довжину.

Виведіть звідси, що $a^{p-1} = 1$.

16. М а л а т е о р е м а Ф е р м а. Доведіть, що коли p — просте число і a не ділиться на p, то $a^{p-1} - 1$ ділиться на p.

Ділення. Теорема Вільсона. Ділення в m-арифметиці означається як дія, обернена до множення: число x називається *часткою* від ділення b на a (або *відношенням* b до a), якщо $ax = b$. Ділення в m-арифметиці не завжди можливе. Наприклад, в 10-арифметиці не можна підібрати таке число x, щоб $4x = 5$. З другого боку, якщо ділення можливе, воно може не приводити до єдиної відповіді. Наприклад, в 10-арифметиці $4 \cdot 8 = 2$ і $4 \cdot 3 = 2$, отже, числа 8 і 2 з однаковим правом можуть бути названі частками від ділення двох на 4. Однак із задачі 14 випливає, що в p-арифметиці (p — число просте) ділення на будь-яке число $a \neq 0$ завжди можливе і однозначне[1].

Завдяки цій важливій обставині будь-яка рівність із звичайної алгебри, що містить тільки знаки додавання, віднімання, множення і ділення (або риску, що заміняє знак ділення), залишається вірною при p-арифметичному тлумаченні цих знаків. Зокрема, в p-арифметиці зберігаються формули

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}, \quad \frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}; \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc},$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

та інші.

Використовуючи p-арифметику, можна перевіряти дії з дробами подібно до того, як за допомогою m-арифметики перевіряють дії з цілими числами. Наприклад, щоб перевірити рівність

$$\frac{5}{22} + \frac{3}{17} - \frac{4}{15} = \frac{739}{5610},$$

[1] Ділення на нуль числа $a \neq 0$ в p-арифметиці так само неможливе, як і в звичайній арифметиці, бо не існує числа x, яке задовольняло б умову $0 \cdot x = a$. Проте іноді буває доцільно писати умовно $\frac{a}{0} = \infty$. При цьому треба пам'ятати, що символ ∞ не є числом і ним не можна оперувати як числом.

заміняють у цій рівності кожне ціле число його остачею від ділення на якесь просте число p, наприклад на 7[1]. Виходить

$$\frac{5}{1} + \frac{3}{3} - \frac{4}{1} = \frac{4}{3}$$

Ця рівність не є правильною 7-арифметичною рівністю. Отже, у вихідному прикладі допущено помилку.

17. Складіть таблиці обернених величин $\frac{1}{k}$ в 7-арифметиці, в 11-арифметиці і в 13-арифметиці.

Як зразок наведемо таблицю обернених величин у 5-арифметиці:

k	1	2	3	4
$\frac{1}{k}$	1	3	2	4

Покажіть, що в будь-якій p-арифметиці самі собі обернені тільки елементи 1 і -1.

18. а) Доведіть, що добуток всіх елементів p-арифметики, відмінних від нуля, дорівнює -1.

б) (Т е о р е м а В і л ь с о н а). Доведіть, що коли p — просте число, то $(p-1)! + 1$ ділиться[2] на p.

19. (Обернена до задачі 18, б). Доведіть, що коли $(m-1)! + 1$ ділиться на m, то m — число просте.

20. Доведіть, що коли кожне з чисел p-арифметики піднести до одного й того самого степеня k і всі результати додати, то буде 0 або -1.

[1] Число p треба вибирати так, щоб воно не входило співмножником в жоден із знаменників. У противному разі ми прийшли б до p-арифметичної рівності, що містить ділення на нуль.

[2] $n!$ є скорочений запис добутку $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n$ усіх цілих чисел від 1 до n, отже, $(p-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (p-1)$.

9. Треба довести, що в 1001-арифметиці

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 500^3 + 501^3 + \ldots + 998^3 + 999^3 + 1000^3 = 0. \qquad (1)$$

Але в 1001-арифметиці

$$\begin{aligned} 1000 &= -1, & 1000^3 &= (-1)^3 = -1^3, \\ 999 &= -2, & 999^3 &= (-2)^3 = -2^3, \\ 998 &= -3, & 998^3 &= (-3)^3 = -3^3, \\ &\ldots \\ 501 &= -500, & 501^3 &= (-500)^3 = -500^3. \end{aligned}$$

Тому члени суми (1), однаково віддалені від кінців, взаємно знищуються.

10. а) Розв'язується так само, як задача 9.

б) Вираз $1^k + 2^k + \ldots + (m-1)^k$ в силу задачі а) дорівнює нулю в m-арифметиці. Отже, в звичайній арифметиці він ділиться на m.

11. Як приклад наводимо схему множення на 3 в 7-арифметиці (рис. 3), схему множення на 5 в 10-арифметиці (рис. 4) і схему множення на 3 в 9-арифметиці (рис. 5).

Перша з цих схем розпадається на цикли, чого не можна сказати про інші дві схеми.

12. Для знаходження p-арифметичного добутку чисел a і b треба знайти їх звичайний добуток і взяти його остачу від ділення на p. Тому p-арифметичний добуток дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли звичайний добуток ділиться на p. Але, як відомо із звичайної арифметики, добуток може ділитися на просте число p тільки в тому разі, якщо один із співмножників ділиться на p. Отже, або a, або b ділиться на p; а через те що a і b містяться серед чисел $0, 1, 2, \ldots, p-1$, то або $a = 0$ або $b = 0$.

Примітка. Неважко встановити такий факт: якщо в m-арифметиці з $ab = 0$ виходить, що або $a = 0$, або $b = 0$, то m — число просте. Звідси і з задачі 12 випливає, що p-арифметику можна означити як m-арифметику, що не містить відмінних від нуля дільників нуля.

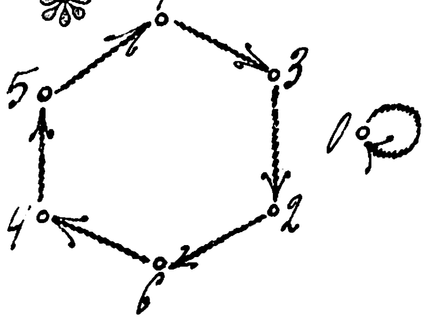


Рис. 3.

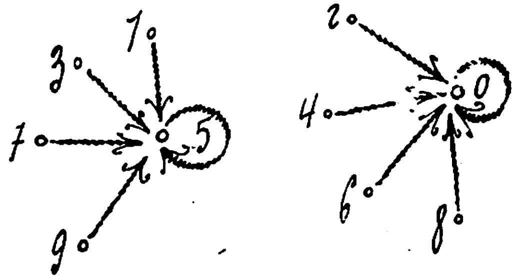


Рис. 4.

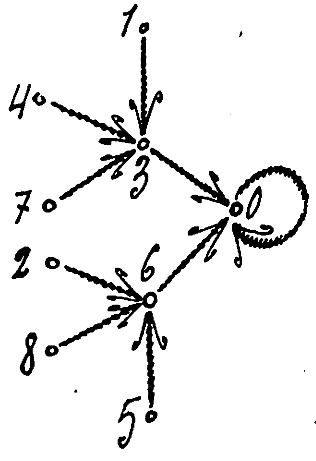


Рис. 5.

13. а) Якби до числа x підходили дві стрілки, скажімо, від чисел y і z, то це означало б, що $ay = x$ і $az = x$. Віднімаючи одну з цих рівностей від другої, знайдемо $a(y - z) = 0$, але в силу задачі 12 це неможливо, бо, за припущенням, $a \neq 0$ і $y \neq z$.

б) Від кожного числа відходить рівно одна стрілка. Тому кількість стрілок на схемі так само, як і кількість точок схеми, дорівнює p. Кожна стрілка підходить до якогось числа. Якби до якого-небудь числа не підходила жодна стрілка, то до якогось іншого числа підходили б дві стрілки, що неможливо згідно з задачею а).

Як пояснення до проведеного міркування зауважимо, що воно цілком аналогічне до такого міркування: припустимо, що класу, в якому 30 учнів, роздано 30 зошитів; коли відомо, що жоден учень не одержав більше одного зошита, то звідси можна зробити висновок, що *кожному* з учнів дісталося по зошиту.

14. Розглянемо схему множення на a. Згідно з задачею 13, б) до числа b підходить стрілка від якогось числа x. А це й означає, що $ax = b$.

15. а) Нехай b — довільне число з p-арифметики. Покажемо, що b належить якомусь циклу. Рухатимемось, відправляючись від b, за нашою схемою, переходячи від числа до числа, як показують стрілки. Після кількох переходів (число переходів може, зокрема, дорівнювати 1 і в усякому разі не перевищує p) ми вперше попадемо в точку, в якій уже побували раніше. Цією точкою може бути тільки точка b, бо в противному разі схема нашого шляху мала б вигляд, зображений на рис. 6, тобто до деякого числа підходило б дві стрілки, а це неможливо на підставі задачі 13, а).

б) Розглянемо цикл, що містить число 1. Нехай він має вигляд, зображений на рис. 7. Помножимо цей цикл на довільне число $c \neq 0$. Матимемо новий цикл нашої схеми (рис. 8) і притому такий, що має таку саму довжину, що й одиничний цикл. Зрозуміло, що будь-який цикл C схеми, крім нульового, можна дістати так: для цього досить помножити одиничний цикл на якесь число c, що належить циклу C. Отже, всі ненульові цикли мають однакову довжину.

Позначимо довжину ненульових циклів через k, а їх число — через s. Маємо $ks = p - 1$. З другого боку, $a^k = 1$ (див. рис. 7). Підносячи останню рівність до степеня s, дістанемо $a^{p-1} = 1$.

16. Випливає з того, що в p-арифметиці $a^{p-1} - 1 = 0$ (див. задачу 15).

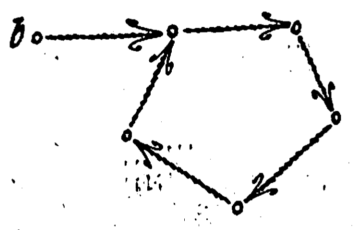


Рис. 6.

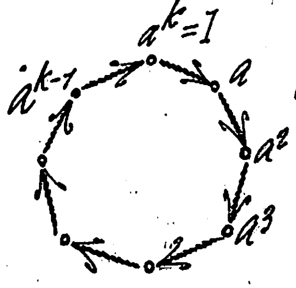


Рис. 7.

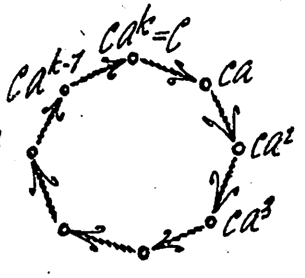


Рис. 8.

Розв'язування задач

ДОБУВАННЯ КВАДРАТНОГО КОРЕНЯ. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

Як і раніше, числа p-арифметики зображатимемо на рисунку точками. Побудуємо схему піднесення до квадрата для 5-арифметики (рис. 9).

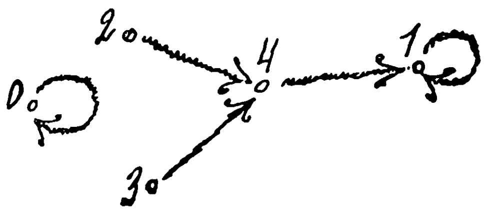


Рис. 9.

21. Побудуйте схеми піднесення до квадрата в 7-арифметиці, 12-арифметиці, 24-арифметиці. (Старайтеся при цьому підібрати розташування точок на рисунку так, щоб схеми мали якомога простіший вигляд).

22. Доведіть, що коли побудувати схему піднесення до квадрата в p-арифметиці [1], то до кожної точки цієї схеми (крім точки 0) або не підходитиме жодна стрілка, або ж підходитимуть дві стрілки. Інакше кажучи, доведіть, що при $a \neq 0$ рівняння $x^2 = a$ має в p-арифметиці два різні розв'язки або ж не має жодного розв'язку.

23. Доведіть, що корінь квадратний добувається рівно з $\frac{p+1}{2}$ чисел p-арифметики (і, таким чином, не добувається з $\frac{p-1}{2}$ інших чисел).

Якщо в схемах, побудованих при розв'язуванні задачі 21, змінити напрями всіх стрілок на протилежні, то вийдуть схеми добування кореня $\sqrt{a}$ у 7-, 12- і 24-арифметиках. З цих схем видно, що в m-арифметиці $\sqrt{a}$ може мати 0, 2, 4 і більше різних значень. Однак відповідно до задачі 22 в p-арифметиці з усіх цих можливостей залишаються тільки такі

[1] У задачах 22—25 буква p означає просте число, що не дорівнює 2.

дві: або $\sqrt{a}$ взагалі не добувається, або він має два різні значення. (Ми весь час припускаємо, що $a \neq 0$; $\sqrt{0}$ має тільки одне значення, що дорівнює нулю).

24. а) Доведіть, що квадратний корінь з -1 добувається в p-арифметиці, якщо $p = 4k + 1$, і не добувається, якщо $p = 4k + 3$.

В к а з і в к а. Використайте задачі 15 і 18.

б) Доведіть, що всі прості непарні дільники числа $a^2 + 1$ (при будь-якому a) мають вигляд $4k + 1$. Усяке просте число виду $4k + 1$ зустрічається в розкладі на прості множники принаймні одного числа виду $a^2 + 1$.

25. Виведіть формулу для розв'язання в p-арифметиці квадратного рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0$$

(a, b і c — числа з p-арифметики, $a \neq 0$).

Користуючись цією формулою, доведіть, що коли $\sqrt{b^2 - 4ac}$ [1] не добувається в p-арифметиці, то рівняння не має жодного кореня; якщо $b^2 - 4ac = 0$, то рівняння має один корінь; якщо $b^2 - 4ac \neq 0$ і $\sqrt{b^2 - 4ac}$ добувається, то рівняння має два різних корені.

26. Розв'яжіть в 7-арифметиці такі квадратні рівняння:

$$5x^2 + 3x + 1 = 0,$$
$$x^2 + 3x + 4 = 0,$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

27. Кожне квадратне рівняння, поділивши його на коефіцієнт при старшому члені, можна звести до виду

$$x^2 + cx + d = 0.$$

Загальне число різних зведених квадратних рівнянь в p-арифметиці дорівнює p^2. Підрахуйте, скільки з них не мають коренів, скільки мають один корінь і скільки мають два різних корені.

[1] Вираз $b^2 - 4ac$ називають *дискримінантом* рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

17 Таблиці обернених величин:

в 7-арифметиці

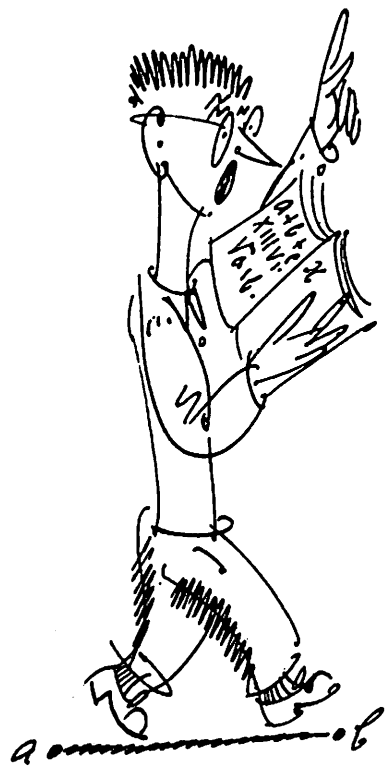
k	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{k}$	1	4	5	2	3	6

в 11-арифметиці

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{1}{k}$	1	6	4	3	9	2	8	7	5	10

в 13-арифметиці

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{k}$	1	7	9	10	8	11	2	5	3	4	6	12



Припустимо, що x само собі обернене, тобто $x = \frac{1}{x}$. Тоді $x^2 = 1$, звідки $(x-1)(x+1) = 0$. Згідно з задачею 12 з останньої рівності виходить, що або $x - 1 = 0$, або $x + 1 = 0$, тобто або $x = 1$ або $x = -1$.

18. а) В добутку $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (p-1)$ кожне з чисел, крім 1 і $p-1$, скоротиться з своїм оберненим (див. задачу 17). Тому

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (p-1) = 1 \cdot (p-1) = -1.$$

б) Випливає з задачі а).

19. Припустимо протилежне. Нехай m — складене (тобто не просте) число. Тоді

m ділиться на якесь число d, $1 < d \leqslant m - 1$. В такому разі $(m-1)!$ ділиться на d і $(m-1)! + 1$, ділячись на m, також ділиться на d. Але тоді і різниця їх

$$[(m-1)! + 1] - (m-1)! = 1$$

повинна ділитися на d, що суперечить умові $d > 1$.

20. Нам треба довести, що сума

$$S = 0^k + 1^k + 2^k + \dots + (p-1)^k \qquad (1)$$

дорівнює 0 або -1.

Розглянемо спочатку випадок, коли для будь-якого числа $a \, (a \neq 0)$ з p-арифметики $a^k = 1$. (Легко бачити, що цей випадок має місце, коли k ділиться на $p-1$. Можна довести, що інших можливостей немає, тобто якщо $a^k = 1$ для всіх a, то k ділиться на $p-1$). Тоді

$$S = 0^k + 1^k + 2^k + \dots + (p-1)^k = 0 + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{p-1 \text{ раз}} = p - 1 = -1.$$

Нехай тепер $a^k = 1$ не для всіх відмінних від нуля чисел a, тобто існує число $b \neq 0$ таке, що $b^k \neq 1$. Помножимо (1) на b^k. Матимемо

$$Sb^k = [0^k + 1^k + 2^k + \dots + (p-1)^k]\, b^k = (0 \cdot b)^k + (1 \cdot b^k) + $$
$$+ (2 \cdot b)^k + \dots + [(p-1) \cdot b^k].$$

Серед чисел $0 \cdot b, 1 \cdot b, 2 \cdot b, \dots, (p-1) \cdot b$ зустрінуться всі числа p-арифметики $\left(\text{для будь-якого } a \text{ має місце } \frac{a}{b} \cdot b = a\right)$. Крім того, кожне число a зустрінеться тут тільки один раз, бо якщо $a = xb$, то $x = \frac{a}{b}$. Тому

$$(0 \cdot b)^k + (1 \cdot b)^k + (2 \cdot b)^k + \dots \quad + [(p-1) \cdot b]^k$$

є та сама сума (1), тільки записана в іншому порядку:

$$Sb^k = S,$$
$$S(b^k - 1) = 0.$$

Оскільки $b^k - 1 \neq 0$, то, поділивши на цей вираз обидві частини рівності, дістанемо

$$S = 0.$$

Розв'язування задач

21. Нижче наводяться схеми піднесення до квадрата: в 7-арифметиці (рис. 10), в 12-арифметиці (рис. 11) і в 24-арифметиці (рис. 12).

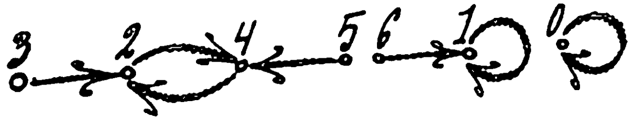


Рис. 10.

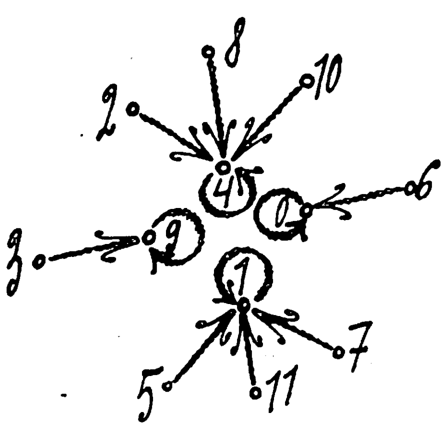


Рис. 11.

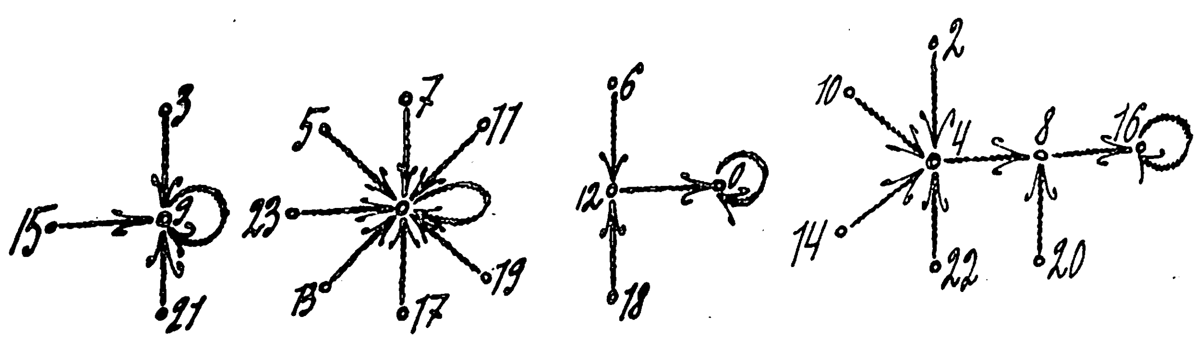


Рис. 12.

22. Припустимо, що рівняння

$$x^2 = a \qquad (1)$$

задовольняє якесь число b з p-арифметики, тобто має місце тотожність

$$b^2 = a. \qquad (2)$$

Віднімаючи рівність (2) від рівності (1), знаходимо

$$x^2 - b^2 = 0,$$

звідки

$$(x - b)(x + b) = 0.$$

Якщо добуток двох чисел p-арифметики дорівнює нулю, то один з співмножників дорівнює нулю (задача 12). Тому або $x - b = 0$, або $x + b = 0$, тобто або $x = b$, або $x = -b$.

Доведемо, що при $a \neq 0$ знайдені два розв'язки різні. Справді, з рівності $b = -b$ випливає $b + b = 0$. Якщо тільки p-арифметика, яку ми розглядаємо, не є 2-арифметикою, то звідси виходить, що $b = 0$, отже, також $a = 0$.

23. Розглянемо схему піднесення до квадрата в p-арифметиці і ті числа, з яких добувається квадратний корінь, тобто, інакше кажучи, ті точки, до яких підходить хоча б одна стрілка. Нехай k — число таких точок. Тоді в силу задачі 22 до однієї з них, а саме до точки 0, підходить одна стрілка, а до інших $(k - 1)$ точок — по дві стрілки. Отже, число всіх стрілок на схемі буде

$$2(k - 1) + 1.$$

З другого боку, від кожної точки відходить рівно одна стрілка, але точок на схемі p, отже, і стрілок p. Тому

$$2(k-1) + 1 = p, \quad k = \frac{p+1}{2}.$$

24. а) Нехай $p = 4k + 1$. Згідно з задачею 18

$$1 \cdot 2 \ldots (p - 1) = -1.$$

Перепишемо цю рівність так:

$$-1 = 1 \cdot 2 \ldots (p-1) = \left[1 \cdot 2 \ldots \frac{p-3}{2} \cdot \frac{p-1}{2}\right] \times$$

$$\times \left[\left(\frac{p-1}{2} + 1\right)\left(\frac{p-1}{2} + 2\right) \ldots (p-2)(p-1)\right] =$$

$$= \left[1 \cdot 2 \ldots \frac{p-3}{2} \cdot \frac{p-1}{2}\right] \times \left[\left(p - \frac{p-1}{2}\right)\left(p - \frac{p-3}{2}\right) \ldots$$

$$\ldots(p-2)(p-1)\Big] = \left[1\cdot 2\ldots\frac{p-3}{2}\cdot\frac{p-1}{2}\right]\left[(-1)(-2)\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\left(-\frac{p-3}{2}\right)\left(-\frac{p-1}{2}\right)\right] = \left[1\cdot 2\ldots\frac{p-3}{2}\cdot\frac{p-1}{2}\right]^2(-1)^{\frac{p-1}{2}} =$$

$$= \left[1\cdot 2\ldots\frac{p-3}{2}\cdot\frac{p-1}{2}\right]^2(-1)^{2k} =$$

$$= \left[1\cdot 2\ldots\frac{p-3}{2}\cdot\frac{p-1}{2}\right]^2,$$

тобто з -1 добувається квадратний корінь.

Навпаки, нехай дано, що $\sqrt{-1}$ добувається, тобто

$$x^2 = -1.$$

Піднесемо цю рівність до степеня $\frac{p-1}{2}$:

$$x^{2\left(\frac{p-1}{2}\right)} = (-1)^{\frac{p-1}{2}};$$

але згідно з задачею 15

$$x^{2\left(\frac{p-1}{2}\right)} = x^{p-1} = 1.$$

Звідси

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1 \quad і \quad \frac{p-1}{2} = 2k, \quad p = 4k+1.$$

Отже, не можна добути квадратний корінь з -1, якщо $p = 4k+3$.

б) Нехай a^2+1 ділиться на p. В p-арифметиці це запишеться у вигляді $b^2+1=0$ (b — остача від ділення a на p), тобто $\sqrt{-1}$ добувається в p-арифметиці; звідси згідно з попередньою задачею $p = 4k+1$. З другого боку, якщо $p = 4k+1$, то в p-арифметиці $\sqrt{-1}$ добувається, тобто існує a таке, що $a^2 = -1$, $a^2+1=0$. У звичайній арифметиці це означає, що a^2+1 ділиться на p.

25. Формула виводиться так само, як у звичайній алгебрі. Користуємося тотожністю

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}. \tag{1}$$

В силу цієї тотожності рівняння

$$ax^2+bx+c=0$$

еквівалентне рівності

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4ac} = 0$$

або

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}. \tag{2}$$

З останньої рівності видно, що коли рівняння (1) має розв'язок, то повинен добуватися корінь квадратний з b^2-4ac. Рівність (2) можна переписати в такому разі у вигляді

$$x+\frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

звідки

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{3}$$

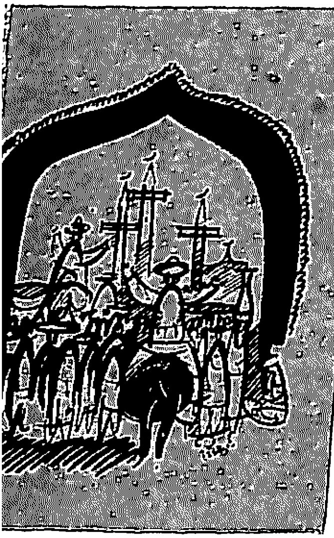
Отже, рівняння (1) не має розв'язку, якщо $\sqrt{b^2-4ac}$ не добувається, і має два розв'язки, обчислювані за формулою (3), якщо $\sqrt{b^2-4ac}$ добувається. Ці розв'язки різні, якщо $b^2-4ac \neq 0$, і збігаються, якщо $b^2-4ac=0$. У випадку 2-арифметики формула (3) втрачає зміст, бо вона містить ділення на два.

26. Обчислюємо для кожного з даних рівнянь дискримінант $D = b^2-4ac$. Маємо для першого рівняння $D=3$, для другого $D=0$, для третього $D=2$. Користуючись, наприклад, схемою задачі 21 (рис. 10), встановлюємо, що в 7-арифметиці $\sqrt{3}$ не добувається, а $\sqrt{2}$ добувається і має значення 3 і 4. Отже, перше рівняння не має розв'язків, друге має один розв'язок, третє має два розв'язки. Знаходимо ці розв'язки за формулою (5) задачі 25: для другого рівняння $x=2$, для третього $x_1=3$ і $x_2=6$.

27. Якщо α і β — корені рівняння $x^2+cx+d=0$, то, як і в звичайній алгебрі, $x^2+cx+d=(x-\alpha)(x-\beta)$. (Для того щоб у цьому переконатися, досить виразити α і β через c і d за допомогою формул коренів квадратного рівняння і розкрити дужки). Тому число зведених рівнянь, що мають два різні корені, дорівнює числу способів, якими можна вибрати два різні числа α і β з сукупності всіх p чисел p-арифметики, тобто дорівнює $\frac{p(p-1)}{2}$. Якщо рівняння $x^2+cx+d=0$ має тільки один корінь α, то $x^2+cx+d=(x-\alpha)^2$. Число таких рівнянь дорівнює p. Всі інші рівняння, число яких дорівнює $p^2-\frac{p(p-1)}{2}-p=\frac{p(p-1)}{2}$, не мають розв'язків.

Розв'язання задач

ЯК СТВОРЮВАЛАСЬ АЛГЕБРА



Місто Багдад — тепер столиця Іраку — в VII—IX ст. було столицею могутнього Арабського халіфату. Розвиток торгівлі привів до розвитку міської культури, яка на той час досягла досить високого рівня.

Багдадці вміли будувати величезні архітектурні та іригаційні споруди. Багдад став центром науки того часу. Туди з'їжджалися вчені з усіх кінців Арабського халіфату. Вони перекладали грецькі та індійські твори на арабську мову і коментували (пояснювали) їх. Арабська мова стала загальноприйнятою науковою мовою всіх народів, що жили в мусульманських країнах.

Багдадські халіфи сприяли розвитку природознавства і математичних наук. За панування халіфа Гаруна ал-Рашида в Багдаді була заснована велика бібліотека, а халіф ал-Мамун організував своєрідну академію — «Будинок мудрості» і побудував добре обладнану обсерваторію.

При дворі ал-Мамуна жив і працював учений Мухаммед ібн Муса ал-Хорезмі (тобто Магомет син Муси (Мойсея) з Хорезма). Він жив десь між 780 і 850 роками. Хорезм — оазис у Середній Азії — був у ті часи центром однойменної держави. Хорезмська область тепер входить до складу Узбецької РСР.

Мухаммед ібн Муса — його прийнято називати ал-Хорезмі — був провідним ученим «Будинку мудрості» в Багдаді, автором творів, які мали великий вплив на розвиток математики. Він (уперше арабською мовою) виклав десяткову позиційну систему числення, дуже докладно розробив практику дій над шістдесятковими числами, написав важливі книги з математики і астрономії.

Та нас тут цікавитиме тільки одна праця ал-Хорезмі; її повна назва така: «Ал-китаб ал-мухтасар фі хісаб ал-джабр в-ал-мукабала», що означає: «Коротка книга про числення алгебри і мукабали». Тут уперше з'явилось у математиці слово «алгебра». Ал — це в арабській мові артикль (як німецьке der, die, das, французьке le, la або англійське the). «Ал-джабр» означає відновлення, «в» — і, «ал-мукабала» — порівняння, протиставлення.

«Ал-джабр» полягала в тому, що від'ємні члени рівняння можна було переносити в другу сторону із зміненим знаком; для цього додавали ці члени до обох сторін рівняння. Таким чином у рівнянні залишались тільки додатні члени (математики того часу не знали від'ємних чисел). За допомогою ж «ал-мукабала» подібні члени зводили в один вираз.

Ці дві дії — перенесення членів рівняння в другу частину і зведення подібних членів — і є основа розв'язування рівнянь. Від назви книги ал-Хорезмі науку про розв'язування рівнянь стали називати алгеброю. Книга була присвячена розв'язуванню рівнянь першого й другого степенів.

Від прізвища ал-Хорезмі походить ще один математичний термін — *алгоритм* для позначення деякого обчислювального процесу, який виконується в точно визначеному порядку (наприклад, алгоритм Евкліда для знаходження найбільшого спільного дільника чисел або многочленів).

ал-китаб
ал-мухтасар
фі хісаб
ал-джабр
в-ал —
мукабала

Розв'язування рівнянь було основною лінією розвитку алгебри протягом багатьох століть.

Задачами, що зводяться до розв'язування рівнянь, люди цікавилися з давніх часів. Рівняння складали і розв'язували вже стародавні єгиптяни, вчені стародавнього Вавілону. Зміст задач був дуже різноманітний: це були задачі практичного характеру або суто арифметичні, або навіть жартівливі. У стародавній Греції рівняння першого і другого степенів розв'язували геометрично. Багато задач, що ведуть до таких рівнянь, зустрічаємо і в індійських авторів.

Довга назва «Аль-джабр в-ал-мукабала» згодом скоротилася до першої частини, звідки й виникла назва «алгебра». Під цією назвою, починаючи з XIV ст., було написано багато творів, але загальне визнання вона дістала не відразу. Так, видатний французький математик Франсуа Вієт вважав це слово «варварським» і свій твір алгебраїчного змісту назвав «Вступ до аналітичного мистецтва». Ньютон називав алгебру також «універсальною (тобто загальною) арифметикою» (1707 р.). Тільки у XVIII—XIX ст. назва «алгебра» встановилась остаточно.

Проте шлях від книги ал-Хорезмі до нашої сучасної алгебри був довгий і складний.

Математики Арабського халіфату не знали інших математичних знаків, крім цифр, і всі поняття та дії записували повними словами. Наприклад, ал-Хорезмі рівняння $x^2 + 10x = 39$ записував так: квадрат і його десять коренів становлять тридцять дев'ять дірген; тут «дірген»