У СВІТІ МАТЕМАТИКИ

ЗБІРНИК НАУКОВО-ПОПУЛЯРНИХ СТАТЕЙ

ВИПУСК 16

Видається з 1968 р.

За редакцією
доктора фізико-математичних наук
професора М. Й. Ядренка

КИЇВ
«РАДЯНСЬКА ШКОЛА»
1985

22.1я43
У 11

В мире математики: Сб. науч.-попул. ст. Вып. 16: Изд. с 1968 г./ Под ред. д-ра физ.-мат. наук проф. М. И. Ядренко. — К.: Рад. шк., 1985.— 240 с. — 45 к. 17 000 экз.

Сборник открывается статьей, освещающей роль советских математиков в борьбе за Победу в Великой Отечественной войне. Исторические его разделы содержат материал о многогранной научной и общественной деятельности выдающегося советского математика, академика АН СССР, Героя Социалистического Труда В. М. Глушкова и фрагменты из его последней прижизненной книги об интеллектуальных возможностях вычислительных машин, знакомят с биографией М. В. Остроградского и размышлениями о профессии математика и математическом творчестве академика АН СССР Героя Социалистического Труда Л. С. Понтрягина. Отдельные статьи сборника доступно и достаточно полно излагают основы программирования на микрокалькуляторах, теорию метрических пространств и выпуклых последовательностей, элементы математической логики и некоторые вопросы интегрального исчисления.

Как и в предыдущих выпусках, рассматриваются методы решения задач повышенной трудности, конкурсные и олимпиадные задачи, специальные методы решения отдельных видов задач, предлагаются упражнения для самостоятельной работы.

Сборник предназначается учащимся VII—X классов.

Рукопис рецензували: завідуючий кафедрою математики Запорізького педагогічного інституту, кандидат фізико-математичних наук *Я. П. Понарін* та доцент кафедри геометрії Чернігівського педагогічного інституту, кандидат фізико-математичних наук *М. М. Мурач*.

$У \frac{4802020000-363}{М210(04)-85}$ 369—85

ПЕРЕДМОВА

Математика. Наскільки містким і глибоким стало це поняття! Виникнувши на світанку цивілізації, математика постійно збагачувалася, час від часу істотно оновлювалася, охоплюючи все повніше кількісні відношення і просторові форми дійсного світу. При цьому вона, розширюючи й зміцнюючи свої багатогранні зв'язки з практикою, допомагала людству пізнавати й використовувати закони природи, була могутнім рушієм розвитку науки й техніки.

Легендарний герой громадянської війни Сергій Лазо (1894 — 1920) писав своїй сестрі: ,,Я порадив би кожному в молодості присвячувати три години на день математиці, незалежно від його занять. Нехай він полюбить математику — тоді він звикне до філософії, природничі науки й техніка будуть йому легко даватися. Це на все життя надасть йому стійкості, сили духу".

Сьогодні цей гімн математиці ще актуальніший, ніж тоді, коли був написаний. Справді, математизація — одна з характерних особливостей сучасної науки. Математичний апарат широко застосовується у фізиці, техніці і біології, економіці, психології. Обчислювальні машини та обчислювальна техніка сприяли появі нових галузей наукових досліджень, що мають надзвичайно велике значення як для самої математики, так і для всіх наук, органічно пов'язаних з нею.

Збірник «У світі математики» і надає широкій учнівській аудиторії можливість щодня присвятити кілька годин математиці.

Цей випуск збірника, як і всі попередні, популяризує ідеї та проблеми математики (насамперед у зв'язку з їх численними застосуваннями), висвітлює сторінки історії, знайомить з оригінальними методами розв'язування нестандартних задач.

Пропонується традиційний огляд новинок рекомендованої літератури.

ДО 40-річчя ПЕРЕМОГИ РАДЯНСЬКОГО НАРОДУ У ВЕЛИКІЙ ВІТЧИЗНЯНІЙ ВІЙНІ

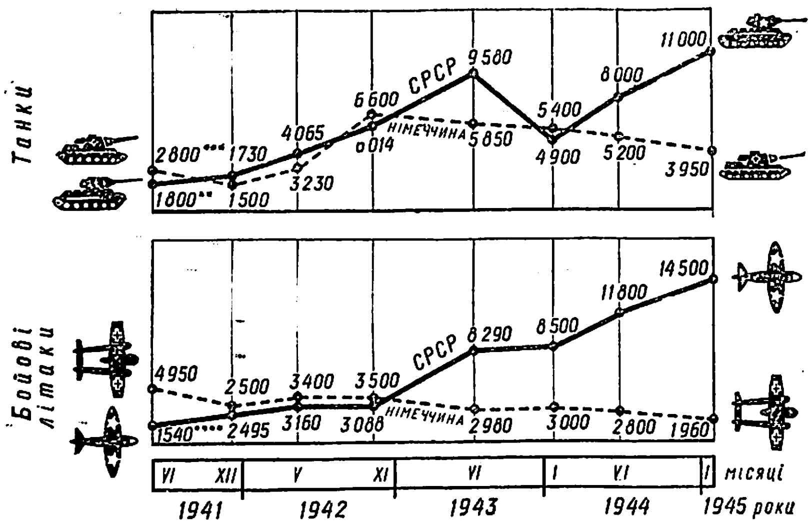
А. Г. КОНФОРОВИЧ

РАДЯНСЬКІ МАТЕМАТИКИ В РОКИ ВЕЛИКОЇ ВІТЧИЗНЯНОЇ ВІЙНИ

22 червня 1941 р. мирне життя радянського народу порушив віроломний напад на нашу країну фашистської Німеччини. У боротьбі з ворогом потрібні були мужність, сила і точний розрахунок дій кожного воїна — від солдата до генерала.

Ось чому з перших днів війни радянські вчені в науково-дослідних інститутах, лабораторіях, конструкторських бюро відкрили невидимий фронт боротьби з фашизмом.

Оцінюючи їх внесок у розвиток військового виробництва, президент АН СРСР С. І. Вавилов (1891—1951) писав: «Майже кожна деталь військового обладнання, спорядження, військові матеріали, медикаменти —все несло



Мал. 1

на собі відбиток попередньої науково-технічної думки й обробки» [1,4]. Здебільшого ці думки були результатами математичної обробки досліджуваних явищ. Математика була потрібна офіцерам і генералам армії та флоту, творцям нової бойової техніки, організаторам її виробництва.

Ще в 1916 р. О. Блок у вірші «Скіфи» писав:

Мы очищаем место бою
Стальных машин, где дышит интеграл!

А в боях Великої Вітчизняної війни роль інтеграла, так образно визначена поетом, стала ще більшою. Радянські математики напружено працювали, наближаючи Перемогу. Алгебра, теорія диференціальних рівнянь, теорія функцій комплексної змінної, теорія ймовірностей, методи наближених обчислень, математична логіка і методи кодування інформації стали «солдатами» невидимого фронту. Про те, як

швидко збільшувалася обороноздатність нашої країни, виразно розповідають діаграми, подані на мал. 1.

Радянські математики, розв'язавши важливі проблеми аеродинаміки, допомогли авіаконструкторам досягти блискучих результатів у вдосконаленні бойових літаків, насамперед збільшити їхню швидкість.

Герой Соціалістичної Праці, лауреат Державних премій СРСР академік С. О. Христіанович (нар. 1908 р.) теоретично обгрунтував основні закономірності зміни аеродинамічних характеристик крила літака в режимі польоту на великих швидкостях. Здобуті результати мали велике значення при розрахунку міцності літаків — вони дали змогу при переході до польоту на великій швидкості точно враховувати вплив стисненого повітря, яке обтікає крило літака, і знайти оптимальний варіант профілю літака з найменшим лобовим опором.

Великим внеском у розвиток швидкісної авіації стали також дослідження академіка М. Є. Кочина (1901—1944), який уперше практично розв'язав задачу теорії «круглого крила», розрахувавши сили, що діють на крило, і потоки, які його обтікають.

Дуже допомогли авіаконструкторам теоретичні дослідження Героя Соціалістичної Праці, лауреата Державних премій СРСР академіка А. О. Дородніцина (нар. 1910 р.) і лауреата Ленінської премії члена-кореспондента АН СРСР М. Г. Четаєва (1902—1959). А. О. Дородніцин розробив теорію крила малого подовження і теорію межового шару в стискуваному газі, а відкритий М. Г. Четаєвим критерій визначення наявності чи відсутності критичних швидкостей став надійним теоретичним інструментом для розрахунку стійкості літака під час руху по землі.

У 1934 р., коли випробовувалися швидкісні бомбардувальники, літакобудівники зіткнулися з невідомими раніше явищами: на певних режимах роботи мотора виникали самозбудні вібрації (флатер), які часто спричинялися до миттєвого руйнування всієї машини. Аварії підстерігали швидкісні літаки і на аеродромах: у результаті іншого небезпечного явища — шимі — при посадці чи зльоті літака колеса починали коливатися з боку в бік. Видатний радянський математик і організатор науки, тричі Герой Соціалістичної Праці, лауреат Ленінської і Державних премій СРСР М. В. Келдиш (1911—1978) і очолюваний ним колектив науковців дослідили причини виникнення й закономірності перебігу названих явищ. Створена вченими математична теорія (модель) цих небезпечних вібрацій дала змогу радянським авіаконструкторам надійно захистити від них конструкції швидкісних літаків. У результаті наша авіація в роки війни не знала випадків руйнування літаків, зумовлених виникненням флатера чи шимі.

Усі ці дослідження в комплексі з досягненнями вчених в інших галузях науки і техніки допомогли О. С. Яковлєву і С. О. Лавочкіну створити грізні винищувачі, С. В. Іллюшину — невразливі штурмовики, А. М. Туполєву, М. М. Полікарпову і В. М. Петлякову — потужні бомбардувальники, помітно збільшити їхню швидкість. Радянські вчені випередили ворога і в створенні реактивної авіації. Перший випробувальний політ радянського реактивного винищувача відбувся в травні 1942 р. (німецький реактивний «мессершмітт» піднявся в повітря лише через місяць). Реальності війни ставили перед математиками нові несподівані завдання. Так, у перший період війни з'ясувалося, що за певних умов надзвичайно ефективними бомбардувальниками можуть бути тихохідні навчальні літаки. Вони завдавали дошкульних втрат ворогові, а самі були неприступними. Але для небесних тихоходів не існувало таблиць бомбардування. А складаючи їх, треба було вміти зводити обчислення кратних до обчислення одновимірних інтегралів.

І от математики терміново побудували чудові наближені формули, які дали можливість з достатньою точністю і без сучасної потужної обчислювальної техніки розв'язати це завдання.

Обчислювальний центр Математичного інституту АН СРСР провів велику дослідницьку і обчислювальну роботу і в 1943 р.

створив нові штурманські таблиці. Вони значно підвищили точність і надійність пілотування бойових машин. Штаб авіації високо оцінив роботу вчених, зазначивши, що в жодній країні світу не було таблиць, рівнозначних їм за простотою й оригінальністю.

Ще в 1382 р. москвичі, даючи відсіч ординцям Тохтамиша, використали зброю майбутнього — «тюфяки». Із стін Кремля зі звуком «тюфф» стріляли камінням і дрібно нарубаним залізом.

Відтоді відчизняні пушкарі і математики багато зробили для вдосконалення і розвитку грізної вогнепальної зброї. Війна поставила перед радянськими вченими нові складні та невідкладні завдання. Математики брали участь у створенні нових зразків артилерії, розробляли ефективні методи використання артилерії на фронті. Так, М. Г. Четаєв, розв'язавши складну математичну задачу, розрахував оптимальні параметри крутизни нарізки артилерійських стволів, завдяки чому було досягнуто більшої сконцентрованості бою й стійкості снарядів у польоті. Герой Соціалістичної Праці, лауреат Ленінської і Державної премій СРСР академік А. М. Колмогоров (нар. 1903 р.), виконуючи завдання Головного артилерійського управління, провів дослідження з теорії ймовірностей, пов'язані з оцінюванням ефективності стрільби. На основі здобутих результатів учений визначив найвигідніше розсіювання снарядів, чим сприяв ще більшому зміцненню артилерії.

У ході Курської битви гітлерівці вперше застосували як протитанкову зброю спеціальні кумулятивні (від лат. cumulatus — збільшений, посилений) снаряди. Натикаючись на перешкоду, такі снаряди викидали вперед металеву «дротину» товщиною 2—3 мм і довжиною до 200 мм, яка пробивала броню до 200 мм. Хоча явище кумуляції було відоме з часів першої світової війни, механізми ж її утворення були невідомі. Розв'язав цю надзвичайно складну і важливу для радянських воїнів задачу академік М. О. Лаврентьєв (1900—1980). Експерименти проводилися на околиці щойно звільненого Києва, коли ще на кожному кроці можна було побачити міни і залишені ворогом снаряди. З побудованої вченим математичної моделі кумуляції випливало, що в час зіткнення кумулятивного снаряда з бронею металеве облицювання і сама броня поводять себе, як ідеальна нестискувана рідина. Ідея очевидно була «божевільна» (броня — рідина!), хоча її підтверджували експерименти. Перший виступ ученого в Академії артилерійських наук зустріли сміхом. Але факти, (вельми вперта річ!) доводили, що «божевільна» модель правильно моделює явище кумуляції. На її основі було розроблено нові типи кумулятивних снарядів і засоби боротьби проти ворожої протитанкової зброї.

Важливу роль у розгромі ворога відіграла реактивна артилерія, яка почала свій бойовий шлях 14 липня 1941 р. вогневим ударом по скупченню ворожих сил на залізничному вузлі Орша. У створення легендарних «Катюш» великий внесок зробили член-кореспондент АН СРСР М. М. Беляєв (1890—1944) та його співробітники, які визначили причини розсіювання снарядів. Академік С. О. Християнович вніс у конструкцію снаряда «Катюші» зміни, які забезпечили точніший політ його по трасі.

Виключно складні математичні задачі поставали в зв'язку з необхідністю випускати величезну кількість однорідних виробів. Потрібно було терміново розробляти математичні методи для контролю їх якості. А перевірка якості навіть одного виробу могла забирати більше часу, ніж його виготовлення. До того ж якість окремих виробів (патронів, мін, снарядів) можна перевірити, лише зруйнувавши їх. Здавалося б, труднощі тут непереборні. Але математики вже мали приклади розв'язання таких задач. Над ними успішно працював ще М. В. Остроградський. Розроблені ним, а також радянськими математиками В. І. Романовським (1879—1954) і А. М. Колмогоровим ідеї й було покладено в основу важливої галузі прикладної теорії ймовірностей — теорії статистичних методів контролю. Вони й дали змогу на основі перевірки кількох виробів зробити досить точні висновки про якість великих партій. Тим самим удавалося економити сировину, час роботи виробничих

ліній, робочу силу, електроенергію. А головне — армія діставала в потрібній кількості надійну зброю і спорядження. Наведені таблиці красномовно говорять про трудовий подвиг радянських учених, робітників і колгоспників, спільна праця яких озброювала і споряджала радянських воїнів.

Наукова робота вчених не припинялась і в найтяжчих умовах. У виснажливі дні блокади вчені Ленінграда створили Великий астрономічний щорічник на 1943, 1944 і 1945 рр., який став надзвичайно цінним довідником для авіації і флоту. Командування Радянської Армії високо оцінило працю вчених. У листі командуючого Військово-Повітряними Силами зазначалося: «За цінний внесок, зроблений Ленінградським астрономічним інститутом у справу оборони країни, оголошую всьому складу інституту подяку» [4, 42—43].

Неможливо навіть перелічити всі ті завдання, які довелося розв'язувати надтерміново і надзвичайно точно радянським математикам. На кінчику пера математиків народжувалися формули, за допомогою яких розраховували міцність «Дороги життя», прокладеної по льоду Ладоги в блокадний Ленінград, таблиці подекадної потужності снігового покриву на 1941 — 1942 рік, народжувалися рекомендації, як мають діяти каравани кораблів, щоб уникнути нападу ворожих літаків, підводних човнів і кораблів; як потрібно кодувати секретну інформацію, щоб її зрозумів тільки той, кому вона призначена, як... І все це — математика. Справжній фронт невидимих, але надійних і безвідмовних воїнів.

Країні для фронтів, які охопили її від Північного Льодовитого океану до південних морів, потрібні були солдати. Тому багато математиків, імена яких вже були відомі в науці, і ті, хто тільки починав свій шлях наукового пошуку, хто був ще студентом, зі зброєю в руках воювали в лавах Радянської Армії, загонах народного ополчення, партизанських загонах. Одні з них повернулися до мирної праці, у жорстоких боях здобувши перемогу, а багато інших віддали своє життя за Батьківщину, лишивши нездійсненними блискучі задуми, незавершеними доведення теорем, недописаними книжки.

На Дошці слави співробітників Київського університету серед імен загиблих на фронтах Великої Вітчизняної війни викарбувано ім'я Олександра Володимировича Товбіна (1915—1943). Стрімкими були його кроки в науку: в 22 роки він закінчив Київський університет, у 24 — захистив кандидатську дисертацію, в 25 — став докторантом Інституту математики АН УРСР.

Свою велику любов до математики і відданість науці молодий учений невтомно передавав студентам на лекціях, спецсемінарах, гуртках, в особистих бесідах з усіма, хто цікавився математикою. Товбін працював у галузі сучасної алгебри та функціонального аналізу. У своїй докторській дисертації він досліджував питання, суміжні із цими двома математичними дисциплінами. Не замикаючись у рамках математики, Товбін любив і добре знав поезію, був великим шанувальником музики.

Молодий учений ненавидів фашизм, який коричневою чумою розлазився по Західній Європі. «У випадку війни, — говорив він товаришам, — я буду на фронті». І коли почалася війна, Товбін пішов бійцем загону університетських ополченців, а потім добровольцем на фронт. Після поранення й лікування його призначають писарем і лектором штабу, та він знову проситься на передову і стає замполітом артилерійської частини, потім політруком транспортної роти. На Керченському півострові і на Кубані він двічі побував в оточенні і щоразу пробивався до своїх. Весною 1943 р. у складі діючої армії Товбін вступив на визволену українську землю.

У найтяжчих умовах фронту вчений не залишав заняття математикою. У лютому 1942 р. він розшукував адреси академіків М. М. Боголюбова і М. О. Лаврентьєва, можливо, щоб передати їм результати своїх досліджень. Він писав з фронту: «Мені прийшла дивна думка — оформити і послати на рецензію всі замітки, підготовлені, але не надруковані, бо ніколи наперед не можна знати, що буде зі мною через тиждень, а тим більше через місяць чи півроку». На жаль, ці замітки безповоротно втрачені.

Наведемо кілька уривків з фронтових листів Товбіна. Глибоке почуття обов'язку перед Батьківщиною виразно вчувається в таких рядках:

«Мучить тільки бажання займатися продуктивною працею: вчитись і вчити, але розумієш, що це бажання ти маєш право здійснити тільки після закінчення війни. Ось чому я чекаю розгрому ворога, можливо, ще з більшим нетерпінням, ніж ви всі» (березень, 1942 р.).

«Я став типовим бувалим солдатом. Ось уже вдруге я святкую 1 Травня в армії. Я уже звик до навколишнього середовища й обстановки. Поки йде війна, обов'язок приковує мене до армії. Але тим радіснішим буде перехід до книжки, дошки і крейди після закінчення війни... Швидше б розбити ворога, повернутися в Київ, в університет. І ми це зробимо» (травень, 1943 р.).

Товбін не дожив до Дня Перемоги. У серпні 1943 р. він загинув на полі бою.

Восени 1941 р. помер від ран і нелюдських умов ворожого полону М. Б. Веденісов (1905—1941). Свій шлях у математику талановитий учений починав у галузі теорії множин і теорії функцій дійсної змінної. Потім його інтереси перейшли на теоретико-множинну топологію, де він здобув важливі результати. Війна застала вченого викладачем однієї з військових академій. Незважаючи на слабке здоров'я і бронь, він прийняв тверде рішення піти в ополчення. У тяжких боях під Єльнею поранений учений потрапив у полон, де його сили швидко вичерпалися.

М. В. Бебутов (1913—1942) почав свою наукову роботу ще в студентські роки в семінарах академіка П. С. Александрова (1896—1982) і М. Б. Веденісова. Його наукові інтереси пов'язані з якісною теорією диференціальних рівнянь. Менш як чотири роки тривала наукова робота молодого вченого. Перша його праця опублікована в 1938 р., а остання (посмертно) — у 1942 р. За своє коротке життя в науці М. В. Бебутов здобув чимало важливих результатів. Кандидатську дисертацію, яку він захистив у 1941 р., Учена рада відмітила, як визначну роботу.

Для тисяч юних математиків справжньою школою математичного мислення стали книжки Д. О. Шклярського, М. М. Ченцова і І. М. Яглома: Вибрані задачі і теореми елементарної математики. Арифметика і алгебра, 5-те вид. М., Наука, 1977. 384 с.; Вибрані задачі і теореми планіметрії. 2-е вид. М., Наука, 1967. 336 с.; Вибрані задачі і теореми елементарної математики. Геометрія (Стереометрія). М., ГИТТЛ, 1954. Ч. 3. 267 с.; Геометричні нерівності і задачі на максимум і мінімум, 5-те вид. М., Наука, 1970. 335 с. Ця справжня енциклопедія олімпіадних задач і задач підвищеної складності виходила протягом тривалого часу 1950—1977 рр. і все-таки велика читацька аудиторія навряд чи знає, що один із співавторів, прізвище якого стоїть першим, ніколи не бачив цих праць. Формально він не брав участі і в їх написанні. Адже ще 26 червня 1942 р. боєць партизанського загону Давид Оскарович Шклярський загинув у бою, який вели партизани в глибокому тилу ворога на території Білоруської РСР.

У середніх класах школи Шклярський захоплювався літературою: багато читав, відвідував Будинок літераторів, сам пробував писати вірші. Потім прочитав історію славнозвісної великої теореми Ферма. Спроби приборкати непіддатливу теорему відкрили юнаку незнаний раніше світ математики, яка стала справжнім його покликанням. У 1936 р. він здобув першу премію на Другій Московській математичній олімпіаді і в цьому самому році — він студент механіко-математичного факультету Московського університету. З першого курсу Давид Оскарович бере активну участь у роботі наукових гуртків і семінарів, доповідає про здобуті результати. Наукова діяльність студента була такою успішною, що в 1941 р. Московське математичне товариство нагородило його своєю премією. Це був перший випадок, коли таку премію одержував не видатний учений, а студент.

Виняткова роль Шклярського в історії шкільного математичного гуртка при МДУ. Із секції, якою він керував, вийшло багато відомих математиків. Улітку 1941 р. він з відзнакою закінчив МДУ і був направлений у прославлений Центральний аерогідродинамічний інститут (ЦАГІ). Він мав бронь, але подав заяву в міськком комсомолу з проханням направити його добровольцем на фронт. Йому відмовляли, але він наполіг на своєму і до кінця виконав свій обов'язок солдата.

У 1946 р. у провідному радянському математичному журналі «Успехи математических наук» (т. I, вип. 3—4) було опубліковано близько 70 задач з рукописної спадщини Шклярського. Пізніше, коли за матеріалами роботи шкільного математичного гуртка при МДУ, насамперед за матеріалами роботи секції Шклярського, було написано більшу частину перших книжок серії «Бібліотека математичного гуртка», автори їх, віддаючи шану пам'яті молодого вченого і палкого популяризатора математики, першим на цих книжках поставили його ім'я.

У дні Сталінградської битви віддав своє життя за Батьківщину талановитий математик Ростислав Миколайович Бончковський (1905—1942). Учений приділяв багато уваги викладанню математики в школі і, особливо, популяризації математики серед молоді. Його перу належить цікава книжка «Площі і об'єми» (М.; 1937) і перший у нашій країні збірник задач математичних олімпіад «Московські математичні олімпіади 1935 і 1936 рр.» (М.; Л., ОНТИ, 1936. 80 с.). Багато сил віддавав учений редагуванню шкільних підручників, науково-популярних книжок з математики. Зокрема, за його і професора І. І. Чистякова редакцією протягом 1934—1938 рр. вийшли 13 збірників статей з елементарної і початків вищої математики під назвою «Математическое просвещение». Перший випуск повоєнної серії цього збірника (1957 р.) відкривається біографією математика, вдумливого педагога і невтомного популяризатора математики Р. М. Бончковського.

Останній раз перевіривши домашнє завдання, попрощався на перерві зі своїми учнями вчитель математики з далекого сибірського села на березі Ангари Микола Володимирович Бібіков. Він йшов на свій головний відкритий урок. До війни Бібіков захоплювався живописом і навіть на фронті в короткі години перепочинку між боями не припиняв улюбленого заняття. Опубліковані через багато років після війни листи гвардії старшого лейтенанта М. В. Бібікова стали хвилюючим документом епохи. (Ми наводимо їх після цієї статті).

Микола Володимирович воював під Москвою, вибивав ворога з Ржева, звільняв українські міста і села. Загинув він під селом Голоски Кам'янець-Подільської області, залишившись назавжди в цьому далекому від Ангари, але навічно рідному йому куточку української землі.

Майже неможливо коротко переповісти «Листи з війни» [7], написані «на краю життя» стрілком зенітного кулемета Адольфом Павленком. Він ріс на Україні в сім'ї вчителів, які в 20-ті роки мріяли про світову революцію і тому назвали сина німецьким ім'ям. У родині зверталися до нього по-українському — Доля. Війна застала його студентом фізичного факультету Київського університету. А про все, що було потім, Павленко розповів у листах з війни. Через відсутність паперу писав їх на обгортках концентрату гречаної каші, солдатської махорки, на уривках бойового листка. Це вражаючий людський документ літописця свого часу, не командира, а простого солдата-кулеметника. Тяжкими були солдатські будні: «Справжнє пекло. І серед цього пекла живуть люди! Ось що означає коротке офіційне зведення —«на фронті нічого істотного не відбулося»... [7, 44]. Але і в неймовірно тяжких умовах солдатських буднів Павленко зберіг зв'язок з життям, від якого був відірваний війною, у нього не вгасав інтерес до розв'язання складних задач, пов'язаних з його солдатською роботою. 11 жовтня 1942 р. він писав евакуйованому в Уфу батькові: «Розв'язував сьогодні задачу на політ снарядів у повітрі і прийшов до рівняння. Чи можна його розв'язати? У листі зробив запит до своїх університетських викладачів. Треба збивати літаки» [7, 37—38]. А 28 січня 1943 р. просить надіслати йому таблиці тригонометричних функцій, потрібні, щоб сконструювати прилад для визначення відстані до літака.

В окопних тривогах його не залишала й фея поезії: музи не мовчали, коли гриміли гармати: «Незважаючи на розвиток фронтових подій, не викидаю з допоміжної кишені протигазової сумки книжок. Пушкін для мене зараз — настільна книга. (Цікаво звучить стосовно до траншей: настільна). Вивчив напам'ять кілька поезій — немов у початковій школі» [7, 43]. 14 жовтня 1943 р. ворожий осколок обірвав життя Павленка, який непохитно вірив у нашу Перемогу.

До розтривоженої Полтави ще тільки долітали громи далекого фронту, а секретар обкому партії Степан Федорович Кіндратенко говорив Олені (Лялі) Убийвовк про зв'язківців, явки, конспірацію. Кілька разів попереджав, що ворог досвідчений, підступний, жорстокий. Ляля ще не знала, що наставляв її вже не просто секретар обкому, а секретар підпільного Полтавського обкому партії.

Життя майже не давало часу, щоб звикнути до страхітливої логіки подій, які невідворотно розгортались і в які потрібно було ввійти студентці IV курсу фізико-математичного факультету Харківського університету Олені Костянтинівні Убийвовк.

Жорстокість окупантів перевершила попереджування Степана Федоровича, але не залякала учасників підпільної комсомольсько-молодіжної організації «Нескорена полтавчанка», тільки загартувала в правоті безпощадної боротьби проти ворога. У листівках вони розповідали про успіхи Червоної Армії, через партизанів передавали на Велику землю цінні розвідувальні дані, вчинили кілька диверсій, готували нові.

Увечері вже мали залишити місто і вийти в ліси, щоб з'єднатися з партизанами, а вранці в будинок Убийвовків вдерлися гестапівці. Коли у слідчого побачила те, що залишилося після тортур від зв'язкової, яка мала перейти лінію фронту, зрозуміла все. Зрада. Під жахливими тортурами і все-таки зрада. Настали жорстокі дні і ночі двобою з ворогом. Єдиною зброєю підпільників була відданість Батьківщині і сила духу. Їх мало вистачити, щоб протистояти інквізиторам з фашистських катівень. Вони готували себе, щоб достойно прийняти і такий бій. Коли ж все було виважено і перевірено, як обчислення найскладнішого інтеграла, Ляля написала на волю: «Татку рідний, ти мужчина і мусиш перенести все, що буде, як мужчина. У мене один на сто шансів вийти звідси.

Я пишу не згарячу, а добре все обдумавши. Духом не падаю, надії не втрачаю до останньої хвилини. Проте, якщо я загину, пам'ятай, ось мій заповіт: мама, напевно, не переживе моєї смерті, але ти мусиш жити й боротись.

Звідси, із самого нутра фашизму, я особливо ясно бачу, яке це підле, витончене варварство. І я щаслива тим, що й свою частку, яку змогла, чесно доклала для того, щоб визволити людей від цього варварства. Ми зробили небагато, але ми щиро прагнули зробити далеко більше для визволення наших людей, нашої Батьківщини. Ми були їй вірними в житті і вірними вмремо» [2, 213].

Вони залишилися такими, пройшовши всі пекельні тортури, до тієї миті, коли 6 травня 1942 р. фашистські кулі обірвали биття їхніх нескорених сердець.

Указом Президії Верховної Ради СРСР від 8 травня 1965 р. за мужність і героїзм, виявлені в боротьбі проти німецько-фашистських загарбників у період Великої Вітчизняної війни, присвоєно звання Героя Радянського Союзу (посмертно) Убийвовк Олені Костянтинівні — керівникові підпільної комсомольсько-молодіжної організації міста Полтави.

Навіть через багато років випадкові обставини можуть висвітлити невідомі сторони багатогранного духовного життя радянських воїнів. 17. 09. 1983 р. газета «Комсомольская правда» опублікувала в зв'язку з 1200-річчям великого середньоазіатського вченого аль-Хорезмі уривки з творів десятикласників 2-ї Московської фізико-математичної спецшколи, присвячені алгебрі. На публікацію газети відгукнулася Марія Реут, парторг воєнних років 46-го гвардійського Таманського авіаполку нічних бомбардувальників. Вона надіслала лист своєї однополчанки штурмана літака Надії Комогорцевої, яка трагічно загинула в ніч на 9 березня 1942 р. Ось що писала вона в ті далекі роки своїй сестрі:

«Куйбишев.

... Мені дуже хочеться, щоб ти пішла на мехмат.

Дуже добре, я думаю, для тебе буде, якщо ти підеш в університет. І ось чому.

З усякого іншого інституту теж інженерів випускають..., але там вони дістають освіту лише за своєю — вузькою або широкою, але все-таки лише за своєю спеціальністю...

Не знаю, чи бувало в тебе колись таке відчуття, як бажання розв'язувати задачі. Узяти хоча б школу. Майже всі задачі з наших задачників у мене були розв'язані. Я просто розв'язувала не заради того, щоб розв'язати їх, а лише заради того, щоб розв'язувати. Те, що математика наука абстрактна, це правильно. Вона, можливо, по-своєму суха. Але те, що вона цікава, це безперечно.

Якщо нею займатися лише заради інших предметів, то це нудно й сухо, а якщо нею жити...

Узяти хоча б будь-яку теорему — в усіх підручниках вона подана по-різному. Це свідчить про те, що існує дуже багато способів її доведення. Розв'язувати задачі, приклади, складні диференціальні рівняння — що це означає? Це означає, що ти з кожним прикладом все краще і краще починаєш міркувати.

Тепер коротко мій висновок: якщо ти в процесі навчання хочеш чогось справжнього, пов'язаного з життям, людського і якщо тебе не приваблює математика сама як наука, йди на геофак, біо, геологогрунтів, хім, фіз, аж до літератури.

Якщо ж хочеш у процесі навчання не тільки пізнавати, а й мислити, йди на математику....

Н. Комогорцева».

(Гимн алгебре. — Комс. правда, 1983, 20 окт., с. 4).

Добровольцем пішов на фронт і воював проти фашистських загарбників член-кореспондент АН СРСР — один з основоположників радянської кібернетики Олексій Андрійович Ляпунов (1911—1973). Він брав участь в боях у Криму, на Україні, в Прибалтиці і Східній Пруссії.

«Живий, здоровий, воюю», — сповіщав дружину з фронту командир взводу оптичної розвідки лейтенант Юрій Олексійович Митропольський (нар. 1917). Війна перервала його навчання на механіко-математичному факультеті Київського університету і роботу вчителем математики в школі. Але взимку 1942 р. він отримує відпустку і закінчує Казахський державний університет, після чого знову повертається на фронт. За бойові заслуги Ю. О. Митропольського нагороджено двома орденами Червоної Зірки і медалями. У повоєнні роки вчений збагатив математику і механіку відкриттями, які принесли йому світове визнання. З 1958 р. академік АН УРСР, лауреат Ленінської премії Ю. О. Митропольський очолює Інститут математики АН УРСР.

Сину робітника ХТЗ Олексію Васильовичу Погорєлову (нар. 1919) війна перервала навчання на V курсі фізико-математичного факультету Харківського університету. Учорашній п'ятикурсник надів форму слухача Військово-повітряної інженерної Академії імені М. Є. Жуковського. Двічі, в 1943 і 1944 роках, він з групою слухачів Академії брав участь у військових операціях і пройшов на практиці сувору військову науку.

Не полічити, скільки разів доводилося інженеру-механіку Погорєлову тиснути руку своїм побратимам, говорячи: «Порядок! Ні пуху ні пера!». Льотчикам дуже потрібно було почути перед бойовим вильотом ці нехитрі слова. Володарі грізних «Ілів» знали, що Погорєлов не кидає слів на вітер, машини добре підготовлені до польоту. І вони громили ворога під Вітебськом і на всьому переможному шляху військ 3-го Українського фронту.

Виряджаючи бойові машини в тривимірний евклідів простір, інженер Погорєлов ще не знав, що відкриття глибинних закономірностей математичних моделей цього простору принесуть йому світову славу, поставлять у ряду найвидатніших математиків XX ст. Своїми відкриттями вчений вдихнув у давню геометрію струмінь молодості.

Навколишній фізичний простір має невичерпний запас форм фізичних об'єктів у цьому просторі. Так само невичерпне й розмаїття просторових властивостей. У наш час постали

надзвичайно складні проблеми на стику геометрії, інших математичних дисциплін і природничих наук. Дослідження О. В. Погорєлова збагатили науку відкриттями, що мають важливе теоретичне і прикладне значення в багатьох галузях промисловості, допомагають зміцнювати могутність нашої соціалістичної Батьківщини.

О. В. Погорєлов — автор підручника, за яким сьогодні вивчають геометрію учні середніх шкіл нашої країни. Його перу належать також оригінальні підручники з різних курсів геометрії для студентів педінститутів та університетів.

Радянський уряд і наукова громадськість високо оцінили наукові звершення голови Північно-Східного наукового центру АН УРСР, члена-кореспондента АПН СРСР, академіка АН СРСР О. В. Погорєлова, удостоївши його Ленінської і Державної премій СРСР, а також Міжнародної премії імені М. І. Лобачевського.

Математикою сільський хлопець з Полтавщини Іван Іванович Ляшко зацікавився ще на шкільній лаві. Улюбленим його заняттям було розв'язувати складні математичні і фізичні задачі. На математичних і фізичних олімпіадах учнів шкіл Полтавської області він не раз виходив переможцем. У 1940 р. був мобілізований на флот і вісім років віддав Іван Іванович морській службі, чотири з яких стали суворим випробуванням у тяжких умовах Великої Вітчизняної війни. І голов-старшина зенітної батареї лінкора «Севастополь» витримав їх з честю. Тільки демобілізувавшись у 1948 р., він вступив до Київського учительського інституту. Але спрага до знань, енергія, що акумулювалася вісім років, ніби спресувала час, і майбутній академік закінчив курс навчання за один рік. Роботу вчителя математики в селі Ставище Київської області поєднував з керівництвом партійною організацією місцевого колгоспу і навчанням на заочному відділенні фізико-математичного факультету Київського педінституту, який теж достроково закінчив у 1952 р. Щаслива зустріч з тодішнім директором Інституту математики

АН УРСР академіком О. Ю. Ішлінським визначила шлях І. І. Ляшка в науку. Аспірантуру він теж закінчив достроково і з 1955 р. почав працювати в Київському державному університеті, де пройшов шлях від асистента до проректора по науковій роботі. Основні роботи вченого присвячені важливим для практики проблемам механіки суцільних середовищ і обчислювальній механіці. Академік АН УРСР І. І. Ляшко поєднує інтенсивну наукову роботу з великою партійною і громадською діяльністю як кандидат у члени ЦК Компартії України, депутат Верховної Ради УРСР, голова Правління Республіканського і член Правління Всесоюзного товариства «Знання».

Юліус Фучик в застінках фашистських катівень писав: «Про одне прошу тих, хто переживе цей час: не забудьте! Не забудьте ні добрих, ні злих. Настирливо збирайте відомості про тих, хто загинув за себе й за вас.

Прийде день, коли сьогодні мине, стане минулим, коли говоритимуть про великий час і безіменних героїв, які творили історію. Я хотів би, щоб усі знали, що не було безіменних героїв, а були люди, які мали своє ім'я, свої риси, свої сподівання й надії, і тому муки самого непримітного з них були не меншими, ніж муки того, чиє ім'я ввійде в історію. Нехай ці люди будуть завжди близькі вам, як друзі, як рідні, як ви самі!

Полягли цілі покоління героїв. Полюбіть хоча б одного з них, як сини і дочки, пишайтеся ним, як видатною особою, яка жила майбутнім. Кожний, хто був вірний майбутньому і вмер за те, щоб воно було прекрасним, подібний до статуї, вирізьбленої з каменю» [8, 521].

Час віддаляє в минуле події Великої Вітчизняної війни. Та чим далі відходять вони, тим виразніше постає перед усім світом велич історичного подвигу радянського народу. Наша перемога яскраво і переконливо продемонструвала всьому світу нездоланну життєву силу радянського суспільства і державного ладу, незламну міць ленінської дружби і братерства народів нашої країни, їхню монолітну єдність і згуртованість навколо Комуністичної партії, безприкладний масовий героїзм, полум'яний патріотизм і самовідданість народу Країни Рад.

Список використаної та рекомендованої літератури

1. Вестник Академии наук СССР, 1947, № 11.
2. Гончар О. Т. Нескорена полтавчанка /Земля гуде/. К., Молодь, 1965. 231 с.
3. История отечественной математики. В 4-х т., т. 3, К., Наук. думка, 1968. 726 с.
4. Левшин Б. В. Академия наук СССР в годы Великой Отечественной войны. М., Наука, 1966. 188 с.
5. Левшин Б. В. Советская наука в годы Великой Отечественной войны. М., Наука, 1983, 382 с.
6. Памяти математиков, погибших в Великой Отечественной войне Советского Союза. Успехи математических наук, 1970, вып. 3 (153), т. XXV.
7. Пєсков В. М. Листи з війни. — Люди, яких пам'ятаю. К., Веселка, 1978, с. 32—49.
8. Фучик Юл. Избранное. М., ТИХЛ, 1955. 348 с.

«ДУЖЕ ХОЧЕТЬСЯ ЖИТИ...»*

З фронтових листів учителя математики, гвардії старшого лейтенанта М. В. Бібікова

«Про те, як пройшов у нас, на фронті, Новий рік, які тости ми проголошували, краще за все розповідає стаття Бориса Горбатова, прочитана мною в «Правде» 1 січня 1942 року. Раджу, Люмо (Людмила — дружина Бібікова. — *Ред.*), тобі прочитати її. Вона справді належить перу талановитої людини, яка зуміла так правдиво змалювати настрій кожної чесної російської людини, яка перебуває на фронті. Не можу втриматися, щоб не навести тобі уривки з неї... «Немає братерства більш кровного, ніж братерство у бою. Разом воюємо, разом смерті в очі дивимося. Як же не святкувати разом!» А далі, це просто чудо, мої щоденні думки: «За наші сім'ї, товаришу!

* Переклад листів, опублікованих у газеті «Известия» від 15 червня 1968 р.

Нехай мирно живуть, не тужать, нехай пишуть нам частіше листи». А тепер я продовжую сам — нехай мій Вовик танцює під ялинкою, нехай веселиться мій маленький, мій любий, відверто, вільно, по-дитячому...» *(5 січня 1942 року.)*

«Цілий місяць підряд, з невеликими перервами, йшов дощ, і ніде було обсушитися ні вдень, ні вночі. Утішати себе доводилося лише тим, що взимку було важче, а пережили... Дуже прикро, що постраждали від дощу обидва моїх альбоми з малюнками.

Як завжди, дістаю звістки від учнів. Хочеться навести кілька рядків з листа однієї восьмикласниці, що навчалася в мене: «Якби ви знали, як ми за вами скучили. Я часто згадую ваші жарти, розповіді і вашу веселість. Коли я стала старшою, мені стало ясно, якою я була невитриманою, грубою. Мені дуже прикро, соромно, коли згадаю, як ви на мене сердилися...». Листи учнів діють на мене прекрасно. Треба сказати, що всі вони — ласкаві, підбадьорливі, як ті рідні снаряди наших батарей, що летять зі співом через наші голови і обрушуються із зловісним гуркотанням на ворожі позиції. Здається, що кожний з них говорить: хто з мечем до нас прийде, від меча й загине, на тому стоїть і стоятиме земля руська.

... Про себе можу сказати — я палко люблю Батьківщину. Це — ключ, без нього не можна захищати сплюжену честь російської землі. Зараз найкращим виявом моєї любові до ближніх — до тата, до тебе (старшої сестри Катерини. — *Ред.*), Люми — буде любов до Батьківщини, що кличе зневажати смерть». *(6 серпня 1942 року.)*

«Колись буду згадувати сьогоднішню ніч. Як тремтіли, неначе від холоду, зірки, як крутився уві сні сусід. А над окопами, бойовими позиціями стояла тиша. Грізна, порохова тиша. Тиша перед боєм. А я лежав в окопі і, прикриваючи ліхтарик полою мокрої шинелі, писав тобі листа і думав. І так само, як я, мільйони бійців від Північного Льодовитого океану до Чорного моря лежали в цю ніч на мокрій землі, чекали світанку і бою, думаючи про життя і смерть, про свою долю.

Дуже хочеться жити! Жити, дихати, ходити по землі, бачити небо над головою. Хочеться побачити перемогу, притиснути до шорсткої шинелі шовковисту голівку сина. Я дуже люблю життя і тому йду в бій. У бій за життя, за справжнє, а не рабське життя. За щастя моїх близьких, моїх дітей, за щастя моєї Батьківщини.

Я люблю життя, але щадити його не буду. Жити як воїн і вмерти як воїн — так я розумію життя.

Світанок. Загуркотіли гаубиці. Сходить сонце, сонце бою. Під його променями я урочисто присягаю: я не здригнуся в бою. Немає в моєму серці ні страху, ні милосердя до ворога, тільки люта ненависть спалює серце». *(21 серпня 1942 року.)*

«Скориставшись вільним часом, узявся за перо. Можливо, мені не доведеться дописати листа за один прийом. Час дорогий! Навколо мене на сіні — у квадратному бліндажі під низькою стелею з колод у два накати, лежать мої бойові товариші. Чути їхнє рівне дихання, схилилися, як і я, над листами...

Прочитав твого листа з невимовним задоволенням. Ви навіть не знаєте, як читаються ваші листи. Тут поглинають кожну букву, не те що слово. З кожною краплиною вливаються нові могутні сили життя. Коли відігрівається серце, то й шинель — мокра й холодна — стає теплою. Коли оновлюються почуття, то й спека переноситься легше, а втома змивається, як зливою. Якщо нема довго листа або він — неласкавий, з прохолодою, то за пазуху шинелі заповзає образа.

Ви скажете: війна і сердечна меланхолія! Ні, дорогі мої, це не сентименти і не слабість — це життя. Міцний у боротьбі наш радянський воїн. Але це не означає, що він камінь. Він — жива людина. Він радіє проліску, який розквітнув поряд з окопом, він плаче, опускаючи в братську могилу тіло любимого бойового друга, і не соромиться своїх сліз. Він тріпоче від радощів, роздивляючись дитячі карлючки маленького сина чи племінничків, які намалювали кольоровою крейдою зелених собачок і фіолетових курей. Він притискує до губів пожовклу фотокартку або батистову хусточку, яку проніс через полум'я, дим і кров війни. Він — жива людина, і це прекрасно!

Вибухають міни, неначе хлопавки, зі свистом і різким тріском. Десь зовсім близько впала одна з них. На дереві заворушилося листя, навколо бліндажа застукотіли осколки.

... Моє припущення справдилося: беруся за листа наступного дня. Учора проходили через село, у якому жили наші російські люди. Тепер від села залишилася одна назва. Замість будинків — чорні стовпи. Навіть дерева згоріли або вирвані з корінням. Серце стискається! І тоді я зрозумів, що таке Батьківщина: це коли кожна хата під сірим очеретом здається тобі рідною хатою і кожна стара жінка в селі — рідною матір'ю. Батьківщина — це коли кожний крок німецького кованого чобота по нашій землі — кривавий слід у твоєму серці». *(27 серпня 1942 року.)*

«Швидко біжить час, вже останні дні місяця. Усім своїм товаришам по зброї мені хочеться сказати: чи йдете ви в атаку, чи лежите в обороні — пам'ятайте! — першого вересня наші діти пішли до школи. Вони сидять зараз за партою і розв'язують свої проблеми. Вони говорять з гордістю: «Мій тато — на війні! Він захищає Батьківщину!» Вони вірять, що їхній тато найсміливіший, найхоробріший воїн. Вони вірять — він розіб'є ворога. І коли ми повернемося додому, кожного запитає син або дочка: як ти бився, тату? Тому потрібно битися так, щоб потім можна було дивитися без сорому в ясні й чисті очі свого сина... ». *(Вересень 1942 року.)*

«Сьогодні побачив п'ять знімків, опублікованих у газеті «Правда». Їх знайшли в сумці мертвого німця—убивці Зої Космодем'янської. Я був у цьому селі більш як рік тому, був на місці, де стояла шибениця... Сльози навертаються на очі. Зараз три години ночі. Довго ще просиджу над газетою... Нехай буде пухом тобі, горда снігова наречена, сира земля, за яку ти віддала життя. Кличним сполохом звучать слова — ми помстимося за тебе, Зою!» *(14 грудня 1942 року.)*

«Пишу тобі, а перед очима — ясне небо, при високому і повному місяці ледве поблискують зорі. Тільки Марс —

зірка, названа богом війни, яскраво горить своїм червонуватим світлом у цю воєнну ніч. Десь пролітають наші горді соколи, і злива вибухів обрушується на підлі голови ворогів.

Як і раніше, у вільні хвилини віддаюся своєму улюбленому заняттю. Ми, люди, що малюють, зазнаємо при цьому блаженства, яке іншим невідоме. Щоб творити навіть настільки примітивними засобами, як звичайний олівець і поганий папір, потрібно вкласти душу, вилити настрій, виразити характер і свої особливості, відтворити в малюнку своє я.

Мене часто запитують товариші: «Чим це ви працюєте? Звичайним олівцем?» Так, звичайним олівцем, звичайними руками, але, зізнаюся, з незвичайною душею в цей час.

Красуне природо, скільки в тобі привабливості, як ти пишаєшся ні з чим не зрівнянною вродою! Ні гуркіт артилерійської канонади, ні вибухи бомб, ніякі жахи не підкорять тебе! Немає такого часу, коли не можна було б милуватися тобою! ... До останніх днів буду, як спраглий вологу, вбирати чари природи. Жаль лише, що я ще не той, хто міг би стати до ряду творців...» *(29 січня 1943 року.)*

«Був час, коли ти називав мене «нещастям свого життя». Вважав мене «ганьбою на свою голову». Та було в мені все ж таки щось добре, заховане через мій характер досить глибоко, непоказне. Я не вмів цього показати, не вмію й досі. І я боявся розміняти це, можливо дуже мале, хороше в собі на дрібниці.

Дорогий батьку! Пробач мені за відвертість. Я не хотів тебе засмучувати. Я люблю тебе і не хочу завдавати тобі прикрощів. Твоє добро святе для мене, я його бачив і бачу — не настільки ж я сліпий. Зараз моя мета — віддячити тобі за нього.

Пам'ятаю вас усіх, де б я не був, який би не точився бій. Бажаю тобі здоров'я і всіляких успіхів у твоїх справах. Незабаром відгримить війна і залишиться смерть без роботи. Єдина моя мрія — якнайшвидше побачити вас усіх». *(21 серпня 1943 року.)*

«... Лежу на спині, підклавши під голову руки. Не чути ні гуркотання «бога війни», ні скрекотання кулеметів. Швидко спадають сутінки. Білі берізки, перемішані з чорними стовбурами дубняка, нагадують щільну циновку. Тендітні стовбурці ліщини вже губляться в темряві... У контрасті чорних тонів уявляється раптом яскравий сонячний день і світла голівка мого малюка, який весь час крутить нею, поважно крокуючи поруч зі мною. Усі кудись поспішають, дехто впізнає мене, вітається. Здається, я щасливий.

Не встигаю зафіксувати, що сталося, як раптом помічаю, що лежу на ліжку в знайомій кімнатці. Мою шию обхопили засмаглі рученята. Мені так добре, що навіть не слухаю, що лепече мій дорогий дитячий голосок.

А ось перед очима залита сонцем гордість Сибіру — Ангара. На набережній повно людей, усі святково вбрані. У всіх радісні усмішки. Здається, що кожний хоче сказати щось особливе, тепле, приємне. Мені хочеться цілувати всіх: і дівчат з ясними усмішками, і юнаків, з вогником молодості в очах, бабусь і дідусів, які витирають очі хусточками.

І раптом звідкілясь біжить мій малюк. Не добігши до мене, він розкинув руки. Його личко написане особливими фарбами — веселощів та радощів. Кинувшись до мене, він раптом запитує: «Тату, ти плачеш?» Ні, ні, мій любий. Просто мені дуже, дуже добре.

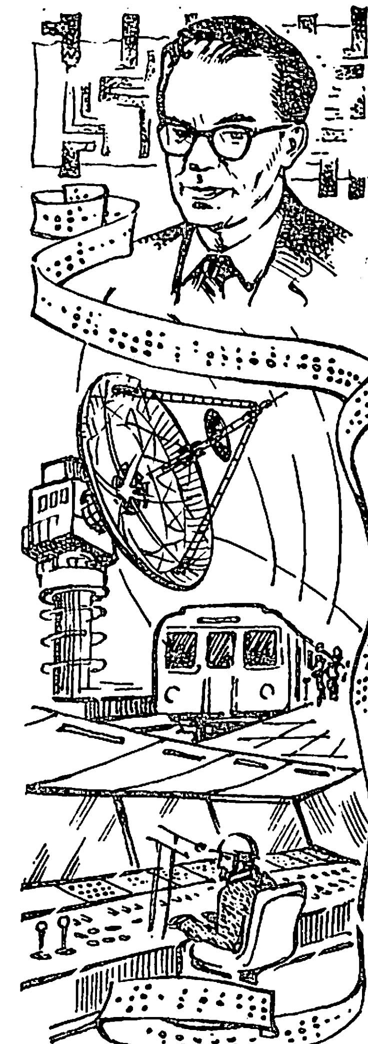
Чарівним казкам немає кінця. Хто ти, чудо-казкарю? Хто ти, що малює так яскраво кожний штрих, кожну рисочку минулого, такого жаданого?

Поступово промінь світла слабшає і зникає зовсім. Спогади втрачають яскравість, затухають у стомленому мозку. Зараз забудуся уві сні. Скоро відгримить війна і чари почутих мною казок стануть реальністю». (*5 жовтня 1943 року.*)

«... Тисячу разів дякую за надіслані мені листівки. Особливо сподобався мені етюд Шишкіна. Приємно знати, що мене зрозуміли. Твої слова «не треба думати про те, що смерть — за плечима, потрібно жити, боротися зі смертю» — це мої слова.

... Смерть за Батьківщину — не смерть, а безсмертя...» (*6 жовтня 1943 року.*)

ПРО МАТЕМАТИКУ І МАТЕМАТИКІВ



Б. Є. ПАТОН

УРОКИ ГЛУШКОВА*

Вважається аксіомою, що розробити визначні напрямки сучасної науки і техніки можуть лише великі колективи дослідників — настільки масштабними й складними є завдання, що їх потрібно розв'язувати в стислі строки. І все ж, коли охоплюєш мисленно прогрес у тій чи іншій галузі знання, стає зрозумілим, що він не безликий. Як правило, легко простежити зв'язок досягнутого з ідеями, ентузіазмом видатного вченого й організатора, який став душею великої справи. Саме таким був і академік Віктор Михайлович Глушков, ім'я якого невіддільне від створення в нашій країні кібернетичної індустрії.

---

* Переклад статті з газети «Правда» від 23 серпня 1983 р.

Він якось відразу ввійшов у велику науку, розв'язавши своєю докторською дисертацією так звану *п'яту узагальнену проблему Гільберта*, що вважалася однією з найскладніших у сучасній алгебрі. Здавалося б, доля молодого вченого цілком визначилася.

Проте життя розпорядилося інакше. У 50-х роках розпочалося становлення вітчизняної електронно-обчислювальної техніки. У 1951 р. групою дослідників АН УРСР під керівництвом академіка С. О. Лебедєва було створено першу в СРСР і континентальній Європі ЕОМ і цим самим започатковано дальші великомасштабні розробки в цій галузі. В. М. Глушков у числі перших усвідомив величезну важливість і перспективність нового наукового напряму як для самої науки, так і для народного господарства. Проблеми створення обчислювальної техніки оволоділи його уявою. Віктор Михайлович добре розумів, що розв'язання їх неможливе без синтезу найглибшої математичної основи з різноманітними прикладними дослідженнями і розробками. Він робить свій, можливо, найважливіший вибір, на який в той час небагато б хто відважився. У цьому яскраво виявилася не тільки наукова сміливість, одержимість, а й висока громадянська свідомість, патріотизм ученого.

Так, перехід у кібернетику був патріотичним актом, адже в алгебрі Глушков уже мав світове ім'я. Не заради особистої слави перейшов Віктор Михайлович на цю найскладнішу ділянку, ступив на незвіданий шлях, де його чекали великі труднощі. Він виходив з глибокого розуміння кардинальних напрямів науково-технічного прогресу, життєвих інтересів і потреб країни.

З 1956 р. діяльність В. М. Глушкова нерозривно пов'язана з Академією наук Української РСР. Очоливши лабораторію обчислювальної техніки і математики Інституту математики АН УРСР, Віктор Михайлович з притаманною йому енергією розгорнув дослідження в галузі фундаментальних і прикладних проблем обчислювальної математики і кібернетики. Під його керівництвом формується дружній колектив учених,

розробляється програма робіт, для реалізації якої в 1957 р. лабораторію було перетворено в обчислювальний центр АН УРСР. Успіхи нового наукового закладу швидко здобули широку популярність і визнання наукової громадськості. В. М. Глушков стає у ряд найвидатніших спеціалістів теоретичної кібернетики.

1958 р. був визначальним у житті вченого. Його обирають членом-кореспондентом Академії наук республіки, він стає комуністом. Коли в 1962 р. у Києві організували Інститут кібернетики АН УРСР, його директором по праву став один з ініціаторів створення інституту — В. М. Глушков, обраний на той час академіком АН УРСР.

Протягом двох наступних десятиріч Віктор Михайлович очолював Інститут кібернетики, який тепер носить його ім'я. За ці роки інститут перетворився на визначний науково-технічний комплекс, який займає в радянській науці визнані позиції з деяких напрямів кібернетики й обчислювальної техніки. Тут виросли висококваліфіковані кадри дослідників, сформувалися авторитетні наукові школи. Цьому сприяла атмосфера справжньої творчості — дух колективізму, який Віктор Михайлович всіляко підтримував.

Люди добре бачили, що для Глушкова робота в науці стала головним змістом життя, пристрастю. І для більшості його колег просто не існувало альтернативи, вони віддавалися справі так само, як Глушков, — цілком і беззастережно. Він був прикладом високого служіння науці. Усі його учні прагнуть зберігати «стиль Глушкова».

У Глушкова вражала здатність генерувати блискучі науково-технічні й організаційні ідеї і захоплювати ними інших. Багато хто бував спочатку збентежений несподіваністю та сміливістю цих ідей, а потім усі захоплювалися, ставали переконаними прихильниками, ентузіастами нових проектів і розробок. Не менш цінною його якістю було вміння гостро сприймати ідеї своїх колег, правильно передбачати значущість цих ідей, надавати їм завершеної форми. Нерідко в інтерпретації Глушкова та чи інша ідея набувала відтінків, про які її автор і не підозрював. І все це незмінно поєднувалося з доброзичливістю, дружньою підтримкою. Люди тяглися до Віктора Михайловича, і багато плідних ідей і перспективних розробок було започатковано в його кабінеті.

В. М. Глушкову була притаманна дивовижна багатогранність поривань, надзвичайно широкий діапазон наукових інтересів.

У його творчому доробку важливе місце посідає *теорія цифрових автоматів*. Головним підсумком цих пошуків стало створення методики синтезу цифрових автоматів, що дала змогу ефективно застосовувати абстрактно-автоматні та інші алгебраїчні методи для розв'язування конкретних задач проектування обчислювальної техніки. Його дослідження в цьому напрямі увінчалися такими значними досягненнями, як побудова теорії дискретних перетворювачів та загальної теорії обчислювальних машин і систем, створення математичних основ перспективних технологій у програмуванні, а також алгебри алгоритмів.

Результати теоретичних пошуків В. М. Глушкова та його учнів знайшли своє втілення в електронних обчислювальних машинах, у деяких автоматизованих системах управління й проектування. Велике значення мають вони й сьогодні, коли розробляються нові покоління ЕОМ.

Глушков був одним з перших, хто переглянув принципи Неймана, що стосуються структур і архітектури обчислювальних систем, і висловив плідну ідею підвищення внутрішнього інтелекту ЕОМ. Під керівництвом Віктора Михайловича розроблено малоконвейерний принцип організації обчислювального процесу, який знайшов своє втілення в абсолютно новій архітектурі ЕОМ.

У творчому доробку В. М. Глушкова, який налічує багато сотень наукових праць, особливе місце посідають дослідження в галузі штучного інтелекту. Основні зусилля в цій перспективній галузі він зосередив на розробці теорії дискретних систем, що здатні до самоорганізації, проблемах автоматизації розумових операцій.

Наукові ідеї В. М. Глушкова і сьогодні мають істотний вплив на розвиток теоретичної кібернетики й обчислювальної техніки. Вони реалізуються в роботі численних колективів дослідників.

В. М. Глушков був ентузіастом широкого практичного застосування обчислювальної техніки. А проблема ця, дуже непроста сама по собі, значно ускладнювалася тим, що доводилося втручатися в найскладнішу сферу управління виробництвом, народним господарством. Крім наукових і технічних труднощів, горезвісних відомчих бар'єрів, треба було долати бар'єри психологічні, добиватися змін у стилі дій, мисленні.

У цій діяльності В. М. Глушков незмінно виявляв якості справжнього бійця нашої партії, послідовно й наполегливо сприяв усуненню перешкод на шляху науково-технічного прогресу. Особливого значення Віктор Михайлович надавав координуванню зусиль в рамках єдиної науково-технічної політики і в масштабах усієї держави, очолюючи міжвідомчу наукову раду по впровадженню обчислювальної техніки та економіко-математичних методів у народне господарство СРСР, а також наукову раду з обчислювальної техніки і систем управління Держкомітету СРСР з питань науки і техніки та Президії АН СРСР.

Він висунув і конкретно обгрунтував чимало перспективних ідей. Це програми створення загальнодержавної автоматизованої системи збирання й обробки інформації для обліку, планування й управління народним господарством країни й союзних республік, а також державної системи обчислювальних центрів (ДСОЦ). Втілення цих грандіозних задумів, має, на думку вченого, приводити до корінних змін в організації управління, забезпечити перехід на безпаперову технологію управління виробництвом.

Учені-кібернетики АН УРСР під керівництвом В. М. Глушкова немало зробили для реалізації цих програм. Зокрема, запропоновані методи та програмно-технічні засоби побудови ДСОЦ на базі ЕОМ єдиної серії, ефективні програмні засоби доступу до них. Розроблено принципово нову вітчизняну технологію програмування, методи інтеграції складних автоматизованих комплексів.

Досить актуальними є погляди Віктора Михайловича щодо шляхів радикального підвищення економічної ефективності застосування обчислювальної техніки й автоматизованих систем управління.

З цього питання у його працях є глибоко продумані пропозиції. Одна з них — організаційне оформлення спеціалізованої галузі «машинна інформатика» (яка охопила б велике, але розрізнене кібернетичне господарство країни).

Особистість В. М. Глушкова втілила в собі найкращі риси радянського вченого, організатора, громадянина. Йому були притаманні глибока партійність, активна життєва позиція, вміння бачити перспективні проблеми науки і техніки. Протягом двадцяти років він був віце-президентом АН УРСР, і ми в президії академії твердо знали: якщо якусь складну задачу доручають Віктору Михайловичу, вона буде обов'язково розв'язана якнайкраще і в строк.

В. М. Глушков приділяв величезну увагу ознайомленню громадськості з новими результатами досліджень, перспективними напрямами в науці, вкладаючи в популяризацію наукових знань глибокі ідеї, що випереджали передовий рубіж науки. Просто й переконливо знайомлячи з тим, чим наука займатиметься надалі, він не тільки щедро розсівав зерна нового і запалював іскри інтересу в молоді, а й орієнтував своїх колег, які ставали чутливішими до завдань завтрашнього дня. Важливою справою Віктор Михайлович вважав систематизацію наукових знань. Під його керівництвом було створено першу в світі «Енциклопедію кібернетики».

Багато сил та енергії Герой Соціалістичної Праці, лауреат Ленінської і Державних премій СРСР і УРСР В. М. Глушков віддавав партійній і державній роботі. Він служив справі, яка має величезне, справді неоціненне значення для прискорення науково-технічного прогресу, служив з думкою про майбутнє, енергійно, пристрасно.

В. М. ГЛУШКОВ

МАШИНА ДОВОДИТЬ*

З давніх-давен і до наших днів однією з найбільш хвилюючих таємниць людського буття лишається механізм мислення. Як людина мислить? Яким законам підлягають міркування? Як вона доводить теореми? Як передбачає події реального життя? Усі ці питання здавна хвилювали людський розум.

Один з видатних мислителів стародавнього світу Арістотель, який жив у 384 — 322 рр. до н. е., перший побудував формальну теорію міркувань. У цій теорії він показав, що правильні міркування підпорядковуються невеликій кількості незмінних правил, які не залежать від конкретної природи об'єктів міркувань. Арістотель дав визначення силогізму, відкрив загальні і встановив спеціальні правила силогістики. *Силогізм — умовивід, у якому з двох суджень за певними правилами дістають третє, так званий висновок.*

Приклади силогізмів:

1. Усі громадяни СРСР мають право на працю
   Іванов — громадянин СРСР → Іванов має право на працю
2. Усяке A є B
   Усяке C є A → Усяке C є B
3. Усі зорі світять власним світлом
   Деякі небесні тіла зорі → Деякі небесні тіла світять власним світлом

Завдяки Арістотелю було покладено початок формалізації розумових операцій, що дало згодом поштовх до спроб механізувати процес мислення. Прикладом цього може бути «вертушка» Раймунда Луллія, який жив приблизно в період з 1235 по 1315 рік. Він намагався знайти механічні способи комбінування понять і побудував «логічну машину», яка скла-

* Переклад розділу з книжки «Машина доказывает» (М., Знание, 1981).

далася із семи кругів, що оберталися навколо одного центра. На цих кругах було написано слова, які означали поняття та логічні операції, такі, наприклад, як рівність, суперечність тощо. Обертаючи ці концентричні круги, можна було діставати різноманітні комбінації понять — висновки силогічного типу із заданих посилок. За життя Луллія до його спроби поставилися з недовірою, але згодом його пропозиція про машинізацію умовиводів мала великий вплив на багатьох математиків та інженерів. Серед них був і німецький філософ і видатний математик Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646—1716). Саме він сформулював основні принципи логіки — «*науки, яка вчить інші науки методу відкриття і доведення всіх висновків, що випливають з даних посилок*». Неоціненним є внесок Лейбніца в розвиток математики. Разом з І. Ньютоном (1643—1727) і незалежно від нього Лейбніц розробив диференціальне й інтегральне числення. Йому належать відкриття і в інших галузях математики. Для нас особливо цікавою є його ідея універсальної символіки. Він писав: «...мною знайдено засіб досягти того самого, що зробили Декарт та інші для арифметики і геометрії за допомогою алгебри й аналізу, але вже для всіх наук за допомогою Мистецтва формул... Тим самим вказано шлях, на якому всі, що існують на світі, складені поняття, можна розкласти на невелику кількість простих понять, які є неначе алфавітом, і за допомогою правильного методу з комбінацій букв такого алфавіту можна з часом знову дістати всі речі разом з їх теоретичними доведеннями». Лейбніц мав намір сконструювати обчислювальну машину, проте наміру свого не здійснив, хоча й удосконалив обчислювальну машину Блеза Паскаля (1623—1662), яка реалізувала додавання і була побудована Паскалем у 1642 р.

Першою логічною машиною називають «демонстратор» Ч. Стенхопа (1753—1816), за допомогою якого перевірялися не тільки арістотелеві, а й так звані числові силогізми. «Демонстратор» розв'язував елементарні задачі формальної логіки, виводив з посилок висновки.

Англійський логік У. —С. Джевонс (1835 — 1882) у 1869 р. побудував «логічну машину» на зразок невеликого фортеп'яно, у якого було більше як два десятки клавіш, що поділялися на дві частини. На перших було нанесено об'єкти — судження або властивості понять. Крім того, були клавіші, які вводили команди, розділові сполучники та виконували інші операції. На цій машині Джевонс не тільки виводив з посилок висновки, а й механізував деякі операції з висловлюваннями в логіці класів і силогістиці. Ще досконалішою виявилася машина А. Маркванда, побудована в 1883 р. Проте вона не знайшла застосувань. Творча ж думка, незважаючи ні на що, неухильно розвивалася в напрямі створення нових машин. Істотно новий якісний стрибок відбувся в зв'язку зі створенням машин Ч. Беббеджа (1792—1871).

Чарльз Беббедж — англійський філософ, інженер і математик сконструював цифрову обчислювальну машину, яка автоматично за певною програмою робила послідовні обчислення з десятковими числами. Ця машина хоч і не набула широкого застосування і розвитку на той час, стала прообразом сучасних обчислювальних машин.

Згадаємо ще одну важливу подію XIX ст. Ірландський математик і логік Дж. Буль (1815—1864), який став одним з основоположників математичної логіки, висловив ідею про аналогію між алгеброю і логікою та розробив логічне числення. Алгебро-логічний підхід дав йому змогу знайти нові види висновків, ще не відомих у традиційній силогістиці. Більше того, виникла алгебра логіки, у якій вперше алгебраїчну символіку застосовували до логічних висновків у процесі оперування з поняттями. Завдяки цьому можна було розв'язувати логічні задачі за допомогою методів, що застосовувалися в алгебрі.

Німецький логік Ернест Шредер (1841—1902) у 1890 р. заявив: «Ніхто не може сказати, що незабаром не буде побудовано «машину, що думає», аналогічну або й ще досконалішу, ніж лічильна машина, і здатну вивільнити людину від досить значної частини стомливої розумової праці, як парова машина успішно зробила це з фізичною працею».

Науково-технічний прогрес XX ст. не тільки породив обчислювальні машини, а й забезпечив широке проникнення їх у найрізноманітніші сфери людської діяльності. Автоматизація та механізація проектно-конструкторських робіт, автоматизований переклад з однієї мови на іншу, управління автоматичними й автоматизованими технологічними лініями сучасного промислового виробництва, комп'ютерні системи виробництва мультфільмів, обробка науково-технічної інформації тощо — ось приклади використання обчислювальних машин у сферах інтелектуальної діяльності людей.

Використання обчислювальних машин у сферах, безпосередньо не пов'язаних з обчисленнями, прагнення, з одного боку, створити ефективний інструмент пізнання людського інтелекту, а з іншого — полегшити не завжди легку розумову працю — усе це зумовило виникнення проблеми створення штучного інтелекту.

Як відомо, матеріальним носієм людського інтелекту є головний мозок. Відповідно до сучасних уявлень мозок людини складається приблизно з 10 мільярдів нервових клітин — нейронів. Один з можливих методів побудови штучного інтелекту (його звичайно називають структурним) — моделювання окремих нейронів і складання з отриманих моделей тих чи інших схем, що реалізують будь-яку послідовну схему переробки інформації. Цей шлях привабливий з погляду вивчення людського мозку. Але при сучасній технології він поки що не дозволив створити штучний інтелект, здатний серйозно конкурувати з природним інтелектом принаймні на одному важливому в практичному розумінні поприщі. Причиною є те, що вже для моделювання лише одного нейрона потрібні досить складні схеми, а для виявлення хоча б трохи цікавих для практики інтелектуальних властивостей потрібно створювати ансамблі з досить великої кількості нейронів—кілька десятків, якщо не сотень тисяч.

Крім того, потрібно вибрати вдалу схему їх поєднання, що відповідала б схемам, які реалізуються в людському мозку. Сучасна ж експериментальна нейрофізіологія за допомогою

прямих методів може розібратися в схемах поєднання щонайбільше кількох десятків нейронів. Можливості непрямих методів також поки що невеликі.

Через перелічені труднощі прямого моделювання при побудові штучного інтелекту на практиці звичайно використовується зовсім інший підхід, який природно назвати феноменологічним, або функціональним. Суть його полягає в тому, щоб будувати й відтворювати на універсальних обчислювальних машинах різні алгоритми, які визначають ті чи інші функції людського інтелекту. Серед останніх особливий інтерес становлять задачі класифікації, задачі розпізнавання образів, насамперед зорових і слухових, задачі навчання, здатності вести розмову природною (людською) мовою, здатність до цілеспрямованих дій, логічного висновку та ін.

Зауважимо, що проблема побудови штучного інтелекту може ставитися та й ставиться вже на практиці в двох різних формах: вузькій і широкій.

У вузькій постановці задача створення штучного інтелекту відокремлюється від задачі моделювання органів чуття, людської мови тощо. Прийнято вважати, що така задача буде розв'язаною, коли вдасться створити систему програм і відповідне інформаційне наповнення для обчислювальних машин, яке дасть змогу їм так чи інакше—через друкарську машинку, алфавітно-цифровий дисплей тощо — вести будь-які осмислені діалоги з людиною природною мовою. При цьому машина має виявити знання і здатність до здобуття нових знань, притаманну середній людині, так, щоб людина, яка веде з нею діалог (на різні теми) протягом як завгодно великого проміжку часу, не змогла б відрізнити його від організованого аналогічно діалогу зі звичайним співрозмовником — людиною. Ця умова, яку називають звичайно *тестом Тьюрінга*, ще не виконується більш чи менш повно, хоча ефективні системи діалогу обчислювальна машина—людина у визначених заздалегідь обмежених предметних рамках створені й працюють, повністю імітуючи діалог людина — людина. Те саме стосується й окремих областей інтелектуальної діяльності, наприклад, для гри в шахи вже створено програми, що значно перевищують за здібностями середню людину.

Друга, більш *широка постановка задачі створення штучного інтелекту* потребує моделювання не тільки суто інтелектуальної діяльності, а й органів чуття людини, насамперед зору і слуху, а також мови й рухових (моторних) функцій, і насамперед рук і ніг. Сьогодні завдання полягає в створенні інтелектуальних роботів.

Зрозуміло, наприклад, що взагалі не було б ніякого сенсу створювати обчислювальні машини, якби вони могли б виконувати обчислювальну роботу лише на рівні середньої людини. Необхідність значно перевершувати здібності середньої людини на окремих напрямах автоматизації інтелектуальної діяльності часто породжує максималізм у вимогах до штучного інтелекту. Завдання ж перевершити або хоча б зрівнятися в штучному інтелекті з найвищими досягненнями людського інтелекту у всіх напрямах, незрівнянно складніше, ніж завдання моделювання середнього людського інтелекту. Не виключається, що необхідність виконання подібного завдання в повному обсязі практично ніколи й не виникне.

Зауважимо, проте, що ніяких апріорних обмежень для автоматизації інтелектуальної діяльності не існує. Часто як доказ наявності таких обмежень наводять знамениту *теорему Геделя* про неповноту формальної арифметики. Суть цієї теореми в тому, що *будь-яка формальна теорія, що містить у собі арифметику натуральних чисел, неповна в тому розумінні, що в ній обов'язково існують змістовно істинні, але формально недовідні (такі, які не можна вивести з аксіом даної теорії) твердження.*

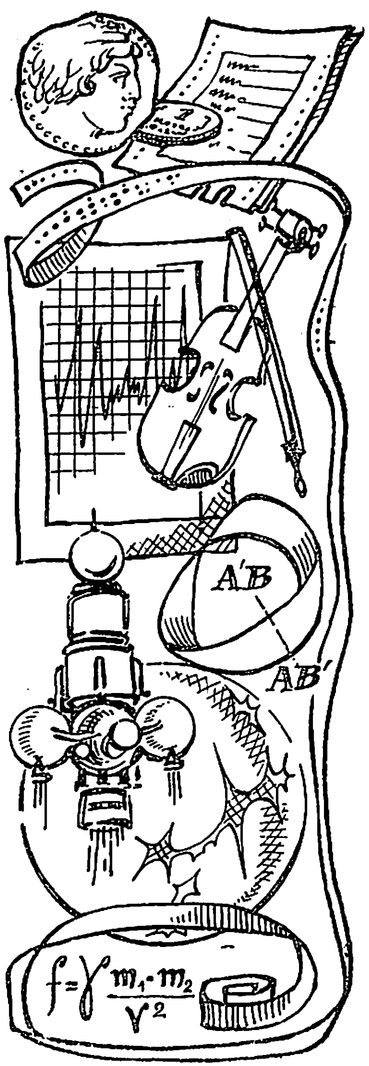
І все-таки доказ цей непереконливий, оскільки обмеження, зумовлені теоремою Геделя, правильні і стосуються не тільки машини, а й людини, що лишається в рамках даної теорії. Водночас ніщо не заважає машині (так само, як і людині) вийти за межі чисто абстрактного мислення, включивши до складу своїх дій знамениту ленінську тріаду: *наочне споглядання* (експеримент) — *абстрактне мислення —практика.* Як уже зазначалося, обчислювальні машини успішно застосовуються для автоматизації як першого елемента тріади (експеримент), так і останнього (управління технологічними процесами). Неважко показати, що при такому природному розширенні процесу здобування знань теорема, аналогічна теоремі Геделя, вже не справджується.

Розглянемо докладніше питання, пов'язані з проблемою автоматизації дедуктивних побудов. Дедуктивні побудови поділяються на два класи задач. Перший з них пов'язаний з постановками проблем, тобто з формуванням висловлювань, правильність (істинність) яких або неправильність (хибність) треба довести. *Пошук самого доведення у випадку істинності висловлювання або спростування, якщо воно хибне, звичайно називають логічним висновком.* При цьому припускається, що в процесі доведення можуть використовуватися лише раніше здобуті формалізовані знання, а не нові експерименти та спостереження. Саме ця обставина підкреслюється застосуванням терміна «дедуктивний» до розглядуваних нами побудов. Формалізовані знання можуть міститися як у висловлюваннях, істинність яких або було встановлено раніше (*теореми*) або постулюється апріорі (*аксіоми*), так і в процедурах (*алгоритмах*), які дають змогу будувати доведення і спростування. Для скорочення описів висловлювань і процедур у систему формалізованих знань звичайно включають також визначення різних понять, які можуть застосовуватися у формулюваннях.

Формалізація знань, про яку йдеться в даному випадку, полягає в їх організації у так зване числення. *Основою всякого числення є насамперед формальна мова, за допомогою якої записуються твердження числення, інакше кажучи, його формули.*

Друга частина числення — процедури (правила) виведення.

Зауважимо, нарешті, що дуже істотним компонентом систем автоматизації дедуктивних побудов є автоматизація формульних перетворень в алгебраїчних системах. Останнім часом у цьому напрямі нагромаджено цікавий дослід. Думаю, що цьому питанню будуть присвячені спеціальні книжки.



ГОРИЗОНТИ МАТЕМАТИКИ

Учням VII—VIII класів

В. Ю. СЕРЕДА

ЩО ОЗНАЧАЄ «МИСЛИТИ ЛОГІЧНО»

Для того щоб оволодіти діалектичною логікою, треба спочатку навчитися володіти логікою формальною. Математика... вчить володіти цією логікою.

Н. К. Крупська

Навчитися мислити правильно — одне з найважливіших завдань, яке ставить перед собою кожна людина. А яке мислення слід вважати правильним? Формальна логіка (наука про закони мислення) на це запитання відповідає так: *під правильним треба розуміти лише таке мислення, яке є визначеним, послідовним і доказовим*. Щоб мислити правильно, треба постійно додержувати певних законів, на основі яких наше мислення завжди буде визначеним, послідовним і доказовим. Таких законів у формальній логіці чотири: **закон тотожності, закон суперечності, закон виключеного третього і закон достатньої підстави**, причому закон тотожності характеризує визначеність мислення, закон суперечності і закон виключеного третього — його послідовність, а закон достатньої підстави — його доказовість. Проаналізуємо кожний із законів.

1. Закон тотожності

Згідно з цим законом логічний зв'язок між думками можливий лише за умови, що ми, міркуючи про якийсь предмет, розглядатимемо саме його і весь час надаватимемо одного й того самого змісту його властивостям (ознакам). Так, з двох тверджень «Усі піраміди—просторові тіла» і «Тетраедр—піраміда» неминуче випливає висновок: «Тетраедр—просторове тіло». Але висновок цей можна зробити тільки тоді, коли ми в обох цих твердженнях під словом «піраміда» розумітимемо один і той самий предмет і надаватимемо одного й того самого змісту його ознакам. Так само ми повинні мислити і про «просторові тіла», і про «тетраедр». А коли б ми, кажучи або думаючи, що «Всі піраміди—просторові тіла» під терміном «піраміда» розуміли якийсь предмет з одними ознаками (наприклад, египетську піраміду), а кажучи «Тетраедр—піраміда», під «пірамідою» розуміли вже інший предмет, з іншими ознаками (наприклад, геометричне тіло), то ми, очевидно, не змогли б із заданих двох тверджень зробити висновок: «Тетраедр—просторове тіло». Наше мислення не було б правильним — ми припустилися б логічної помилки, що полягає в порушенні закону тотожності. Слід зауважити, що закон тотожності не забороняє нам розглядати один і той самий предмет за різними його ознаками. Ми не повинні цього робити лише тоді, коли треба з'ясувати логічний зв'язок поняття про предмет, що входить у висновок, з поняттями про інші предмети, які також входять у даний висновок. Отже, *додержання закону тотожності — одна з необхідних умов правильного висновку*. Для мислення, яке не підкоряється закону тотожності, неможливий ніякий логічно обгрунтований висновок, ніякий перехід від уже обгрунтованих положень до положень, які з них виводяться. Закон тотожності найширше застосовується в практиці мислення. Порушення цього закону — дуже поширена логічна помилка в наших міркуваннях; практично вона виражається в тому, що ми, думаючи про якийсь предмет чи висловлюючи думку про нього, самі того не помічаючи, підмінюємо цей предмет іншим.

2. Закон суперечності

Іноді в наші міркування проникають суперечності, які виникають через невміння додержувати в думці тих положень і тверджень, які вже визнано за істинні. Отже, щоб мислення було логічним, потрібно: визнавши певні положення за істинні та зробивши логічні висновки з них, у своїх дальших міркуваннях не заперечувати їх істинності.

Згідно із законом суперечності не можуть бути одночасно істинними два протилежні висловлення, одне з яких стверджує щось про предмет, а друге заперечує те саме про той самий предмет, причому предмет розглядається в один і той самий час і в одному й тому самому розумінні.

Не можуть, наприклад, бути одночасно істинними такі два твердження: «Олег розв'язав задачу» і «Олег не розв'язав задачу». А якщо перше стосується одного Олега, а друге— іншого, то між ними суперечності може й не бути: можливо, що перший Олег розв'язав задачу, а другий — ні. Суперечності не буде і тоді, коли обидва твердження стосуються одного й того самого предмета, розглядуваного в різний час. Наприклад, якщо твердження «Олег не розв'язав задачу» належить до минулого часу, а твердження «Олег розв'язав задачу» — до теперішнього. Суперечності не буде і в тому разі, коли твердження і заперечення стосуються одного й того самого предмета і належать до одного й того самого часу, але при цьому твердження розглядає предмет в одному розумінні, а заперечення — в іншому. Якщо ми кажемо, що «Олег розв'язав задачу» і під розв'язком розуміємо лише відповідь, а в другому випадку під тими самими словами розуміємо певне оформлення розв'язання задачі, то між твердженням і запереченням не обов'язково буде суперечність: можливо, Олег розв'язав задачу в першому розумінні слова, але не розв'язав у другому. Будь-яке порушення закону суперечності призводить до виникнення логічних помилок.

Розглянутий закон суперечності справджується для всіх протилежних висловлень незалежно від виду самої протилежності. Традиційна логіка поділяє протилежність між твердженнями на суперечну і контрарну.

Суперечною протилежність буде, якщо: а) одне з протилежних висловлень загальне, а друге — частинне; б) обидва протилежні висловлення одиничні. Наприклад, висловлення «Усі квадрати—прямокутники» і «Деякі квадрати — не прямокутники» перебувають між собою у відношенні суперечної протилежності: вони протилежні, тобто одне з них стверджує про один клас предметів те, що про цей самий клас заперечує інше, але при цьому перше з них загальне, а друге частинне. Інший приклад суперечної протилежності: «Цей трикутник прямокутний» і «Цей трикутник не прямокутний». Тут обидва протилежні висловлення одиничні, тобто стосуються единого предмета.

Контрарною протилежність буде в тому разі, коли обидва протилежні висловлення загальні. Наприклад, висловлення «Усі ромби — паралелограми» і «Жодний ромб не є паралелограмом» перебувають між собою у відношенні контрарної протилежності: і твердження, і заперечення є тут загальними висловленнями. Таким чином, *закон суперечності справджується як для суперечної, так і для контрарної протилежності.*

3. Закон виключеного третього

Згідно із законом суперечності два протилежні твердження не можуть бути одночасно істинними. Виникає запитання: а чи не можуть вони бути одночасно хибними? Тут потрібно розрізняти два випадки.

1. Протилежність контрарна. Тоді обидва висловлення можуть бути одночасно хибними. Розглянемо два висловлення: «Усі ромби — квадрати» і «Жодний ромб не є квадратом». Маємо приклад контрарної протилежності. Обидва ці висловлення хибні (істина тут полягає в тому, що деякі ромби є квадратами, а деякі ні). Чому так буває? Річ у тому, що контрарна протилежність — найбільш крайня з усіх можливих. Якщо в одному висловленні стверджується, що всі ромби квадрати, а в другому — що жодний ромб не квадрат, то не можна уявити собі між обома цими висловленнями протилежності більшої, ніж та, яку вони виражають. У таких випадках може виявитися, що істина — десь між цими двома крайностями (як у наведеному прикладі). Отже, два контрарні висловлення можуть бути одночасно хибними, якщо між крайніми випадками, які виражаються ними, існують проміжні. У наведеному прикладі таким висловленням є: «Деякі ромби є квадратами, а деякі — ні». Звичайно з того, що два контрарні висловлення можуть одночасно бути хибними, зовсім не випливає, що вони в усіх випадках обов'язково хибні. Можливо, що одне з них хибне, а друге — істинне. Так, з двох контрарних висловлень «Усі квадрати є прямокутниками» і «Жодний квадрат не є прямокутником» перше істинне, а друге хибне. Такі ситуації виникають тоді, коли протилежність, що виражається загальними висловленнями, не допускає перехідних випадків.

2. Протилежність суперечна. Тоді обидва висловлення не можуть бути одночасно хибними. Тут справджується третій закон логічного мислення — закон виключеного третього. За цим законом, з двох суперечних тверджень одне і тільки одне неодмінно має бути істинним. Закон виключеного третього називається так тому, що цим законом виключається істинність будь-якого третього висловлення, крім заданих двох—твердження і заперечення, між якими ми повинні зробити вибір. Так, із суперечних тверджень «Усі квадрати—прямокутники» і «Деякі квадрати — не прямокутники» одне неодмінно має бути істинним. Із закону виключеного третього, які із закону суперечності, не випливає, яке саме з двох суперечних висловлень хибне, а яке істинне. Розв'язання цього питання вимагає в кожному випадку окремого дослідження.

Отже, закон виключеного третього поширюється на всі суперечні висловлення; щодо контрарних висловлень цей закон обов'язкової сили не має.

4. Закон достатньої підстави

Цей закон виражає ту необхідну властивість логічного мислення, яка називається доказовістю.

Згідно з цим законом кожна істинна думка має бути обгрунтована іншими думками, істинність яких доведено.

Вимога обгрунтованості мислення відбиває одну з фундаментальних властивостей матеріального світу. У природі й суспільстві кожний факт, кожний предмет, кожне явище підготовлене попередніми фактами, предметами, явищами. Це — закон об'єктивної реальності. Річка замерзає, оскільки знижується температура навколишнього повітря; дим піднімається вгору, оскільки він легший за атмосферу, що оточує його, і т. д.

Понад двісті років тому М. В. Ломоносов у праці «Елементи математичної хімії» як одну з аксіом наводить таке твердження: «Ніщо не відбувається без достатньої підстави».

Таким чином, доказовість — дуже важлива умова правильного мислення. Більшість наукових істин — це істини, обгрунтовані доказами. Навіть очевидні істини, «самі по собі зрозумілі», математика завжди намагається довести, тобто пов'язати їх з істинами, вже доведеними або просто прийнятими за вихідні положення (аксіомами, постулатами). Наприклад, геометр не просто стверджує, що всяке коло поділяється діаметром на дві рівні частини, а доводить це твердження. Здається, що тут доводити? Достатньо подивитися на малюнок, де пряма проходить через центр кола, щоб переконатися в очевидній істинності цієї теореми. Але геометр не довіряє цій очевидності. Якщо ми станемо на полотно залізниці й будемо дивитися в далечінь, то побачимо, що в міру віддалення від нас до горизонту рейки ніби сходяться в одну точку. Але це лише ілюзія. Насправді рейки паралельні на всьому протязі залізниці. Отже, очевидність того чи іншого висновку не є підставою для впевненості в його істинності. Саме тому наука прагне довести всі свої положення.

Одне з найпоширеніших порушень закону достатньої підстави полягає в тому, що за підставу для висновку або твердження береться те, що не може бути такою підставою. Наприклад, якщо ми, розв'язуючи нерівність $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} (2x + 1)$, приходимо до нерівності $x > 2x + 1$, то цим самим порушуємо закон достатньої підстави. Справді, для твердження про істинність нерівності $x > 2x + 1$ достатньою підставою є той факт, що основа логарифма має бути більшою від одиниці, а в цьому разі вона не виконується. А якщо, розв'язуючи задану нерівність, ми дістаємо нерівність $x < 2x + 1$, — це означає, що ми мислимо логічно, бо достатня підстава для істинності здобутої нерівності виконується (основа логарифма повинна бути правильним додатним дробом).

Закони мислення, з якими ми ознайомилися, застосовуються в усіх міркуваннях, доведеннях і висновках і мислити правильно — означає робити усі висновки лише на основі розглянутих вище логічних законів.

Д. В. КЛИМЕНЧЕНКО

МАТЕМАТИЧНІ СОФІЗМИ

Саме математика насамперед захищає нас від обману чуттів і вчить, що одна справа — як влаштовані предмети, які сприймаються чуттями, а інша — якими вони здаються; ця наука дає найнадійніші правила; хто керується ними, тому не страшний обман чуттів.

Л. Ейлер

Розв'язування софізмів, які призводять до абсурдів, для не новачка в математиці повинні бути чудовим засобом перевірки правильності наближення до математичної істини, засобом тренування розуму і удержування міркування й доказів у твердо встановлених межах.

Ж. Віола

Часто говорять: «*Правильно, як двічі по два — чотири*», підтверджуючи думку про логічну бездоганність законів математики й здобутих на їх підставі істин. А тому, якщо в результаті якихось міркувань дійдемо протилежного висновку, наприклад дістанемо, що $2 \times 2 = 5$, то це аж ніяк не похитне нашої впевненості в істинності висловленого твердження, а лише означатиме, що десь у проведених міркуваннях ми мимоволі припустилися помилки. І знайти її буває не так вже й легко.

Справді, чи не здаються на перший погляд абсолютно бездоганними такі, наприклад, міркування:

1. Нехай $a - b = c$, тоді $5a = 5b + 5c$ і $4b + 4c = 4a$. Додавши почленно дві останні рівності, дістанемо $4b + 4c + 5a = 5b + 5c + 4a$; тепер, віднявши від обох частин по $9a$, матимемо: $4b + 4c - 4a = 5b + 5c - 5a$, або $4(b + c - a) = 5(b + c - a)$, звідки випливає, що $4 = 5$(?!)

2. Візьмемо правильну числову рівність $225 : 25 + 75 = 100 - 16$ і виконаємо кілька перетворень:

$$25(9 : 1 + 3) = 84; \quad 25 \cdot 12 = 7 \cdot 12; \quad 5 \cdot 5 = 7 \quad (?!).$$

3. Перетворимо таку рівність:

$$5005 - 2002 = 35 \cdot 143 - 143 \cdot 14;$$
$$5005 - 35 \cdot 143 = 2002 - 143 \cdot 14;$$
$$5(1001 - 7 \cdot 143) = 2(1001 - 143 \cdot 7);$$
$$5 = 2(?!).$$

4. Додавши до обох частин рівності $81 - 171 = 100 - 190$ число $\frac{361}{4}$, дістанемо: $81 - 171 + \frac{361}{4} = 100 - 190 + \frac{361}{4}$, або

$$9^2 - 2 \cdot 9 \cdot \frac{19}{2} + \left(\frac{19}{2}\right)^2 = 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot \frac{19}{2} + \left(\frac{19}{2}\right)^2;$$

$$\left(9 - \frac{19}{2}\right)^2 = \left(10 - \frac{19}{2}\right)^2;$$

$$9 - \frac{19}{2} = 10 - \frac{19}{2}; \quad 9 = 10, \text{ тобто } 3 \cdot 3 = 10 \ (?!)$$

Звичайно, ніяких тут доведень немає, створюється тільки їхня зовнішня видимість, а насправді порушуються закони та правила математики. Так, у першому з наведених прикладів виконано неможливу дію — ділення на нуль ($b + c - a = 0$), у другому неправомірно застосовано розподільний закон множення відносно ділення ($25\,(9 : 1) \neq 225 : 25$), у третьому знову — виконано ділення на 0, у четвертому на підставі рівності квадратів $\left(9 - \frac{19}{2}\right)^2 = \left(10 - \frac{19}{2}\right)^2$ зроблено хибний висновок про рівність основ ($-1 \neq 1$, хоч $(-1)^2 = 1^2$).

Наведені приклади є так званими *математичними софізмами*. Софізм (від грецького σοφισμα — хитрування, вигадка, головоломка) — ланцюг правдоподібних міркувань, який містить замасковану помилку, а тому приводить до абсурдного, парадоксального висновку; абсурдне чи парадоксальне твердження, що суперечить загальноприйнятим уявленням. Переконливість на перший погляд багатьох софізмів, їх «логічність» звичайно пов'язана з добре замаскованою (семіотичною) помилкою.

В історії математики софізми відіграли значну роль — дали поштовх до відкриття нових закономірностей і побудови теорій. Софізми мають бути розкритими, тобто помилка має бути знайдена, осмислена.

Любили розбирати математичні софізми в сім'ї Ульянових. Заняттями вміло керував талановитий педагог Ілля Миколайович — батько Володимира Ілліча Леніна. Повторюючи вислів М. В. Ломоносова «Математику вже тому вивчати треба, що вона розум у порядок приводить», він спрямовував діяльність дітей на творчі пошуки, вироблення вмінь аналізувати, виявляти помилки та розкривати їх причини. Корисними щодо цього виявилися саме математичні софізми. Старший брат Володимира Ілліча Олександр у листі до матері писав: «Надсилаю татові брошуру «Математичні софізми», яку він хотів мати. Володі, на мою думку, вона може бути дуже корисною, якщо він стане самостійно розбирати ці софізми».

Очевидно, В. І. Ленін уважно опрацював надіслану братом книжку, бо у своїх працях не раз використовував терміни «софізм» і «софістика». Так, у статті «Становище Бунду в партії» (1903 р.), характеризуючи помилки бундівців, Володимир Ілліч пише: «Міркування це... схоже, як дві краплі води, на ті міркування, що їх математики називають математичними софізмами і в яких, — строго логічним, на перший погляд, способом, — доводиться, що двічі по два п'ять, що частина більша цілого і т. п. Існують збірники таких математичних софізмів, і дітям-учням вони дають свою користь» (Л е н і н В. І. Повне зібр. тв., т. 8, с. 64).

Однією з перших науково-популярних книжок з математики, виданих у молодій Країні Рад, був збірник математичних парадоксів В. Літцмана і Ф. Тріра «Де помилка?», який вийшов у Петрограді в 1919 р. З того часу було опубліковано ряд збірників математичних софізмів та парадоксів (деякі з них увійшли до списку літератури, наведеного наприкінці цієї статті), софізми та парадокси публікуються в різних науково-популярних книжках та методичних виданнях.

Пропонуємо вашій увазі кілька софізмів. У кінці статті подано відповіді, але не поспішайте звертатися до них.

1. Позначимо різницю $a - b = c$, тоді $a = b + c$. Помноживши обидві частини останньої рівності на $(a - b)$, дістанемо:

$$a^2 - ab = ab + ac - b^2 - bc.$$

Віднявши від обох частин здобутої рівності ac, матимемо:

$$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc, \text{ або}$$
$$a(a - b - c) = b(a - b - c),$$

а поділивши обидві частини на $(a - b - c)$, дістанемо: $a = b$, тобто будь-які два числа рівні між собою. У чому ж помилка?

2. У числовій рівності $\frac{12+6}{12-9} - 6 = \frac{5 \cdot 12 - 60}{17 - 12}$, замінивши 12 на «$a$», дістанемо: $\frac{a+6}{a-9} - 6 = \frac{5a - 60}{17 - a}$.

Виконаємо тотожні перетворення:

$$\frac{a + 6 - 6a + 54}{a - 9} = \frac{5a - 60}{17 - a}; \qquad \frac{-5a + 60}{a - 9} = \frac{5a - 60}{17 - a};$$
$$\frac{5a - 60}{9 - a} = \frac{5a - 60}{17 - a}.$$

З останньої рівності випливає, що $9 - a = 17 - a$, звідки $9 = 17$.

Знайдіть помилку.

3. Обчислюючи суму $3-2-3+2+3-2-3+\ldots$, члени математичного гуртка зробили по-різному.

П е р ш и й з них обчислював так: $(3-3) - (2-2) + (3-3) - (2-2) + \ldots = 0$.

Д р у г и й: $3 - (2+3) + (2+3) - (2+3) + (2+3) - \ldots = 3-5 + 5-5+5- \ldots = 3 - 0 = 3$.

Т р е т і й: $3-2-3+ (2+3-2-3+2+3-\ldots) = -2+ (2-2) + (3-3) + \ldots = -2$.

Ч е т в е р т и й: $(3-2) - (3-2) + (3-2) - (3-2) + \ldots = 1-1+1-1+\ldots = 1-(1-1) - (1-1) - \ldots = 1$.

П ' я т и й : $3-2-3+2+3-2-3+\ldots = x$; $3-2-(3-2-3+2+3-\ldots) = x$; $1 - x = x$; $2x = 1$; $x = \frac{1}{2}$.

Хто з них правий?

4. Візьмемо дві правильні числові рівності $3 = \frac{15}{8-3}$ і $5 = \frac{15}{8-5}$.

У праві частини кожної із цих рівностей підставлятимемо замість 3 і 5 числові вирази $\frac{15}{8-3}$ і $\frac{15}{8-5}$. Продовжуючи цей процес до нескінченності, дістанемо: $3 = \cfrac{15}{8 - \cfrac{15}{8 - \cfrac{15}{8 - \vdots}}}$

$$5 = \cfrac{15}{8 - \cfrac{15}{8 - \cfrac{15}{8 - \vdots}}}$$

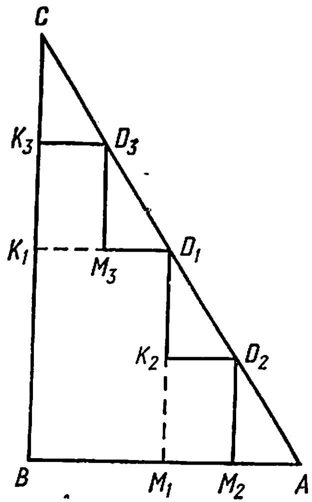
З рівності правих частин робимо висновок, що $3 = 5$. Знайдіть помилку.

5. У прямокутному трикутнику ABC з точки D_1, яка ділить гіпотенузу пополам, опустимо перпендикуляри на катети AB і BC (мал. 1). Нехай їхні основи — точки M_1 і K_1 У здобутих трикутниках AD_1M_1 і D_1CK_1 виконаємо такі самі побудови. У результаті дістанемо ламану лінію $AM_2D_2K_2D_1M_3D_3K_3C$, довжина якої дорівнює сумі довжин катетів AB і BC. Продовжуючи цей процес, помічаємо, що довжина отриманої ламаної весь час дорівнює сумі довжин катетів. І якщо цей процес продовжити до нескінченності, то ламана наближатиметься до гіпотенузи, причому її довжина є границею довжини ламаної.

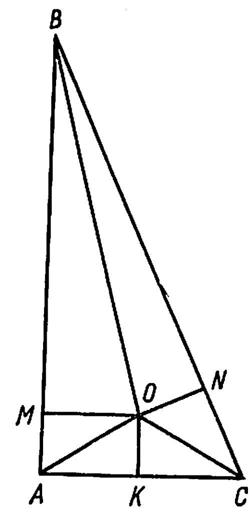
Таким чином, сума катетів довільного прямокутного трикутника дорівнює його гіпотенузі, що суперечить відомій теоремі геометрії.

У чому помилка?

6. Візьмемо прямокутний трикутник ABC (мал. 2). Проведемо бісектрису кута B, а до сторони AC в її середині



Мал. 1



Мал. 2

поставимо перпендикуляр. Точку їх перетину позначимо O. Сполучимо цю точку з вершинами A і C і опустимо перпендикуляри на AB і BC.

Розглянемо трикутники, які ми дістали:

1) $\Delta AOK = \Delta COK$ ($OK \perp AC$; $AK = KC$; OK — спільна), отже, $AO = OC$ і $\angle AOK = \angle COK$;

2) $\Delta BMO = \Delta BNO$ (трикутники прямокутні, BO — спільна, $\angle OBM = \angle OBN$), отже, $BM = BN$ і $\angle BOM = < BON$. З рівності двох пар кутів випливає, що $\angle AOM = \angle CON$, крім того, доведено, що $AO = OC$ і $MO = ON$. Отже, $\Delta AOM = \Delta CON$. Таким чином, $AM = CN$.

Звідси маємо:

$$\frac{\begin{matrix} BM = BN \\ MA = NC \end{matrix}}{AB = BC},$$

тобто катет дорівнює гіпотенузі в одному й тому самому прямокутному трикутнику (?!). У чому помилка?

7. Обидві частини відомої тригонометричної тотожності $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ піднесемо до степеня $1\frac{1}{2}$:

$$\cos^3\alpha = (1 - \sin^2\alpha)^{1\frac{1}{2}}.$$

Додавши до обох частин рівності по 1, піднесемо отримані суми до квадрата: $(\cos^3\alpha + 1)^2 = \left((1 - \sin^2\alpha)^{1\frac{1}{2}} + 1\right)^2$.

Підставивши в здобуту рівність, наприклад, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, дістанемо: $(0 + 1)^2 = \left((1 - 1)^{1\frac{1}{2}} + 1\right)^2$, тобто $1^2 = 1^2$ (правильна рівність). Але, підставляючи $\alpha = \pi$, дістанемо: $(-1 + 1)^2 = \left((1 - 0)^{1\frac{1}{2}} + 1\right)^2$, тобто $0 = 2^2$ (неправильна рівність). Поясніть причину такого розходження.

Відповіді

1. За умовою $a - b = c$, тому $a - b - c = 0$. Отже, при скороченні на $a - b - c$ виконано ділення на 0, чого робити не можна. (Такі софізми дуже поширені).

2. Рівність $\frac{5a - 60}{9 - a} = \frac{5a - 60}{17 - a}$ правильна тільки при $a = 12$, тобто при $5a - 60 = 0$. Тому висновок про рівність $9 - a$ і $17 - a$ помилковий.

3. Усі п'ятеро допустили помилку, поширюючи закони та правила, встановлені для скінченного числа доданків, на випадок нескінченного їх числа. Розглядуваний вираз не має конкретного смислу.

Зауважимо, що навіть видатний математик Л. Ейлер (1707—1783) подібні суми обчислював так:

а) $1-1+1-1+1-1+\ldots=x;$
$1-(1-1+1-1+1-\ldots)=x;$
$1-x=x;\ 2x=1;\ x=\frac{1}{2}.$

б) $1-2+2^2-2^3+2^4-\ldots=x;$
$1-2\ (1-2+2^2-2^3+\ldots)=x;$
$1-2x=x;\ 3x=1;\ x=\frac{1}{3}.$

4. Як і в попередньому прикладі, неправомірно поширюються правила, встановлені для скінченного, на нескінченне.

5. Твердження про те, що «ламана наближається до гіпотенузи і в границі її довжина дорівнює довжині гіпотенузи», безпідставне. Довжина ламаної — стала, і її границею не може бути довжина гіпотенузи.

6. Бісектриса кута B перетне сторону AC в деякій точці D, яка лежить між точками A і K, бо має виконуватися $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC}$ ($AB<BC$, то і $AD<DC$). Отже, точка O не може бути в середині трикутника ABC, тому і не існує тієї системи трикутників, про яку йдеться в процесі «доведення».

7. Якщо $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ тотожність, то в результаті піднесення до степеня $1\frac{1}{2}$ обох її частин отримана рівність $\cos^3\alpha=(1-\sin^2\alpha)^{1\frac{1}{2}}$ правильна тільки при таких α, коли $\cos\alpha\geqslant 0$. При $\alpha=\pi$ $\cos\alpha=-1<0$, тому рівність не справджується. Додавання до обох частин рівності чи нерівності по одиниці та піднесення до квадрата не змінює її характеру.

Список використаної та рекомендованої літератури

1. Брадис В. М., Минковский В. Л., Харчева А. К. Ошибки в математических рассуждениях. 3-е изд. М., Просвещение, 1967. 191 с.

2. Дубнов Я. С. Ошибки в геометрических доказательствах. 4-е изд. М., Наука, 1969. 63 с.

3. Клименченко Д. В. Задачі з суперечливими умовами.— У кн.: У світі математики. К., Рад. шк., 1974, вип. 5, с. 194—203.

4. Конфорович А. Г. Математичні софізми і парадокси. К., Рад. шк., 1983. 208 с.

В. М. ЛЕЙФУРА

ДІОФАНТОВІ РІВНЯННЯ

Діофантовими називають алгебраїчні рівняння (або їх системи) з раціональними коефіцієнтами, розв'язки яких знаходять у цілих (або раціональних) числах. Звичайно вважають, що діофантові рівняння мають невідомих більше, ніж рівнянь, у зв'язку з чим їх називають також *невизначеними*.

Розв'язування рівнянь у цілих числах є однією з найстародавніших математичних задач. Уже на початку II тисячоліття до н. е. вавілоняни вміли розв'язувати системи таких рівнянь з двома невідомими. Найбільшого розквіту ця галузь математики набула в Стародавній Греції. Основним джерелом для нас є «Арифметика» Діофанта (III ст. н. е.), яка містить різні типи рівнянь та систем. У ній Діофант, на честь якого й названо ці рівняння, передбачає ряд методів дослідження рівнянь 2-го та 3-го степенів, які розвинулися лише в XIX ст.

Найпростіше діофантове рівняння

$$ax+by=1,$$

де a, b — цілі взаємно прості числа, має нескінченну множину розв'язків (якщо x_0, y_0 — розв'язок, то числа $x=x_0+bn$, $y=y_0-an$ $(n\in N)$ також будуть розв'язками).

Ще одним прикладом діофантового рівняння є рівняння

$$x^2+y^2=z^2,$$

цілі додатні розв'язки якого являють собою довжини катетів x, y та гіпотенузи z прямокутних трикутників з цілочисловими довжинами сторін і називаються *піфагоровими числами*. Усі трійки взаємно простих піфагорових чисел можна дістати за формулами:

$$x=m^2-n^2,\ y=2mn,$$
$$z=m^2+n^2,$$

де m і n — цілі взаємно прості числа $(m>n>0)$.

Дослідження діофантових рівнянь звичайно пов'язане із значними труднощами. Можна, зокрема, явно задати многочлен

$$F(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

з цілими коефіцієнтами, такий, що не існує алгоритму, згідно з яким для кожного цілого x можна було б дізнатися, чи розв'язуване рівняння

$$F(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$$

відносно $y_1, y_2, \dots, y_n$.

У цій статті на конкретних прикладах розглядаються деякі досить загальні методи розв'язування діофантових рівнянь та дослідження питання про існування їх розв'язків.

Приклади

1. Знайти всі цілі числа, які є розв'язками рівняння $y^3 - x^3 = 91$.

2. Розв'язати на множині натуральних чисел рівняння

$$y^2 - x^2 = 1980.$$

Вказівка. Ліву частину рівняння доцільно розкласти на множники, намагаючись звести його розв'язування до розв'язування еквівалентної сукупності систем двох рівнянь з двома невідомими.

1. Розв'язання. Оскільки $y^2 + xy + x^2 \geqslant 0$, а 7 і 13 — прості числа, то рівність можлива лише у випадках:

$$\begin{cases} y - x = 91, \\ y^2 + xy + x^2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y - x = 1, \\ y^2 + xy + x^2 = 91; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - x = 13, \\ y^2 + xy + x^2 = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} y - x = 7, \\ y^2 + xy + x^2 = 13. \end{cases}$$

Розглянувши ці системи, знаходимо розв'язки рівняння: (5; 6), (—6; —5), (—3; 4), (—4; 3).

2. Розв'язання. У правій частині маємо парне число, тому в лівій принаймні один із співмножників має бути числом парним, але $x + y$ — парне, то парним буде й число $x - y$ і навпаки. Отже, маємо:

$$\begin{cases} y - x = 2a, \\ y + x = 2b, \end{cases}$$

де $a \in N$, $b \in N$, $x > y$.

Розв'язок цієї системи дістанемо, розглянувши всі можливі пари натуральних чисел a, b, які задовольняють умову $a \cdot b = 495$.

3. Розв'язати рівняння

$$x^3 - y^3 = xy + 61$$

на множині натуральних чисел.

4. Вважатимемо, що число має властивість (k), якщо воно розкладається в добуток k послідовних натуральних чисел, більших від 1 (k — натуральне число).

Довести, що чисел, які одночасно мають властивості (2) і (4), не існує.

Вказівка. Досить часто під час розв'язування діофантових рівнянь доцільно виконати спочатку деякі тотожні перетворення, а потім проаналізувати ситуації, які виникнуть у результаті цих перетворень. При цьому часто доводиться міркувати методом від супротивного.

3. Розв'язання. Скористаємося тотожністю

$$x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y).$$

Позначивши $x - y = m$, $xy = n$, де $m \in N$, $n \in N$, дістанемо рівняння:

$$m^3 + 3mn - n = 61,$$

звідки

$$n = \frac{61 - m^3}{3m - 1}.$$

Оскільки $n \in N$, то $m^3 < 61$, а отже, можливими значеннями m будуть числа 1,2,3.

Перевіривши ці значення, дістанемо єдину пару натуральних чисел, які задовольняють рівняння (2): $m = 1$; $n = 30$.

Отже, маємо:

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 30, \end{cases} \text{ звідки } x = 6, \ y = 5.$$

Зробивши перевірку, переконуємося, що ці числа є розв'язками рівняння.

4. Р о з в ' я з а н н я. Припустимо супротивне. Нехай існують такі натуральні числа x і y, які одночасно мають властивості (2) і (4). Це означає, що рівняння

$$x(x+1) = y(y+1)(y+2)(y+3)$$

має розв'язок на множині натуральних чисел.

Виконаємо такі перетворення:

$$x^2 + x = (y^2 + 3y + 1 - 1)(y^2 + 3y + 1 + 1) = (y^2 + 3y + 1)^2 - 1,$$

$$x^2 + x + 1 = (y^2 + 3y + 1)^2, \ x \in N, \ y \in N.$$

Проте $x^2 < x^2 + x + 1 < (x+1)^2$, $x \in N$, а отже, вираз $x^2 + x + 1$ не може бути квадратом деякого натурального числа. Прийшли до суперечності. Отже, числа, які одночасно мають властивості (2) та (4), не існують.

5. Чи існують натуральні числа, які задовольняють рівняння

$$x^3 - x = 3y^2 + 1?$$

6. Чи має рівняння

$$x^2 + y^3 = z^4$$

розв'язки на множині простих чисел?

7. Довести, що рівняння

$$2^x + 7^y = 19^z$$

не має розв'язків на множині натуральних чисел.

8. Знайти всі цілі розв'язки рівняння

$$2^x + 1 = 3^y.$$

В к а з і в к а . Розв'язуючи задачі 4—8, доцільно порівнювати остачі правої і лівої частин рівнянь при діленні на деяке ціле число. Особливо корисно робити це тоді, коли треба довести, що рівняння не має розв'язків на деякій множині цілих чисел.

Доцільно також використовувати основні властивості конгруенцій (порівнянь), тобто порівнювати числа за деяким модулем.

Два цілих числа a, b називаються *конгруентними за модулем m*, якщо їх остачі від ділення на число m рівні між собою. Очевидно, що два числа a, b конгруентні за модулем m тоді і тільки тоді, коли їх різниці діляться на m. Записують це так:

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

5. Р о з в ' я з а н н я. Ліва частина рівняння як добуток трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 3. Права частина — число, яке дає в остачі при діленні на 3 одиницю. Рівняння не має розв'язків серед натуральних чисел.

6. Р о з в ' я з а н н я . Якщо рівняння має розв'язок, то одне з чисел x, y, z має бути парним. Справді, припустивши, що всі ці числа непарні, дістанемо в лівій частині парне число, а в правій — непарне, тобто прийдемо до суперечності. Існує одне просте число, яке є парним. Це число 2. Далі, якщо рівняння має розв'язок, то одне з чисел x, y, z має бути кратним трьом. Припустимо, що це не так, а отже, числа можна подати у вигляді:

$$x = 3a \pm 1, \ y = 3b \pm 1, \ z = 3c \pm 1.$$

Тоді має справджуватися рівність:

$$(3a \pm 1)^2 + (3b \pm 1)^3 = (3c \pm 1)^4,$$

у лівій частині якої числа виду $3K+2$, $3M$, а у правій — числа виду $3N+1$, тобто при діленні на 3 ліва частина дає в остачі 0 або 2, а права 1. Дістали суперечність. Отже, принаймні одне з трьох чисел кратне 3. Проте єдиним простим числом, що ділиться на 3, є саме число 3. Таким чином, якщо рівняння має розв'язки в простих числах, то два з них це 2 і 3. Залишається переконатися, що третє число при цьому не може бути навіть цілим.

Зауважимо, що рівняння 6 можна розв'язати так само, як рівняння 1 і 2, записавши його у вигляді:

$$y^3 = (z^2 - x)(z^2 + x).$$

7. Р о з в ' я з а н н я. Використаємо модуль 3:

$$19 \equiv 1 \pmod 3, \text{ звідки } 19^z \equiv 1 \pmod 3.$$

Крім того,

$$\left.\begin{array}{l} 2^x \equiv (-1)^x \pmod 3 \\ 7^y \equiv 1 \pmod 3 \end{array}\right\}, \text{ отже, } 2^x + 7^y \equiv 1 + (-1)^x \pmod 3,$$

$$2^x + 7^y \equiv 2 \pmod 3, \quad x = 2k, \ k \in N,$$
$$2^x + 7^y \equiv 0 \pmod 3, \quad x = 2k+1, \ k \in N.$$

Оскільки $2^x + 7^y \not\equiv 19^z \pmod 3$, то рівняння не має розв'язків на множині N.

8. Р о з в ' я з а н н я. Зауважимо, що $x > 0$, $y > 0$. (Доведіть.)

Очевидно, що $x = 1$, $y = 1$ — розв'язок рівняння. При $x > 1 2^x + 1 \equiv 1 \pmod 4$. Отже, y є парним числом. Справді, якби y було числом непарним, то виконувалось би співвідношення

$$3^y \equiv 3 \pmod 4$$

і рівність $2^x + 1 = 3^y$ була б неможливою.

Позначивши $y = 2k$, $k \in N$, перепишемо рівняння в такому вигляді:

$$2^x = (3^k - 1)(3^k + 1).$$

Оскільки права частина має бути степенем числа 2, то $k = 1$. Отже, знаходимо ще один розв'язок: $x = 3$, $y = 2$; інших розв'язків не існує.

9. Чи існують натуральні числа, які задовольняють рівняння:

$$x^2 + x - 1 = 3^{2y+1}?$$

В к а з і в к а. Порівняємо останні цифри, які можуть бути в запису чисел лівої та правої частин рівняння.

Р о з в ' я з а н н я. Легко переконатися, що останніми цифрами в запису числа $N_1 = x^2 + x - 1$ можуть бути лише цифри 1, 5, 9, а останньою цифрою числа $N_2 = 3^{2y+1}$ є 3 або 7. Отже, $N_1 \neq N_2$. Рівняння не має розв'язку на множині натуральних чисел.

10. Знайти всі цілі числа, які задовольняють рівняння

$$7(x + z + xyz) = 10(1 + yz).$$

В к а з і в к а. Використаємо запис раціональних чисел у вигляді так званих *ланцюгових*, або *неперервних, дробів*, що являють собою вирази виду

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2} + \ddots + \cfrac{1}{a_n} \ddots}$$

де a_0 — будь-яке ціле число (не обов'язково додатне), $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — натуральні числа.

Кожне раціональне число можна подати у вигляді скінченного, а ірраціональне — у вигляді нескінченного ланцюгового дробу.

Р о з в ' я з а н н я. Перепишемо рівняння у вигляді:

$$x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}} = \frac{10}{7}.$$

Запишемо раціональне число $\frac{10}{7}$ у вигляді ланцюгового дробу:

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}.$$

Маємо: $x = 1$; $y = 2$; $z = 3$. Числа 1, 2, 3 називають ланками ланцюгового дробу.

Оскільки дріб $\frac{10}{7}$ можна записати ще й так:

$$\frac{10}{7} = 2 - \frac{4}{7} = 2 + \cfrac{1}{-2 + \cfrac{1}{4}},$$

то

$$x = 2;\quad y = -2;\quad z = 4.$$

Перевіркою переконуємося, що трійки чисел (1,2,3), (2, — 2, 4) задовольняють рівняння.

Інших зображень звичайного дробу $\frac{10}{7}$ у вигляді ланцюгового, який містить у своєму складі три ланки, не існує.

11. Знайти такі цифри x і y, щоб справджувалася рівність

$$\overline{xxyy} = (\overline{xx})^2 + (\overline{yy})^2.$$

В к а з і в к а . Якщо в задачі йдеться про багатоцифрове число і нас цікавлять окремі його цифри або числа, записані кількома цифрами, що стоять поруч, то доцільно використати одне з таких зображень даного числа в десятковій системі:

$$\overline{x_n x_{n-1} \ldots x_1 x_0} = \begin{cases} x_n \cdot 10^n + x_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + x_1 \cdot 10 + x_0, \\ \overline{x_n x_{n-1} \ldots x_1} \cdot 10 + x_0, \\ \overline{x_n x_{n-1} \ldots x_2} \cdot 100 + \overline{x_1 x_0}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_n \cdot 10^n + \overline{x_{n-1} x_{n-2} \ldots x_0}. \end{cases}$$

При цьому задача зводиться, по суті, до розв'язування невизначеного рівняння на множині $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Р о з в ' я з а н н я . Оскільки

$$\overline{xxyy} = x \cdot 10^3 + x \cdot 10^2 + y \cdot 10 + y = 1100x + 11y,\ \overline{xx} = 10x + x = 11x,\quad \overline{yy} = 11y,$$

то

$$11\,(99x + x + y) = 121\ (x^2 + y^2). \qquad (1)$$

Права частина ділиться на 121, тому й у лівій має бути число, кратне 121. Але тоді число $x + y$ ділитиметься на 11, звідки приходимо до висновку, що

$$x + y = 11. \qquad (2)$$

Тоді рівняння (1) набирає вигляду:

$$9x + 1 = x^2 + y^2,\ (1 \leqslant x \leqslant 9,\ 1 \leqslant y \leqslant 9). \qquad (3)$$

З рівнянь (2) і (3) перебором знаходимо, що $x = 8$; $y = 3$.

12. Довести, що рівняння

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz \qquad (1)$$

не має розв'язків на множині натуральних чисел.

В к а з і в к а . Застосуємо *метод нескінченного спуску*, в основу якого покладено процес побудови нескінченно спадної послідовності цілих додатних чисел. Оскільки спадна послідовність цілих додатних чисел має лише скінченне число членів, то приходимо до суперечності.

Р о з в ' я з а н н я . Нехай існують натуральні числа x, y, z, які задовольняють рівняння (1). Права частина рівняння ділиться на 2, отже, і ліва частина ділиться на 2. Це можливо лише тоді, коли або x, y, z — парні числа або коли одне з них парне, а інші непарні. В останньому випадку права частина рівняння (1) ділиться на 4, а ліва — лише на 2. Отже, числа x, y, z парні:

$$x = 2x_1,\ y = 2y_1,\ z = 2z_1. \qquad (2)$$

Підставляючи знайдені значення x, y, z у рівняння (1), дістанемо: $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1y_1z_1$.

Застосувавши до рівняння (3) ті самі міркування, що й при розгляді рівняння (1), дістанемо:

$$x_1 = 2x_2, \ y_1 = 2y_2, \ z_1 = 2z_2;$$
$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 8x_2y_2z_2.$$

Співвідношення $x_k = 2x_{k+1}$ дають можливість побудувати нескінченно спадну послідовність:

$$x > x_1 > x_2 > \ldots > x_k > x_{k+1} > \ldots > 0.$$

Проте така послідовність натуральних чисел має бути скінченною.

13. Довести, що рівняння:

$$1)\ x^2 + y^2 = z^2;$$
$$2)\ x^3 + y^3 + z^3 = 2t^3$$

мають нескінченну множину цілих розв'язків.

Вказівка. При доведенні нескінченності множини цілих розв'язків невизначених рівнянь ефективним засобом є метод параметризації, який полягає в тому, що невідомі x, y ... подаються у вигляді функцій, залежних від цілочислових параметрів $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$; $x = A(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)$, $y = B \times \times (\alpha, \beta, \ldots, \gamma), \ldots, z = C(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)$, де A, B, ..., C — многочлени із цілими коефіцієнтами. Зауважимо, що метод параметризації не алгоритмічний. Тому його застосування вимагає кмітливості та винахідливості.

Розв'язання. 1) Узявши до уваги рівність

$$3^2 + 4^2 = 5^2,$$

переконуємося в тому, що рівняння має нескінченну множину цілих розв'язків виду

$x = 3\alpha$, $y = 4\alpha$, $z = 5\alpha$, де α — довільне ціле число.

2) Покладемо $x = a + b$, $y = a - b$; $a \in Z$, $b \in Z$.

Тоді матимемо:

$$2a^3 + 6ab^2 + z^3 = 2t^3.$$

Нехай $t = a$, а отже, $z^3 = -6ab^2$, звідки $a = -\alpha$, $b = 6\alpha$, $\alpha \in Z$. Остаточно дістаємо:
$x = 5\alpha$, $y = -7\alpha$, $z = 6\alpha$, $t = -\alpha$, де α — довільне ціле число.

15. У шаховому турнірі беруть участь лише майстри і гросмейстери, причому майстрів втричі більше, ніж гросмейстерів. Будь-які два учасники мають зіграти між собою лише по одній партії. У разі виграшу присуджується одне очко, у разі нічиєї — 1/2 очка, а якщо ж поразка — 0. Майстри в підсумку набрали очок в 1,2 раза більше, ніж гросмейстери. Скільки було майстрів і скільки гросмейстерів?

Вказівка. У цьому разі маємо задачу, розв'язування якої зводиться до знаходження коренів невизначеного рівняння в натуральних числах.

Розв'язання. Позначимо через x кількість гросмейстерів, а через y — кількість партій, які виграли майстри у гросмейстерів

$$x \in N, \ y \in N.$$

Тоді кількість очок, які здобули майстри, дорівнює:

$$\frac{3x(3x-1)}{2} + y,$$

а кількість очок, які здобули гросмейстери, дорівнює:

$$\frac{x(x-1)}{2} + 3x^2 - y,$$

причому $y \leqslant 3x^2$, оскільки кожний з x гросмейстерів зіграв партію з кожним з $3x$ майстрів.

За умовою:

$$\frac{\frac{3x(3x-1)}{2} + y}{\frac{x(x-1)}{2} + 3x^2 - y} = \frac{6}{5},$$

звідки

$$3x\,(3-x)=22\,y.$$

На основі цього рівняння робимо висновок, що $x \leqslant 3$, тобто можливі значення: $x=1$; $x=2$; $x=3$. Виконавши перевірку, остаточно маємо: $x=3$, $y=0$. Це означає, що гросмейстери виграли всі партії у майстрів.

Отже, в турнірі брали участь 3 гросмейстери і 9 майстрів.

Вправи.

1. 1) Знайти всі розв'язки рівнянь на множині цілих чисел:

а) $x^3+y^3=35$;
б) $x\,(x+1)\,(x^2+x+2)=2y^2$;
в) $17\,(xyzt+xy+xt+zt+1)=54\,(yzt+y+t)$.

2) Знайти трицифрове ціле число, яке в 12 раз більше від суми своїх цифр.

2. Знайти всі прості числа x, y, які задовольняють рівняння $x^2-2y^2=1$.

3. Довести, що рівняння не мають розв'язків на множині натуральних чисел:

1) $x^2=2y^2$;
2) $7(x^2+y^2)=z^2+t^2$;
3) $x^4+5x^2+13=y^4$.

4. Довести, що рівняння $x^3+y^3=9z+4$ не має розв'язків у цілих числах.

5. Довести, що не існують цілі числа x, y, z, які не дорівнюють нулю і задовольняють рівність $x^2+y^2=3z^2$.

6. Довести, що множина цілих розв'язків рівнянь є нескінченною:

1) $x^3+y^3+z^3=2$;
2) $x^4+y^6+z^{12}=t^4$.

7. Групу туристів вирішили розмістити в автобусах так, щоб в кожному була однакова кількість пасажирів. Спочатку саджали по 22 чоловіка, але при цьому не знайшлося місця одному туристові. Після того як один з автобусів від'їхав порожнім, всі туристи розмістилися порівну в автобусах, що залишилися. Скільки спочатку було автобусів і скільки туристів у групі, коли відомо, що кожний автобус розрахований не більше як на 32 чоловіка?

8. Чемпіонат країни з футболу проходить в два кола. Після закінчення чемпіонату виявилося, що команди набрали очки в арифметичній прогресії і остання команда має 17 очок. Скільки команд брало участь у чемпіонаті?

9. У тенісному турнірі брало участь n жінок і $2n$ чоловіків. Кожний учасник турніру провів по одній зустрічі з кожним іншим учасником. Відомо, що відношення кількості перемог, здобутих жінками, до кількості перемог, здобутих чоловіками (нічиїх не буває) дорівнює $\frac{7}{5}$. Знайти n.

Список використаної та рекомендованої літератури

1. Гельфонд А. О. Решение уравнений в целых числах. 4-е изд. М., Наука, 1983. 63 с.
2. Цыпкин А. Г. Справочник по математике для средней школы. М., Наука, 1980, с. 127—128.

Учням IX—X класів

М. Я. ЛЯЩЕНКО, І. Ф. СЛЄДЗІНСЬКИЙ

ПРОГРАМУВАННЯ — ДРУГА ГРАМОТНІСТЬ

Математизація науки, застосування електронно-обчислювальних машин (ЕОМ) та мікропроцесорної техніки в період розвинутого соціалізму й науково-технічної революції обумовлюють якісні зміни в характері праці, зокрема необхідність для кожного члена нашого суспільства оволодіти програмуванням — засобом спілкування з ЕОМ. Першим кроком на цьому шляху може бути знайомство з програмованими електронними клавішними обчислювальними машинами (ЕКОМ) або електронними мікрокалькуляторами, які складаються з тих самих основних блоків і працюють за тими самими принципами, що й сучасні ЕОМ. Втілюючи основні функціональні особливості електронних обчислювальних машин, ЕКОМ вигідно відрізняються від них простотою обслуговування, доступністю і компактністю.

Найпоширеніші моделі програмованих ЕКОМ у нашій країні — «Електроніка БЗ-21» та її модифікація «Електроніка БЗ-34», роботі з якою і присвячено цю статтю. «Електроніку БЗ-34» використовують під час розв'язування наукових, технічних, економічних, навчальних та інших задач. Вона точно й швидко виконує потрібні обчислення за наперед складеними і введеними в її пам'ять програмами.

1. Будова ЕКОМ

Як і сучасна ЕОМ, «Електроніка Б3-34» має пристрої введення і виведення інформації, арифметичний пристрій, пристрій керування, запам'ятовуючий пристрій і блок живлення.

1.1. Пристрій введення інформації. Уведення інформації (чисел, операцій і команд) в ЕКОМ здійснюється за допомогою клавішного пристрою (мал. 1). Клавіатура має 30 клавіш. Особливістю машини є те, що кожний клавіш, крім так званих клавіш суміщених функцій F і K, використовується для виконання двох і навіть (п'ять клавіш нижнього ряду) трьох операцій. Один символ операцій зображено безпосередньо на клавіші, другий — над клавішем, а третій — під клавішем. Для виконання операції, символ якої нанесено на клавіш, достатньо натиснути на нього. А щоб обчислити значення функції, символ якої нанесено над клавішем, треба попередньо натиснути клавіш суміщеної функції F.

За функціональним призначенням клавіші поділяються на:

1) *клавіші введення числової інформації*: **0, 1, 2, 3, ..., 9, ,** (кома), /—/ (зміни знака числа або порядку числа), **ВП**;

2) *операційні клавіші для виконання арифметичних дій*: + (плюс), — (мінус), × (множення), ÷ (ділення);

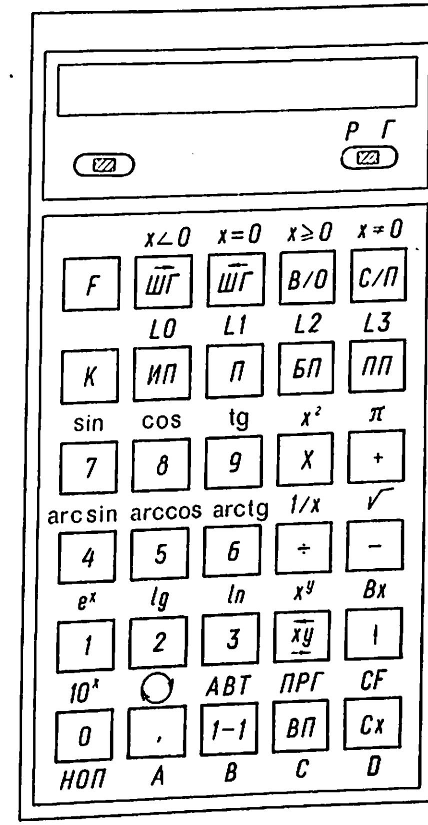
3) *клавіші для обчислення значень елементарних функцій*: **sin, cos, tg, arcsin, arccos, arctg,** e^x, x^y, **lg, ln,** 10^x, x^2, $\sqrt{}$, $1/x$, π;

4) *клавіші задання режиму роботи*: **АВТ** (автоматична робота), **ПРГ** (програмування);

5) *клавіші керування регістрами пам'яті*: **П** — записування числа в регістр, **ИП** — зчитування числа з регістра, **Сх** — стирання вмісту регістра **X** (індикатора);

6) *клавіші програмного керування*: **ПП** — переходу до підпрограми; **В/О** — повернення з підпрограми; **БП** — безумовного переходу і переходу за однієї з умов: $x<0$, $x=0$, $x\geqslant 0$, $x\neq 0$;

7) *клавіш для запуску і зупинки машини*—**С/П**.

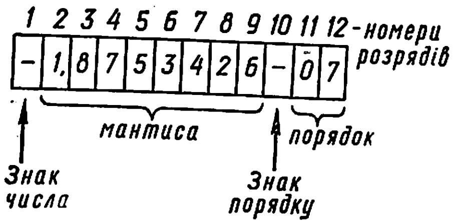


Мал. 1

1.2. Оперативний запам'ятовуючий пристрій (ОЗП) є складовою частиною арифметично-розв'язуючого пристрою і містить регістр X (позначатимемо його РХ), який ще називають *регістром індикатора* (РІ), регістр У (РУ) або *робочий регістр* (РР) і 14 адресованих регістрів, адреси яких 0, 1, 2, ... , 9, A, B, C, D. Позначатимемо їх Р0, Р1, ..., Р9, РА, РВ, РС, PD.

Числа, які набираються на клавіатурі, надходять спочатку в РХ. У регістр У числа надходять з РХ, коли натиснути клавіш *занесення* ↑ або клавіш *обміну* $\overrightarrow{XY}$ *інформацією* між регістрами X та У. У регістрі У число зберігається до введення наступного або до виконання двомісної операції.

1.3. Адресовані регістри використовуються для зберігання початкових або проміжних даних, які потрібні для наступних обчислень. Число, що зберігається в адресованому



Мал. 2

регістрі з номером (адресою) n, можна надіслати (записати) в регістр X, натиснувши клавіші **ИП** («з пам'яті») і **n**, де n = 0,1, 2, ..., 9, A, B, C, D. При цьому попередній вміст регістра X переписується у регістр У. Якщо, наприклад, у регістрі P7 записано число — 38,5, а в регістрі X — число 0,783, то після натискування клавіш **ИП7** у регістрах P7 і PX буде число — 38,5, а в робочому регістрі У — число 0,783, записане в такому вигляді: 7,83 —01. Щоб записати число в адресований регістр n, треба спочатку надіслати це число в регістр X, а після цього в Pn, натиснувши для цього клавіші **П** («пам'ять») і **n**.

1.4. Програмна пам'ять. Крім операційних і адресованих регістрів, ЕКОМ має ще програмну пам'ять, яка складається з 98 комірок. Кожна комірка має певний двоцифровий десятковий номер від 00 до 97 включно, який називається її *адресою. У кожну комірку можна записати лише одну команду, якій відповідає певний код*. Наприклад, арифметичним операціям відповідають такі коди: додаванню — 10, відніманню — 11, множенню 12, діленню — 13.

Інструкція щодо експлуатації «Електроніки Б3-34» містить таблицю, у якій подано коди всіх команд цієї ЕКОМ. Зауважимо, проте, що ці коди застосовуються лише тоді, коли виникає потреба прочитати записану в машину програму. Тому в програмах цієї статті коди команд не наводяться (крім мал. 3, де зазначено коди таких команд: **Fπ** — 20, **F√** — 21, **F sin** — 1[, **С/П**—50).

1.5. Індикатор. Індикаторний пристрій видає обчислювачеві інформацію про те, що в даний момент зберігається в регістрі *X*. Індикатор (мал. 2) має 12 розрядів і використовується для контролю за введенням інформації в ЕКОМ, а також для зчитування результатів обчислень.

Числа в машину можна вводити як у *звичайній формі*, так і у *формі з плаваючою комою*. У звичайній формі можна вводити *n*-цифрові десяткові числа (де $n \leqslant 8$). Наприклад, для введення числа — 347,528 треба натиснути клавіші в такій послідовності: **3 4 7, 5 2 8 /—/**.

Будь-яке число можна подати і в стандартній формі виду $m \cdot 10^p$, де *m — мантиса числа* $1 \leqslant m < 10$, а *p — його порядок*. Тому в ЕКОМ можна вводити числа і в режимі з плаваючою комою. Розподіл розрядів індикаторного регістра між мантисою і порядком подано на малюнку 2.

Приклад.	Розв'язання.
Увести числа:	Натиснути клавіші в такій послідовності:
$38925000000 = 3{,}8925 \cdot 10^{10}$	**3, 8 9 2 5 ВП 1 0**
$9{,}75 = 9{,}75 \cdot 10^{00}$	**9, 7 5 ВП 0 0 4,**
$0{,}00427 = 4{,}27 \cdot 10^{-3}$	**27 ВП 03/—/**

Уведене в регістр X число автоматично висвітлюється на табло індикатора. Якщо число набрано неправильно, його треба стерти, натиснувши клавіш **Сх**. При надсиланні числа з регістра X у регістр У машина автоматично подає це число в стандартній формі. Якщо в регістрі X міститься число 0,0001, то після натискування клавіша ↑ як у регістрі X, так і в регістрі У міститиметься число 1.—04.

1.6. Арифметично-розв'язуючий пристрій (АРП) у режимі «Автоматична робота» (який після включення машини встановлюється автоматично) виконує одномісні й двомісні операції або ж програму обчислень (яка записана в програмну пам'ять машини).

2. Виконання обчислень

2.1. Одномісн. операції — це операції обчислення значень елементарних функцій (крім функції x^y). При обчисленні значень елементарних функцій слід враховувати допустимі значення аргументу і максимальну відносну похибку. Для того щоб обчислити значення будь-якої функції, треба спочатку в регістр X увести значення аргументу x, а потім натиснути послідовно клавіші **F** і відповідної функції.

Приклади.

1.

Обчислити	Послідовність натискування клавіш (програма дій)	Результат
lg 62,739	6 2 , 7 3 9 F lg	1,7975375
π	Fπ	3,1415926
$10^{-8,53}$	8 , 5 3 (—) F 10^x	2,9512088—09
$e^{13,98}$	1 3 , 9 8 F e^x	1178791,1

Обчислюючи значення тригонометричних функцій, слід враховувати, як задано аргумент (у радіанах чи градусах), і поставити у відповідне положення перемикач Р—Г—«радіани—градуси».

2.

Обчислити	Перемикач «Р—Г» в положення	Послідовність натискування клавіш (програма дій)	Результат
sin (—42,75)	Р	4 2 , 7 5 /—/ F sin	0,94325389
cos 17,5°	Г	1 7 , 5 F cos	0,95371698
arcsin (—0,375)	Р	0 , 3 7 5 /—/ F arcsin	—0,3843968

Отже, числове значення функції, аргумент якої міститься в регістрі X, також записується в регістр X і його можна прочитати на індикаторі (аргумент при цьому автоматично записується в регістр попереднього результату X1. Щоб записати його в регістр *X*, достатньо натиснути клавіші **F** і **Вх**).

При обчисленні значень елементарних функцій, крім функцій x^y, регістр У не використовується (інформація в регістрі У залишається незмінною).

2.2. Двомісні операції — це операції, які виконуються над двома операндами (числами), один з яких міститься в регістрі У, а другий — у регістрі X. Для їх реалізації використовується так званий «інверсний» запис: $ab\ast$, де a і b — операнди, а $\ast$ — позначення будь-якої арифметичної операції. Операцію $a \ast b = c$ виконують так: а) вводять перший операнд a в регістр X; б) натискуванням клавіша ↑ число a записують в регістр У (і поки що зберігають й у регістрі X); в) у регістр X вводять другий операнд b; г) натискують операційний клавіш $\ast$.

Машина виконує арифметичну операцію $\ast$ і результат c записує в регістр X, надсилаючи операнд b в регістр попереднього результату X1. Операнд a в регістрі У не зберігається. Після виконання двомісної операції в РУ записується вміст так званого *стекового регістра Z*.

Операції віднімання і ділення некомутативні, тому, виконуючи їх, треба стежити за тим, щоб зменшуване (ділене) завжди містилося в регістрі У, *а від'ємник (дільник) — у регістрі* X. Щоб поміняти їх місцями, можна скористатися клавішем $\overleftarrow{\underrightarrow{XУ}}$ обміну інформацією між регістрами X і У.

Приклад.

Операції	Послідовність натискування клавіш	Результат
125,73 + 297,346	1 2 5 , 7 3 ↑ 2 9 7 , 3 4 6 +	423,076
78,547 — 348,793	7 8 , 5 4 7 ↑ 3 4 8 , 7 9 3 —	—270,246
$0,75 \cdot 10^{-12} \cdot 63,2 \cdot 10^8$	0, 7 5 ВП 1 2 /—/ ↑ 6 , 32 ВП 09 ×	0,000474
853,247 : 75,34	8 5 3 , 2 4 7 ↑ 7 5 , 3 4	11,325285

Значення виразу $8,25^{-0,47}$ обчислюється за такою програмою: **0,47 /—/ ↑ 8, 25F X^У**. Відповідь. 0, 37090837.

Зауважимо, що при обчисленні значення функції x^y показник y спочатку записується в регістр У, а потім основа x надсилається в регістр X.

2.3. Ланцюгові обчислення. Результат виконання двомісних арифметичних операцій міститься в регістрі X. Якщо після виконання двомісної операції в ЕКОМ за допомогою цифрових клавіш увести нове число, воно запишеться в регістр X, а результат попередньої дії автоматично перепишеться перед цим у регістр У. Це дає змогу виконувати так звані *ланцюгові* обчислення, при яких результат попередньої операції є одним з операндів для виконання наступної двомісної операції.

Приклад.

Обчислити об'єм циліндра $V = \pi R^2 H$, якщо $R = 5{,}3$ дм; $H = 16{,}4$ дм.

Запишемо процес розв'язування задачі у вигляді таблиці 1.

Таблиця 1

№ операції	Операція	Програма дій	Вміст регістрів	
			X	У
1	Надіслати в регістр X константу π	Fπ	3,1415926	
2	Надіслати число R в регістр X	5 , 3	5,3	3,1415926
3	Обчислити R^2	Fx^2	28,09	3,1413926
4	Обчислити πR^2	×	88,247336	0
5	Надіслати число H у регістр X	1 6 , 2	16,2	88,247336
6	Обчислити об'єм у дм^3	×	1429,6068	0

У третьому стовпці цієї таблиці дається вказівка, які клавіші і в якому порядку треба натиснути, щоб розв'язати

задачу обчислення об'єму циліндра. Цю послідовність символів і називатимемо *програмою* обчислення об'єму циліндра, а послідовність символів кожного окремого рядка називатимемо *командою* ЕКОМ. Отже, щоб обчислити на ЕКОМ об'єм циліндра, треба виконати шість команд. Числове значення об'єму можна прочитати на індикаторі. Ця програма розв'язує не одну, а цілий клас задач, які різняться між собою значеннями R і H, що надсилаються в регістр X командами 2 і 5.

3. Реалізація програм

Якщо в прикладі 3 значення R і H попередньо записати в адресовані регістри, наприклад R — у регістр Р0, а H — у регістр Р1, то програму обчислення об'єму циліндра можна подати у вигляді такої послідовності команд.

Номер команди	Команда	Пояснення
0	Fπ	$\pi \to$ РX
1	ИП0	$R \to$ РX, $\pi \to$ РУ
2	Fx^2	$R^2 \to$ РX
3	×	$\pi R^2 \to$ РX
4	ИП1	$H \to$ РX, $\pi R^2 \to$ РУ
5	×	$\pi R^2 H \to R$X

А виконання цієї програми вже можна доручити самій ЕКОМ, якщо попередньо записати її в комірки програмної пам'яті і доповнити обов'язкоео командою **С/П** зупинки машини після обчислення шуканого об'єму.

Розв'язування обчислювальних задач на ЕКОМ складається з таких етапів: в) *програмування задачі;* б) *уведення програми в програмну пам'ять* ЕКОМ; в) *налагодження програми;* г) *уведення вхідних даних в адресовані й оперативні регістри ЕКОМ і автоматичне виконання програми.*

Номери розрядів												Введені команди
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
										0	0	В/О F ПРГ
	2	0								0	1	F π
	2	1		2	0					0	2	F $\sqrt{}$
	1	[		2	1		2	0		0	3	F sin
	5	0		1	[		2	1		0	4	С/П

Мал. 3

Щоб зрозуміти ідеї програмування, потрібно знати, як записують програму (послідовність команд) у програмну пам'ять ЕКОМ.

3.1. Запис програми у програмну пам'ять машини. Для цього спочатку переводять ЕКОМ у режим «Програмування», послідовно натискуючи клавіші **В/О F ПРГ.** Після виконання цих операцій у двох крайніх справа розрядах індикатора висвітлюються два нулі, і програма записується в програмну пам'ять машини, починаючи з комірки, адреса якої 00.

Якщо ж програму треба ввести, починаючи з комірки, адреса якої n (де $0 < n < 97$), то спочатку (в режимі «Автоматична робота») задають цю адресу, натискуючи клавіші **БП n** (безумовний перехід на команду з адресою n), а потім переходять у режим «Програмування», натискуючи клавіші **F** і **ПРГ.** У цьому разі в двох крайніх правих розрядах індикатора висвітлюється адреса комірки n. Після цього вводять програму, натискуючи клавіші в тій послідовності, в якій вони записані в програмі.

У режимі «Програмування» індикатор використовують для візуального контролю за правильністю введення програми. На індикаторі зображаються коди введених останніми трьох послідовних команд програми й адреса комірки, в яку вводиться наступна команда.

Наприклад, на малюнку 3 зображено покази індикатора при введенні в програмну пам'ять ЕКОМ програми обчислення значення $\sin\sqrt{\pi}$. Сама програма, яку записано в послідовні комірки програмної пам'яті, починаючи з комірки, адреса якої 00, має такий вигляд:

Адреса комірки	Команда	Пояснення
00	**Fπ**	$\pi \to PX$
01	**F$\sqrt{}$**	$\sqrt{\pi} \to PX$
02	**F sin**	$\sin\sqrt{\pi} \to PX$
03	**С/П**	Зупинка ЕКОМ

На малюнку 3 в першому рядку дано номери розрядів індикатора, а в усіх наступних — показання індикатора після введення таких команд: в другому — команд **В/О F ПРГ**; у третьому — команди **Fπ** (їй відповідає код 20), у четвертому — команди **F$\sqrt{}$** (її код 21), у п'ятому — команди **F sin** (її код 1[) і в шостому — команди **С/П** (її код 50).

З малюнка 3 видно, що при введенні кожної наступної команди в програмну пам'ять ЕКОМ коди раніше введених команд зсуваються вправо на три розряди і при цьому код, що був у 8 і 9-му розрядах, стирається, а на його місце переходить код, що був у 5 і 6-му розрядах індикатора. Отже, на індикаторі завжди маємо зображення кодів трьох команд, уведених у пам'ять останніми, і адреси комірки програмної пам'яті, в яку буде введено наступну команду програми.

3.2. Налагодження програми. Проводиться після введення в ЕКОМ програми і вхідних даних.

Налагодження — це пошук і виправлення помилок, якщо такі допущені при складанні або введенні програми в машину. Його проводять у режимі «Автоматична робота», виконуючи програму покомандно, починаючи з першої. Якщо програма записана в послідовні комірки пам'яті, починаючи з адреси 00, то достатньо натиснути клавіш **В/О**. Якщо ж програма розміщена в послідовних комірках, починаючи з адреси n, то треба (в режимі «Автоматична робота») виконати з клавіатури команду безумовного переходу до комірки з адресою n, натиснувши клавіші **БП n**.

Для покомандного виконання програми використовують клавіш *ПП*. При кожному натискуванні на нього в режимі «Автоматична робота» виконується одна команда програми.

Аналізуючи за допомогою індикатора покомандне виконання програми, знаходять помилку, якщо вона є.

Для виправлення помилки треба перейти на адресу помилкової команди. Цей перехід здійснюється в режимі «Програмування» за допомогою клавіш покомандного переходу. При натискуванні клавіша $\overrightarrow{\textbf{ШГ}}$ відбувається перехід до наступної по порядку, а клавіша $\overleftarrow{\textbf{ШГ}}$ — до попередньої команди програми. Звичайно, на потрібну команду можна перейти, виконавши на клавіатурі в режимі «Автоматична робота» команду **БП** n, де n — адреса помилкової команди.

Відшукавши адресу помилкової команди, її виправляють, надсилаючи з клавіатури правильну команду в режимі «Програмування».

Якщо яка-небудь з уведених команд програми виявилася зайвою, то її вилучають, натискуючи на клавіатурі клавіші **F НОП** («немає операції»).

3.3. Уведення вхідних даних і автоматичне виконання програм. Числові дані вводять в адресовані регістри 0—9, A, B, C,D так, як це було зазначено на початку статті. Якщо, наприклад, у Р7 треба ввести число — 57, 3872, то для цього треба натиснути такі клавіші: 57,3 8 7 2 /—/П7

Для автоматичного виконання програми переходять в режим «Автоматична робота» (він необхідний і для занесення вхідних даних в адресові регістри) і, задавши номер (адресу) першої команди, натискують клавішу **С/П** (пуск).

4. Складання програм і їх виконання

Перед тим як перейти до розгляду конкретних програм, зауважимо, що програма витирається, якщо ввести нову програму або виключити ЕКОМ. Тому режим програмування доцільно використовувати тоді, коли обчислення за введеною програмою виконуються багаторазово.

4.1. Лінійні програми. Найпростіша — це лінійна програма, кожна команда якої виконується машиною в порядку її записування і лише один раз.

Приклад.

1. Скласти програму розв'язання системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1)$$

методом послідовного виключення змінних (методом Гаусса).

Припустивши, що $a_{11}\neq 0$, поділимо перше рівняння на a_{11}. Залишаючи друге рівняння без змін, матимемо:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 = \frac{b_1}{a_{11}}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \quad (2)$$

За допомогою першого рівняння системи (2) вилучимо змінну x_1 з другого рівняння. Для цього перше рівняння системи (2) домножимо на коефіцієнт a_{21} і віднімемо його від другого. Дістанемо:

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 = \frac{b_1}{a_{11}}, \quad (3)$$

$$0 + \left(a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}\right)x_2 = b_2 - \frac{a_{21}b_1}{a_{11}}.$$

З другого рівняння системи (3), якщо $a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} \neq 0$, знаходимо:

$$x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (4)$$

Підставивши це значення x_2 в перше рівняння системи (2), дістаємо:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (5)$$

З формул (4) і (5) видно, що система (1) має єдиний розв'язок, якщо $a_{11}a_{22} - a_{12}\,a_{21} \neq 0$.

Програму для обчислення розв'язку системи (1) за формулами (4) і (5) побудуємо в два етапи.

1-й етап: розподіл регістрів. У першому стовпці табл. 2 подано коефіцієнти і розв'язок системи (1), а в другому — ті адресовані регістри, в яких вони зберігаються.

Таблиця 2

a_{11}	Р3	b_1	Р7
a_{12}	Р4	b_2	Р8
a_{21}	Р5	x_1	Р1
a_{22}	Р6	x_2	РХ (на індикаторі)

2-й етап: власне програмування. Програму розв'язання певного класу задач на ЕКОМ подаватимемо у вигляді таблиці з трьома стовпцями: *адреси команд, команди і пояснення до них.*

Для більшої компактності запису програми в поясненнях використовуватимемо такі умовні позначення: $a \to$ РХ — *число a записується в операційний регістр* Х; $b \to$ Р У— *число b записується в операційний регістр* У; $c \to$ Рα — *число C записується в адресований регістр з адресою* (індексом) α ($\alpha = 0, 1, \ldots, 9$, A, B, C, *D*).

Програму розв'язання лінійної системи рівнянь (1) подано в таблиці 3.

Після введення цієї програми в програмну пам'ять ЕКОМ, нею можна скористатися для розв'язання будь-якої лінійної системи рівнянь 2-го порядку, визначник якої не дорівнює нулю. Для цього треба лише коефіцієнти системи надіслати в адресовані регістри відповідно до табл. 2.

Наприклад, для розв'язання системи

$$\begin{cases} 3x_1 + 2{,}5x_2 = 6, \\ 1{,}75x_1 - 4{,}3x_2 = 13{,}865 \end{cases}$$

за цією програмою треба виконати таку послідовність дій:

1) перевести машину в режим «Програмування», натиснувши послідовно клавіші: **В/О F ПРГ;**

Таблиця 3

Адреса команди	Команди	Пояснення	Адреса команди	Команда	Пояснення
00	ИП 4	$a_{12} \to$ РХ	23	ИП5	$b_1 \to$ РУ, $a_{21} \to$ РХ
01	ИП 5	$a_{12} \to$ РУ, $a_{21} \to$ РХ	24	×	$b_1a_{21} \to$ РХ
02	×	$a_{12}a_{21} \to$ РХ	25	П9	$b_1a_{21} \to$ Р9
03	П 2	$a_{12}a_2 \to$ П2	26	ИП8	$b_2 \to$ РХ
04	ИП 3	$a_{11} \to$ РХ	27	ИП3	$b_2 \to$ РУ, $a_{11} \to$ РХ
05	ИП 6	$a_{11} \to$ РУ, $a_{22} \to$ РХ	28	×	$b_2a_{11} \to$ РХ
06	×	$a_{11}a_{22} \to$ РХ	29	ИП9	$b_2a_{11} \to$ РУ, $b_1a_{21} \to$ РХ
07	ИП 2	$a_{11}a_{22} \to$ РУ, $a_{12}a_{21} \to$ РХ	30	—	$b_2a_{11} - b_1a_{21} = \Delta_2 \to$ РХ
08	—	$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \Delta \to$ РХ	31	ИП2	$\Delta_2 \to$ РУ, $\Delta \to$ РХ
09	П2	$\Delta \to$ Р2	32	÷	$x_2 \to$ РХ
10	ИП8	$b_2 \to$ РХ	33	С/П	Зупинка. x_2 — висвітлюється на індикаторі.
11	ИП4	$b_2 \to$ РУ, $a_{12} \to$ РХ			
12	×	$b_2a_{12} \to$ РХ			
13	П9	$b_2a_{12} \to$ Р9			
14	ИП7	$b_1 \to$ РХ			
15	ИП6	$b_1 \to$ РУ, $a_{22} \to$ РХ			
16	×	$b_1a_{22} \to$ РХ			
17	ИП9	$b_1a_{22} \to$ РУ, $b_2a_{12} \to$ РХ			
18	—	$b_1a_{22} - b_2a_{12} = \Delta_1 \to$ РХ			
19	ИП2	$\Delta_1 \to$ РУ, $\Delta \to$ РХ			
20	÷	$x_1 \to$ РХ			
21	П1	$x_1 \to$ Р1			
22	ИП7	$b_1 \to$ РХ			

2) увести програму, натискуючи клавіші в тій послідовності, як вони записані в табл. 3;

3) перевести машину в режим «Автоматична робота», натиснувши клавіші **F АВТ;**

4) записати в адресні регістри коефіцієнти системи відповідно до табл. 2 розподілу регістрів, виконавши з пульта такі команди: **3 П 3; 2, 5 П 4; 1,75 П 5; 4, 3/—/ П 6; 6 П 7; 1 3, 8 6 5 П 8;**

5) натиснути клавіш **В/О** для переведення лічильника команд у положення 00;

6) натиснути клавіш **С/П.**

Зазначену послідовність дій називатимемо інструкцією до використання програми.

Після зупинки машини на індикаторі прочитаємо $x_2 = -1{,}8$. Натиснувши клавіші **ИП 1**, на індикаторі прочитаємо числове значення змінної $x_1 = -3{,}5$. Для розв'язання іншої системи 2-го порядку треба виконати пункти 4—6 цієї інструкції.

Вправи

1. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_1 - 3{,}2x_2 = 53{,}6, \\ 2{,}7x_1 + 9{,}3x_2 = 125{,}439. \end{cases}$$

Відповідь. $x_1 = 16{,}32$; $x_2 = 8{,}75$.

2. Складіть програму і виконайте обчислення для $x = 0{,}7$ за формулою

$$\cos x \approx -\left(\left(\frac{x^2}{30} + 1\right)^{-1} \cdot 5 - 3\right)\frac{x^2}{4} + 1; \ \left(0 < x < \frac{\pi}{4}\right).$$

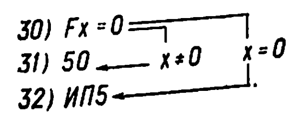
Відповідь. 0,7648434.

4.2. Розгалужені програми. Програми, у яких певні команди не виконуються при розв'язуванні деякої конкретної задачі, що належить певному класу задач, але виконуються при розв'язуванні іншої конкретної задачі цього самого класу, називаються *програмами з розгалуженням*, або *розгалуженими програмами*.

За допомогою *команди безумовного переходу* звичайний порядок виконання команд програми завжди припиняється і наступною виконується команда, адреса якої подана в наступній комірці програмної пам'яті ЕКОМ. Реалізується ця команда клавішем **БП** («безумовний перехід»), після якої в наступній комірці програмної пам'яті вказується адреса тієї команди, до виконання якої треба перейти. Якщо, наприклад, після виконання команди з адресою 40 треба перейти до виконання команди з адресою 75, то цей перехід реалізується командами: 41) **БП** 42) 75

Умовний перехід в ЕКОМ здійснюється двома командами: формулою умови, яка набирається з префіксним клавішем F, і зазначенням адреси переходу. Формули умови мають такий вигляд: $x < 0$; $x = 0$; $x \geqslant 0$; $x \neq 0$, де під x розуміють вміст регістра X. Якщо умова переходу не виконується, то наступною в програмі виконуватиметься команда, адресу якої подано безпосередньо за командою умовного переходу. Якщо ж умова переходу виконується, то наступною в програмі виконуватиметься команда, яку записано після адреси переходу, тобто адреса переходу при цьому ігнорується.

Нехай, наприклад, у деякій програмі записано команди:

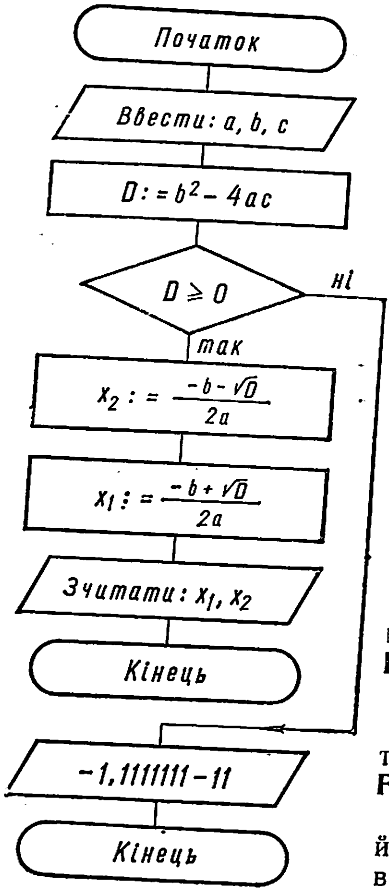


Якщо після виконання 29-ї команди вмістом регістра X є число 0, то машина перейде до виконання команди з адресою 32; в противному разі виконає команду з адресою 50. Отже, команди переходу дають можливість розгалужувати процес обчислень в двох напрямах.

Приклад.

Скласти програму для обчислення дійсних коренів рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Зауважимо, що під час виконання так званих некоректних операцій (добування кореня квадратного з від'ємного числа), ЕКОМ припиняє роботу і видає сигнал «помилка» (ERROR), що відповідає англійському слову error — помилка, похибка. Тому складемо розгалужену програму для розв'язування цієї задачі відповідно до блок-схеми, зображеної на малюнку 4. Згідно з цією блок-схемою машина працюватиме так: обчисливши дискримінант D, вона перейде до перевірки умови



Мал. 4

$D \geqslant 0$. Якщо ця умова виконується, машина обчислить дійсні корені (x_1 — у РХ, x_2 — у РО). Якщо ж дискримінант від'ємний, то керування буде передано команді, яка виведе на індикатор вміст регістра 6, у якому записано число

$$-1{,}1111\ 111 \times 10^{-11}.$$

Це ознака того, що дійсних коренів рівняння не має.

Складемо програму.

Розподіл регістрів: $a \to$ Р1, $b \to$ Р2, $c \to$ Р3, для D — Р4, для x_2 — Р0, для x_1 — РХ, ознака від'ємного дискримінанта в Р6, Р5 — робочий регістр. (Програму подано в таблиці 4.)

Інструкція до використання програми:

1) перейти в режим «Програмування», натиснувши клавіші **В/О F ПРГ**;

2) увести програму;

3) перейти в режим «Автоматична робота», натиснувши клавіші **F АВТ**;

4) увести коефіцієнти рівняння й ознаку від'ємного дискримінанта, виконавши команди: ***a* П1; *b* П2; *c* П3; 1. 1111111 /—/ ВП 11 /—/ П6**;

5) перейти до початку програми, натиснувши клавіш **В/О**;

6) обчислити x_2 і x_1, натиснувши клавіш **С/П**. Якщо на індикаторі з'явилося число —1.1111111 —11, це означає, що дане рівняння дійсних коренів не має. Якщо ж інше число, то це корінь x_1;

Таблиця 4

Адреса команди	Команда	Пояснення	Адреса команди	Команда	Пояснення
00	ИП1	$a \to$ РХ	19	÷	$\frac{-b-\sqrt{D}}{2} \to$ РХ
01	ИП3	$a \to$ РУ, $c \to$ РХ	20	ИП1	$\frac{-b-\sqrt{D}}{2} \to$ РУ, $a \to$ РХ
02	×	$ac \to$ РХ	21	÷	$\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = x_2 \to$ РХ
03	4	$ac \to$ РУ, $4 \to$ РХ	22	ПО	$x_2 \to$ Р0
04	×	$4ac \to$ РХ	23	ИП5	$\sqrt{D} \to$ РХ
05	ИП2	$4ac \to$ РУ, $b \to$ РХ	24	ИП2	$\sqrt{D} \to$ РУ, $b \to$ РХ
06	Fx^2	$b^2 \to$ РХ	25	/—/	$-b \to$ РХ
07	$\overleftarrow{XY}$	$4ac \to$ РХ, $b^2 \to$ РУ	26	+	$-b+\sqrt{D} \to$ РХ
08	—	$b^2 - 4ac = D \to$ РХ	27	2	$-b+\sqrt{D} \to$ РУ, $2 \to$ РХ
09	П4	$D \to$ Р4	28	÷	$\frac{-b+\sqrt{D}}{2} \to$ РХ
10	$Fx \geqslant 0$	Умовний перехід	29	ИП1	$\frac{-b+\sqrt{D}}{2} \to$ РУ, $a \to$ РХ
11	32	за ознакою $D \geqslant 0$	30	÷	$x_1 \to$ РХ
12	ИП4	$D \to$ РХ	31	С/П	Зупинка, індикація x_1
13	$F\sqrt{\ }$	$\sqrt{D} \to$ РХ	32	ИП6	Індикується ознака від'ємного дискримінанта
14	П5	$\sqrt{D} \to$ Р5	33	С/П	Зупинка
15	ИП2	$\sqrt{D} \to$ РУ, $b \to$ РХ			
16	+	$b+\sqrt{D} \to$ РХ			
17	/—/	$-b-\sqrt{D} \to$ РХ			
18	2	$-b-\sqrt{D} \to$ РУ, $2 \to$ РХ			

7) прочитати корінь x_2, натиснувши клавіші **П** і **0**;
8) для повторного використання програми виконати пункти 4—7.

Вправи

Обчислити корені рівнянь:

1) $3x^2 - 8{,}5x + 12{,}75 = 0$; 2) $5x^2 - 25{,}85x - 88{,}36 = 0$.

В і д п о в і д ь.

1) Дійсних коренів немає (на індикаторі висвітлюється — 1,1111111—11);

2) $x_1 = 7{,}52$; $x_2 = -2{,}35$.

4.3. Циклічні програми. Розв'язання багатьох задач має циклічний характер, тобто обчислення виконується за одними й тими самими формулами, але щоразу з іншими числовими даними. Такому обчисленню в програмах відповідає багаторазове виконання певної групи команд, які утворюють цикл. Цикли бувають арифметичні та ітераційні.

4.3.1. Арифметичні цикли. Прикладом арифметичного циклу (із заздалегідь відомим числом повторень циклу) є обчислення таблиці значень функції $y_i = f(x_i)$, де $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$). Обчислення значення функції f доцільно виділити в окремий блок-підпрограму. Тоді програму розв'язування цієї задачі можна подати блок-схемою (мал. 5). Вона складається з таких частин:

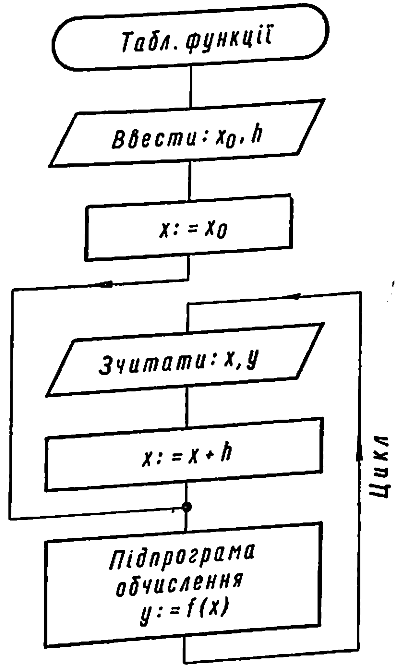
1) підготовки циклу, команди якої виконуються один раз. У даній програмі — це команда надсилання початкового значення аргументу x_0 із регістра Р0 в регістр РХ;

2) обчислювальна частина циклу, яка, крім обчислення значень функції в точках x_i (що виконується за допомогою підпрограми), забезпечує також формування аргументу за законом $x_{i+1} = x_i + h$, де h — сталий крок таблиці;

3) заключна частина циклу, команди якої визначають закінчення циклу.

Здебільшого закінчення циклу перевіряють за допомогою лічильника. У нашій програмі роль лічильника виконує

аргумент функції. Перевірку закінчення циклу і пуск машини для наступного повторення циклу здійснює оператор (обчислювач). Це зумовлено тим, що ЕКОМ не друкує результатів обчислення. Тому машину треба зупиняти після кожного виконання циклу для того, щоб прочитати на індикаторі і записати на папері чергове значення функції y_i.



Мал. 5

Для побудови основної програми важливо знати, як здійснюється перехід до підпрограми.

Перехід до підпрограми виконується в ЕКОМ спеціальною командою за допомогою клавіша **ПП** («перехід на підпрограму»). За цією командою реалізується перехід на першу команду підпрограми, адреса якої зазначена безпосередньо за командою переходу **ПП**. Крім того, в спеціальному регістрі (так званому стеку повернення) запам'ятовується адреса команди основної програми, до якої треба повернутися після закінчення роботи підпрограми. Для цього кожна підпрограма закінчується командою **В/О** («повернення назад»), яка і забезпечує повернення до виконання команди основної програми, адресу якої автоматично записано в стек повернення.

Вищезгаданий перехід на підпрограму реалізовано в основній програмі табулювання функції, яку подано в таблиці 5.

Таблиця 5

Адреса команд	Команда	Пояснення
00	ИП0	$x_i \to$ РХ
01	ПП	Звертання до підпрограми
02	11	обчислення $y = f(x)$
03	ИП0	$y_i \to$ РУ, $x_i \to$ РХ
04	С/П	Зупинка для індикації
05	ИП0	$x_i \to$ РХ
06	ИП1	$x_i \to$ РУ, $h \to$ РХ
07	+	$x_i + h = x_{i+1} \to$ РХ
08	П0	$x_{i+1} \to$ Р0
09	БП	Безумовне повернення
10	00	на початок циклу

Для використання цієї програми потрібно скласти підпрограму обчислення значень функції f, яку треба розмістити в програмній пам'яті машини, починаючи з комірки 11. При складанні підпрограми вважатимемо, що аргумент x зберігається в регістрі X. Обчислене значення функції також залишається в регістрі X.

Щоб затабулювати функцію, треба виконати таку послідовність дій:

1) перейти до режиму «Програмування», натиснувши послідовно клавіші **В/О F ПРГ**;

2) увести програму і підпрограму в програмну пам'ять;

3) увести x_0 і h відповідно в адресовані регістри Р0 і Р1;

4) перейти на початок програми, натиснувши клавіш **В/О**;

5) запустити машину, натиснувши клавіш **С/П**;

6) після зупинки машини прочитати на індикаторі значення аргументу x_i і після виконання операції $\overleftarrow{\overrightarrow{\text{ХУ}}}$ — відповідне значення y_i;

7) пункти 5 і 6 згаданої інструкції повторювати доти, поки не буде складено всю таблицю значень функції.

Приклад.

Обчислити таблицю значень функції $y = \sin\sqrt{3x^2 - 4x + 5}$ для $x = 0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}5;\ 0{,}7;\ 0{,}9$. Тут $x_0 = 0{,}1$, а $h = 0{,}2$. Складемо підпрограму для обчислення значень $y_i = \sin\sqrt{(3x_i - 4)\,x_i + 5}$ (табл. 6). Після першого виконання циклу дістанемо: $x_0 = 0{,}1$ — на індикаторі і після виконання команди $\overleftarrow{\overrightarrow{XY}}$, $y_0 = 0{,}83594328$, а після другого — $x_1 = 0{,}3$; $y_1 = 0{,}90190877$; $x_2 = 0{,}5$, $y_2 = 0{,}93387538$ і т. д.

Таблиця 6

Адреса команди	Команда	Пояснення
11	↑	$x_i \to$ РУ
12	**3**	$3 \to$ РХ
13	×	$3x_i \to$ РХ
14	**4**	$3x_i \to$ РУ, $4 \to$ РХ
15	—	$3x_i - 4 \to$ РХ
16	**ИП0**	$3x_i - 4 \to$ РУ, $x_i \to$ РХ
17	×	$(3x_i - 4)\,x_i \to$ РХ
18	**5**	$(3x_i - 4)\,x_i \to$ РУ, $5 \to$ РХ
19	+	$(3x_i + 4)\,x_i + 5 \to$ РХ
20	**F√**	$\sqrt{(3x_i + 4)\,x_i + 5} \to$ РХ
21	**F sin**	$y_i = \sin\sqrt{(3x_i + 4)\,x_i + 5} \to$ РХ
22	**В/О**	Повернення до основної програми

4.3.2. Ітераційні цикли — це цикли, у яких число повторень циклу наперед не відоме, а визначається самою машиною залежно від тієї точності, з якою треба обчислити шукану величину.

Такий цикл виконують, наприклад, при наближеному розв'язуванні рівнянь ітераційними методами. Розглянемо і запрограмуємо на ЕКОМ два з них: *метод половинного поділу* і *метод дотичних* (метод Ньютона).

Метод половинного поділу. Нехай функція f задовольняє такі умови:

1) неперервна на відрізку $[a; b]$;

2) на його кінцях набуває значень різних знаків, тобто

$$f(a) \cdot f(b) < 0;$$

3) похідна f' на цьому відрізку зберігає знак. Тоді рівняння

$$f(x) = 0 \qquad (6)$$

на відрізку $[a; b]$ має єдиний корінь. Цей відрізок називається відрізком ізоляції кореня рівняння (6).

Задача полягає в тому, щоб з наперед заданою точністю $\varepsilon > 0$ знайти наближене значення кореня рівняння (6), що належить відрізку $[a; b]$. Це означає, що модуль різниці точного α і наближеного c значень кореня рівняння (6) має бути меншим за ε, тобто $|\alpha - c| < \varepsilon$.

У методі половинного поділу наближене значення кореня рівняння (6), що належить відрізку $[a; b]$, знаходять так: точкою $c = \frac{a+b}{2}$ відрізок $[a; b]$ ділять пополам і обчислюють значення функції f у точці c. Якщо $f(c) = 0$, то c — шукане значення кореня, а якщо $f(c) \neq 0$, то корінь рівняння (6) міститься в тому з відрізків $[a; c]$ або $[c; b]$, на кінцях якого функція f має значення різних знаків. Позначимо цей відрізок через $[a_1; b_1]$, його довжина $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$. Щодо відрізка $[a_1; b_1]$, міркують так само, як і щодо відрізка $[a; b]$.

Цей процес послідовного поділу пополам відрізка ізоляції кореня рівняння (6) продовжуємо доти, поки не буде виконуватись одна з таких умов:

1) знайдеться точка $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ така, що $f(c_n) = 0$, і тоді c_n — шуканий корінь рівняння (6) на відрізку $[a; b]$;

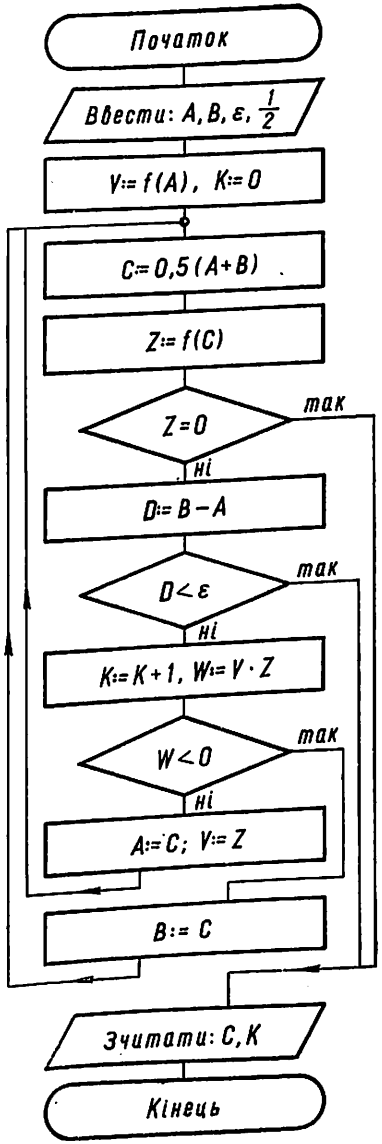
2) така точка не знайдеться, але при деякому n дістанемо відрізок $[a_n; b_n]$ довжини $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$, у якому міститься корінь рівняння (6).

Тоді будь-яке з чисел a_n і b_n буде наближеним значенням кореня рівняння (6) з точністю $\varepsilon > 0$. У цьому випадку за наближене значення кореня здебільшого беруть значення $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$, похибка якого не перевищує $\frac{b-a}{2^{n+1}}$.

Алгоритм обчислення кореня рівняння (6) методом половинного поділу подано на мал. 6. Цей алгоритм дає змогу обчислити не тільки наближене значення кореня з наперед заданою точністю $\varepsilon > 0$, а й необхідну для цього кількість ітерацій (кількість ділень пополам).

У цьому алгоритмі використано такі позначення: V — значення функції f у кінці a_n відрізка ізоляції кореня; Z — значення функції f у точці $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$; $W = V \cdot Z$; $A = a_n$, $B = b_n$ — відповідно лівий і правий кінці відрізка ізоляції кореня; K — кількість ітерацій; D — довжина відрізка $[a_n; b_n]$.

Цей алгоритм реалізується в ЕКОМ у вигляді основної програми і підпрограми обчислення значень функції f.



Мал. 6

Основну програму методу половинного поділу подано в табл.7. Вона розміщується в комірках програмної пам'яті з адресами від 00 до 45 включно. Підпрограму обчислення значення функції f виділено в окремий блок (табл. 8 або 9) і розміщено в послідовних комірках програмної пам'яті, починаючи з комірки, адреса якої 46. Для введення підпрограми обчислення значення нової функції треба в режимі «Автоматична робота» виконати команду **БП 46**, натиснувши відповідні клавіші, і перейти в режим «Програмування», натиснувши клавіші **F ПРГ.** У двох крайніх правих розрядах індикатора повинні висвітлюватися цифри 46.

Розподіл пам'яті-регістрів для основної програми: a — PA, b — PB, 0,5 — P3, ε — P9, кількість ітерацій K — P0, $V = f(A)$ — P1, $Z = f(c)$ — P2, наближене значення кореня c — P4.

Підпрограму обчислення значення функції f побудовано так, що значення її аргументу міститься в адресованому регістрі P4, а обчислене значення функції залишається в операційному регістрі X. Це треба пам'ятати під час складання підпрограм обчислення значень функції f.

Для виконання цієї програми на ЕКОМ слід користуватися поданою нижче *інструкцією*, яка визначає послідовність дій, яку має виконати обчислювач (оператор), щоб дістати розв'язок задачі:

1) перевести ЕКОМ у режим «Програмування», натиснувши послідовно такі клавіші **В/О, F** і **ПРГ.** На індикаторі висвітлиться 00;

2) увести в програмну пам'ять основну програму;

3) увести в програмну пам'ять машини підпрограму обчислення функції f;

4) перевести ЕКОМ у режим «Автоматична робота», натиснувши клавіші **F АВТ**;

5) у регістрову пам'ять машини ввести вхідні дані програми: a — PA, b — PB, ε — P9, 0,5 — P3;

6) передати керування команді 00 програми, натиснувши клавіш **В/О**;

Таблиця 7

Адреса команди	Команда	Пояснення	Адреса команди	Команда	Пояснення
00	1	$1 \to X$	23	—	$D - \varepsilon \to X$
01	П 0	$1 \to P0$ (K)	24	FX < 0	$(b - a < \varepsilon)$ 26, 25
02	ИП А	$a \to X$	25	27	
03	П 4	$a \to P4$	26	С/П	Зчитати P4, P0
04	ПП		27	ИП 0	$K \to X$
05	46		28	1	$1 \to X$
06	П 2	$f(a) \to P2$	29	+	$K + 1 \to X$
07	ИП В	$b \to X$	30	П 0	$K \to P0$
08	ИП А	$b \to У$, $a \to X$	31	ИП 1	$f(c) \to X$
09	+	$a + b \to X$	32	ИП 2	$f(A) \to X$
10	ИП 3	$0,5 \to X$	33	×	$f(c) \cdot f(A) = W \to X$
11	×	$c \to X$	34	FX < 0	$(W < 0)$ 36,35
12	П 4	$c \to P4$	35	40	
13	ПП		36	ИП 4	$c \to X$
14	46		37	П В	$c \to PB$
15	П 1	$f(c) \to P1$ (Z)	38	БП	
16	FX=0	$(f(c) = 0)$ 18; 17	39	07	
17	19		40	ИП 4	$c \to X$
18	С/П	Зчитати P4, P0	41	П А	$c \to PA$
19	ИП В	$b \to X$	42	ИП 1	$f(c) \to X$
20	ИП А	$a \to X$	43	П 2	$f(c) \to P2$
21	—	$b - a - X$	44	БП	
22	ИП 9	$\varepsilon \to X$	45	07	

7) запустити ЕКОМ для автоматичного виконання програми, натиснувши клавіш **С/П.**

При зупинці машини прочитати результати:

в регістрі P4 — наближене значення кореня;

в регістрі P0 — кількість ітерацій.

Щоб розв'язати нову задачу за цією програмою, треба натиснути послідовно клавіші **БП46 F ПРГ**, а потім виконати вказівки 3—7 цієї інструкції.

Приклади.

За цією програмою з точністю $\varepsilon = 0{,}00001$ обчислено значення коренів таких рівнянь:

1. $\cos x - x^2 = 0$ на відрізку $[0; 1]$. Підпрограму подано в табл. 8. Відповідь. $c = 0{,}82413$, $K = 18$.

2. $e^x - \operatorname{tg} x = 0$ на відрізку $[1; 1{,}5]$. Підпрограму подано в табл. 9. Відповідь. $c = 1{,}30632$, $K = 17$.

Таблиця 8

Адреса команди	Команда	Пояснення
46	ИП 4	$x \to X$
47	FX^2	$x^2 \to X$
48	ИП 4	$x \to X$
49	F cos	$\cos x \to X$
50	—	$x^2 - \cos x \to X$
51	В/О	

Таблиця 9

Адреса команди	Команда	Пояснення
46	ИП 4	$x \to X$
47	Fe^x	$e^x \to X$
48	ИП 4	$x \to X$, $e^x \to Y$
49	F tg	$\operatorname{tg} x \to X$
50	—	$e^x - \operatorname{tg} x \to X$
51	В/О	

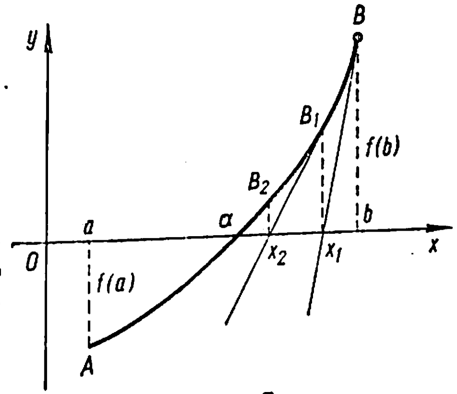
Вправи

За програмою методу половинного поділу з точністю $\varepsilon = 0{,}0001$ знайти корені таких рівнянь:

$x^3 + 10x - 10 = 0$ на відрізку $[0; 1)$. Відповідь. 0,9217.
$x - 2 - \lg x = 0$ на відрізку $[2; 3]$. Відповідь. 2,3758.

Метод дотичних. Нехай функція f на відрізку $[a; b]$ задовольняє такі умови: неперервна, $f(a) \cdot f(b) < 0$, f' і f'' зберігають знак. Тоді рівняння (6) на відрізку $[a; b]$ має єдиний корінь, який треба обчислити наближено з наперед заданою точністю $\varepsilon > 0$ за методом дотичних.

Суть цього методу пояснимо, виходячи з геометричних міркувань (мал. 7). Якщо рівняння (6) на відрізку $[a; b]$ має лише один корінь, то це означає, що графік функції f перетинає вісь Ox лише в одній точці $(\alpha; 0)$. У точці $B\,(b; f(b))$ проведемо дотичну до графіка функції f' рівняння якої має вигляд:



Мал. 7

$$y - f(b) = f^1(b)(x - b).$$

Знайдемо тепер абсцису x_1 точки перетину цієї дотичної з віссю Ox. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y - f(b) = f'(b)(x - b), \\ y = 0. \end{cases}$$

Якщо $f'(b) = 0$, то для шуканої абсциси дістанемо:

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Замість відрізка $[a; b]$ розглянемо тепер відрізок $[a; x_1]$ і побудуємо дотичну до графіка f у точці $B_1\,(x_1; f(x_1))$. Її рівняння:

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1).$$

Для абсциси x_2 точки перетину цієї дотичної з віссю Ox знаходимо:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Такі обчислення можна продовжувати як завгодно довго. Описаний процес називається методом дотичних або методом Ньютона. Числа $x_0, x_1, x_2, \ldots$, які обчислюються рекурентною формулою

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \; x_0 = b, \qquad (7)$$

утворюють спадну послідовність, обмежену знизу, і є наближеними значеннями шуканого кореня α рівняння (6).

В обчислювальній математиці доводиться, що коли $f(a) \times f(b) < 0$, f' і f'' відмінні від нуля і зберігають знак на відрізку $[a; b]$, а за нульове наближення взято довільну точку x_0 відрізка $[a; b]$, у якій виконується умова $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, то числова послідовність $\{x_n\}$ збігається і її границя дорівнює значенню кореня α, тобто існує

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha.$$

Отже, при виконанні зазначених умов наближені значення x_n зі зростанням n як завгодно мало відрізняються від точного значення кореня α. Це означає, що наближене значення кореня можна знайти з будь-якою наперед заданою точністю.

На мал. 7 за нульове наближення взято $x_0 = b$. У цьому випадку $f(b) > 0$ і $f''(x_0) > 0$. За нульове наближення x_0 звичайно беруть той з кінців відрізка $[a; b]$, у якому виконується умова $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. Якщо ця умова виконується в лівому кінці відрізка $[a; b]$, то за нульове наближення в методі дотичних береться $x_0 = a$. Аналогічно за рекурентною формулою

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \ x_0 = a \qquad (8)$$

дістають зростаючу обмежену зверху послідовність $\{x_n\}$, яка збігається до кореня рівняння $f(x) = 0$.

Якщо метод дотичних збігається, то $x_{n+1} - x_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тому для досить великих значень n виконується умова

$$|\alpha - x_{n+1}| < |x_{n+1} - x_n|,$$

а процес обчислень за рекурентними формулами (7) або (8) продовжують доти, поки не буде виконуватися умова

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant \varepsilon.$$

Але з (7) або (8) випливає, що

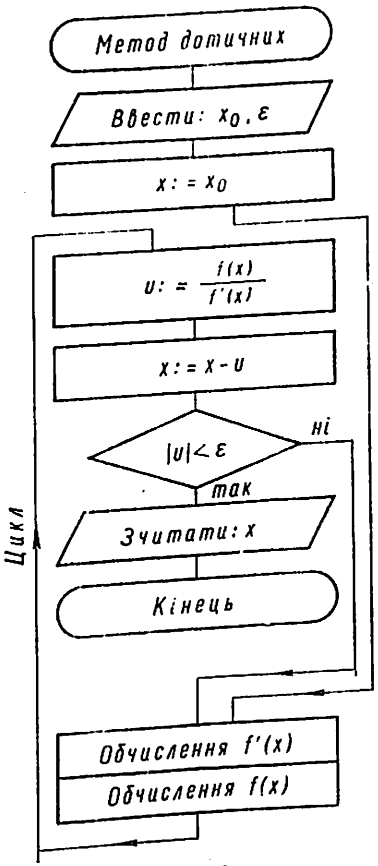
$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

А тому процес обчислень за формулами (7) або (8) припиняють, тільки-но виконується нерівність

$$\left|\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right| < \varepsilon.$$

Блок-схему алгоритму дотичних подано на мал.8. Обчислення значень функції f та її похідної f' тут винесено в окремий блок-підпрограму.

Основну програму для методу дотичних наведено в табл. 10. Вона відповідає такому розподілу регістрів: $x_0 \to$ Р0, $\varepsilon \to$ Р1, Р2 резервується для значень $f'(x)$, а Р3 — для $U = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.



Мал. 8

Щоб скористатися цією програмою, спочатку треба скласти підпрограму для обчислення $f(x)$ і $f'(x)$. Підпрограми розміщуються в програмній пам'яті машини, починаючи з адреси 20. Спочатку складають програму обчислення значення функції $f'(x)$, аргумент якої міститься в РХ, а значення записується в Р2. Потім обчислюють значення функції $f(x)$, аргумент x якої викликається з Р0, а значення залишається в РХ. Ця підпрограма завершується командою **В/О**.

Інструкція до виконання програми методу дотичних:

Таблиця 10

Адреса команди	Команда	Пояснення	Адреса команди	Команда	Пояснення
00	ИП0	$x_n \to$ РХ	10	П0	$x_{n+1} \to$ Р0
01	ПП	Вихід на підпрограму обчислення $f(x_n)$ і $f'(x_n)$	11	ИП3	
02	20		12	FX<0	$\|u\| \to$ РХ
03	↑	$f(x_n) \to$ РУ	13	15	
04	ИП2	$f'(x_n) \to$ РХ	14	/—/	
05	÷	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = u \to$ РХ	15	ИП1	$\|u\| \to$ РУ, $\varepsilon \to$ РХ
06	П3	$u \to$ Р3	16	—	$\|u\| - \varepsilon = \Delta \to$ РХ
07	ИП0	$u \to$ РУ, $x_n \to$ РХ	17	Fx<0	Перевірка на закінчення циклу за умовою $\|u\| - \varepsilon < 0$
08	$\overleftarrow{\overrightarrow{XY}}$	$x_n \to$ РУ, $u \to$ РХ	18	00	
09	—	$x_n - u = x_{n+1} \to$ РХ	19	С/П	Зупинка. Індикація Δ. Значення x міститься в Р0.

1) перейти до режиму «Програмування», натиснувши клавіші **В/0 F ПРГ;**

2) увести програму і підпрограму;

3) перейти до режиму «Автоматична робота», натиснувши клавіші **F АВТ;** 4) увести: $X_0 \to$ Р0, $\varepsilon \to$ Р1; 5) перейти на початок програми, натиснувши клавіш **В/0;**

6) запустити програму, натиснувши клавіш **С/П;** 7) після зупинки машини натиснути клавіші **ИП 0** і прочитати на індикаторі значення x.

Приклад.

Обчислити з точністю до 0,000001 ізольовані на відрізках [—3; —2], [0,1; 1], [2; 3] корені рівняння $x^3 - 8x + 2 = 0$. У цьому прикладі маємо: $f(x) = x^3 - 8x + 2$, $f'(x) = 3x^2 - 8$, $f''(x) = 6x$.

Знайдемо початкове наближення x для кожного з коренів цього рівняння. Маємо:

1) $a = -3$, $b = -2$, $f''(x) < 0$, $f(-3) = -1 < 0$, $f(-3)f''(-3) > 0$.
Отже, $x_0 = -3$.

2) $a = 0{,}1$, $b = 1$, $f''(x) > 0$, $f(0{,}1) = 1{,}201 > 0$, $f(0{,}1)f''(0{,}1) > 0$.
Отже, $x_0 = 0{,}1$.

3) $a = 2$, $b = 3$, $f''(x) > 0$, $f(3) = 5 > 0$, $f(3)f''(3) > 0$.
Отже, $x_0 = 3$.

Скористаємося формулою: $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 8x_n + 2}{3x_n^2 - 8}$.

Підпрограму для обчислення $f(x)$ і $f'(x)$ подано в таблиці 11.

Таблиця 11

Адреса команди	Команда	Пояснення	Адреса команди	Команда	Пояснення
20	↑	$x_n \to$ РУ	29	↑	$x_n^2 \to$ РУ
21	×	$x_n^2 \to$ РХ	30	8	$x_n^2 \to$ РУ, $8 \to$ РХ
22	3	$x_n^2 \to$ РУ, $3 \to$ РХ	31	—	$x_n^2 - 8 \to$ РХ
23	×	$3x_n^2 \to$ РХ	32	ИП0	$x_n^2 - 8 \to$ РУ, $x_n \to$ РХ
24	8	$3x_n^2 \to$ РУ, $8 \to$ РХ	33	×	$(x_n^2 - 8)\,x_n \to$ РХ
25	—	$3x_n^2 - 8 = f'(x_n) \to$ РХ	34	2	$(x_n^2 - 8)\,x_n \to$ РУ, $2 \to$ РХ
26	П2	$f'(x_n) \to$ Р2	35	+	$(x_n^2 - 8)\,x_n + 2 = f(x_n) \to$ РХ
27	ИП0	$x_n \to$ РХ	36	В/0	Повернення до основної програми
28	Fx^2	$x_n^2 \to$ РХ			

Виконавши перший раз усі пункти інструкції при $x_0 = -3$, дістаємо:

1) $\Delta = -1{,}073745 \cdot 10^{-7}$, $x = -2{,}9459952$, де $\Delta = \left|\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right| - \varepsilon$.

Виконавши другий і третій раз пункти 4—7 інструкції при $x_0 = 0{,}1$ і $x_0 = 3$, дістанемо:

2) $\Delta = -8{,}335358 \cdot 10^{-7}$, $x = 0{,}25200039$.
3) $\Delta = -3{,}247578 \cdot 10^{-7}$, $x = 2{,}6939948$.

Вправи

Обчисліть з точністю до 0,00001 корені рівнянь:

1) $5x^2 - 20x + 3 = 0$, $x \in [0; 0{,}5]$;
2) $x - \cos^2 \pi x = 0$, $x \in [0{,}2;\ 0{,}5]$;
3) $\ln x + x - 2 = 0$, $x \in [1{,}5;\ 2]$.

Відповідь. 1) 0,17086; 2) 0,31151; 3) 1,55713.

У цій статті наведено кілька прикладів програмування для ЕКОМ «Електроніка Б3-34». Функціональні можливості машини значно ширші. Крім команд прямих переходів, прямого запису і зчитування інформації, в машині є команди непрямих переходів і непрямого запису й зчитування в адресовані регістри. Вони дають змогу складати програми зі змінними командами. Використання ж спеціальної стекової пам'яті дає можливість ефективно обчислювати складні алгебраїчні вирази тощо. Читачеві, який зацікавиться програмуванням для мікрокалькуляторів і методами обчислень рекомендуємо звернутися до поданої літератури.

Список використаної та рекомендованої літератури

1. Белый Ю. А. Электронные микрокалькуляторы и техника вычислений. М., Знание, 1981. 64 с.
2. Ковалев М. П., Шварцбурд С. И. Электроника помогает считать. М., Просвещение, 1979. 96 с.
3. Кройль Г. Что умеет мой микрокалькулятор? М., Мир, 1981. 133 с.
4. Чакань А. Что умеет карманная ЭВМ? М., Радио и связь, 1982. 144 с.
5. Козин А. С., Ляшенко Н. Я. Вычислительная математика: Пособие для факультативн. занятий в 10 классе. К., Рад. шк., 1983. 191 с.
6. Тихонов А. Н., Костомаров Д. П. Рассказы о прикладной математике. М., Наука, 1979. 96 с.

Н. Д. ВОЛКОВА, В. О. РОМАНОВ

МЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ

Уявлення про найкоротшу відстань між двома точками виникло ще в первісних людей і, як вважають деякі вчені, навіть раніше, ніж поняття про число. Поняття відстані формувалося у процесі виконання різних вимірювань на земній поверхні. Основні її властивості були відомі вже у Вавілоні та Єгипті. Проте лише у славнозвісних «Началах» Евкліда Александрійського (III ст. до н. е.) вперше побудовано геометричну модель навколишнього простору, причому поняття «відстань» тлумачиться як довжина відрізка, що сполучає дві дані точки. Говорять, що евклідів простір є *метричним* (від грец. μετρεω — міра, метричний, пов'язаний з вимірюванням).

Розвиток мореплавства і астрономії зумовив виникнення поняття метричного сферичного простору, в якому відстань між двома точками визначається як довжина меншої з дуг великого кола сфери, що проходить через ці точки.

Отже, створення таких метричних просторів, як евклідів і сферичний, є результатом активного сприймання людиною властивостей реальних просторових предметів і безпосереднього абстрагування від форм і відношень навколишнього світу. Проте далі поняття простору в математиці розвивається в процесі узагальнення вже існуючих геометричних абстракцій.

Поштовхом до узагальнення поняття відстані було створення видатними французькими математиками Р. Декартом (1596—1650) та П. Ферма (1601—1655) методу координат, за допомогою якого вдалося встановити важливий зв'язок між точками дво- та тривимірного простору і впорядкованими парами та трійками дійсних чисел — так звану *ізометричну* (таку, що зберігає відстані) відповідність.

Нагадаємо, що відстань між двома точками A_1, A_2 на прямій, площині та в просторі, які задано їх координатами, обчислюється за формулами:

$$A_1A_2 = |x_2 - x_1| \quad \text{(на прямій);}$$

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{(на площині);}$$

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad \text{(у просторі).}$$

Аналітичний вираз відстані між двома точками, заданими своїми координатами, стає відправним пунктом для узагальнення поняття відстані (вона вже розглядається як числова функція) і формування поняття n-вимірного метричного простору, коли $n \geqslant 4$. Поняття простору більш як трьох вимірів виникло з практичних потреб фізики. Так, в аналітичній механіці, створеній видатним французьким математиком і механіком Ж. Д. Лагранжем, плідно використовується поняття чотиривимірного простору, де четвертим виміром є час, що входить у механічні переміщення. Саме з теорії Лагранжа починається розвиток вчення про багатовимірні простори.

Дальший розвиток поняття багатовимірного метричного простору відбувається в процесі розв'язування різних практичних задач, зокрема таких, які зводяться до розв'язування систем рівнянь з багатьма невідомими.

Отже, втративши матеріалізовану конкретність, абстрактно-математичні поняття «відстань» і «метричний простір» набули великої загальності і водночас численних застосувань. І це цілком закономірно, бо, як писав В. І. Ленін у своїх «Філософських зошитах», «...*усі* наукові (правильні, серйозні, не безглузді) абстракції відображають природу глибше, правильніше, *повніше*. Від живого споглядання до абстрактного мислення *і від нього до практики* — такий є діалектичний шлях пізнання *істини*, пізнання об'єктивної реальності» (Повне зібр. тв., т. 29, с. 142).

Розглянемо тепер поняття абстрактного метричного простору та деякі його властивості.

Розглянемо непорожню множину X елементів довільної природи.

Означення 1. *Метрикою в множині X називається така числова функція ρ, задана на цій множині, для якої виконуються три умови:*

1) *для будь-яких* $x, y \in X$ $\rho(x, y) \geqslant 0$, *причому* $\rho(x, y) = 0$ тоді і *тільки тоді, коли* $x = y$;

2) *для будь-яких* $x, y \in X$ $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (*умова симетрії*);

3) *для будь-яких* $x, y, z \in X$ $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (*нерівність трикутника*).

Пару (X, ρ), тобто множину X разом з введеною на ній метрикою ρ, називають *метричним простором*. Іноді метричний простір позначають просто через X.

Елементи множини X називають *точками* метричного простору, а величину $\rho(x, y)$ — *відстанню між точками* x та y. Умови 1)—3) називають *аксіомами метричного простору*.

Зауважимо, що аксіоми 1)—3) метричного простору узагальнюють відомі вам з курсу геометрії властивості відстаней між точками евклідового простору:

1) для будь-яких різних точок A, B, відстань $AB > 0$;

2) $AB = BA$;

3) якщо C — довільна точка, то $AC \leqslant AB + BC$.

Щоб переконатися, що простір (X, ρ) є метричним, досить перевірити справедливість аксіом метричного простору.

Перевіримо, що множина R дійсних чисел з метрикою $\rho(x, y) = |x - y|$ є метричним простором.

Позначимо через R^n множину всіх впорядкованих наборів $x = (x_1, \ldots, x_n)$, утворених з n дійсних чисел, і називатимемо її n-вимірним координатним простором.

Введемо позначення $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ і доведемо таку теорему.

Теорема 1. ***Множина R^n буде метричним простором, якщо ввести метрику за формулою:*** $\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Доведення. З умови, якщо введено метрику ρ, безпосередньо випливає, що аксіоми 1, 2 виконуються. Щоб перевірити третю, скористаємося нерівністю $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2$ (нерівність Коші — Буняковського), яка випливає з невід'ємності суми $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \times \sum_{j=1}^{n} b_j^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \sum_{j=1}^{n} a_j b_j + \sum_{j=1}^{n} b_i^2 \sum_{j=1}^{n} a_j^2 = 2 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - 2 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$.

Для будь-яких $x, y, z \in R^n$ маємо: $\rho(x, z) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} ((x_i - y_i) + (y_i - z_i))^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 + 2 \times \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)(y_i - z_i) + \sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} ((x_i = y_i)^2 + 2 \times \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \rho(x, y) + \rho(y, x)$.

Отже, аксіома 3 теж виконується, тобто n-вимірний координатний простір є метричним. Таким чином, відомий з шкільного курсу математики тривимірний координатний простір є окремим випадком щойно розглянутого простору.

Багатовимірні метричні простори знайшли широке застосування в різних галузях фізики. Так, відправним пунктом

для побудови класичної статистичної фізики є уявлення про фазовий простір — простір усіх узагальнених координат і всіх узагальнених імпульсів розглядуваної фізичної системи. Такою фізичною системою є, зокрема, розріджений газ, що міститься у невеликій посудині і складається з N молекул, які розглядаються як матеріальні точки з масами m_1, m_2, m_3, m_N. У кожний момент часу матеріальна точка m_i займає певне положення в просторі, яке характеризується трьома просторовими координатами x_i, y_i, z_i. Точка m_i має певний імпульс (добуток маси на миттєву швидкість), який визначається трьома складовими (проекціями на осі координат). Отже, стан матеріальної точки m_i характеризується шістьма параметрами, а стан усієї системи — $6N$ параметрами. Їх можна розглядати як координати деякої точки P у просторі R^{6N}. Отже, дістаємо $6N$-вимірний метричний простір, вивчаючи властивості якого можна теоретично описати деякі фізичні процеси в розглядуваній системі. Зазначимо, що метод багатовимірного фазового простору застосовується в механіці, термодинаміці, фізичній хімії.

Коротко спинимось на питанні про застосування метричних просторів у теорії відносності. У науково-популярній літературі найчастіше згадується простір, названий на честь видатного німецького математика і фізика Г. Мінковського (1864—1909). Метрика цього простору задається формулою:

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + c^2 (t_2 - t_1)^2},$$

де $A(x_1, y_1, z_1, t_1)$, $B(x_2, y_2, z_2, t_2)$, а c — швидкість світла ($\approx 300\ 000$ км/с). До виразу метрики введено швидкість світла c, бо одним з основних положень теорії відносності є обмеженість швидкості руху матеріальних точок і швидкості поширення енергії саме цією величиною. За Мінковським, фізику можна розуміти як геометрію чотиривимірного світу.

Неевклідові метричні простори є ефективним апаратом для розкриття і вивчення законів навколишнього світу. Не тільки в теорії відносності, а й в оптиці і в загальній теорії коливань неевклідовий опис явищ в деяких випадках є більш адекватним фізичній реальності, ніж евклідовий.

Поряд з n-вимірними просторами, важливими у фізиці (і багатьох розділах математики), є нескінченновимірні метричні простори. Розглянемо найпростіший приклад такого простору. Називатимемо функцію

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

з нескінченною кількістю членів *точкою*. Тоді множина таких точок є простором нескінченної кількості вимірів.

Візьмемо ще одну точку

$$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots$$

і визначимо відстань між точками так:

$$\rho(P(x), Q(x)) = \\ = \sqrt{(a_0 - b_0)^2 + (a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2 + \dots}$$

Ця відстань буде дійсним числом тоді і тільки тоді, коли ряд під знаком кореня є збіжним.

Якщо, наприклад, взяти точки

$$P(x) = 2\sqrt{6} + \sqrt{6}\,x + \frac{\sqrt{6}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{6}}{3}x^3 + \dots,$$

$$Q(x) = \sqrt{6} + \frac{\sqrt{6}}{2}x + \frac{\sqrt{6}}{6}x^2 + \frac{\sqrt{6}}{12}x^3 + \dots,$$

то

$$\rho(P(x), Q(x)) = \sqrt{6\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right)} = \\ = \sqrt{\pi^2} = \pi = 3{,}1416\dots$$

Нескінченновимірні простори ввів у математику видатний німецький учений Д. Гільберт (1862—1943). Праці Гільберта, присвячені дослідженню нескінченновимірних просторів, відіграли істотну роль у створенні квантової механіки.

Його термін «математичні спектри» виявився пов'язаним з поняттям «спектр енергетичних станів атомів». Проте гільбертова теорія метрики в цих просторах (так званих квадратичних форм, які за Гільбертом можуть бути виражені у вигляді нескінченної алгебраїчної суми) виявилася не зовсім придатною для розв'язання проблем квантової механіки. Розвиваючи ідеї Гільберта, американський математик Д. Нейман (1903—1957) знайшов таке абстрактне означення квадратичної форми, завдяки якому гільбертова спектральна теорія стала дійовим знаряддям дослідження в сучасній фізиці. У праці Д. Неймана «Математичні основи квантової механіки», яка мала величезний вплив на розвиток квантової механіки, широко використовується поняття нескінченновимірного простору.

Теорема 2. ***Множина $C[a, b]$ неперервних на відрізку $[a; b]$ функцій буде метричним простором, якщо ввести метрику за формулою*** $\rho(x, y) = \max\limits_{a<t<b} |x(t) - y(t)|$, де x та y — будь-які неперервні на $[a; b]$ функції.

Доведення. Аксіоми 1), 2) метричного простору випливають безпосередньо з означення ρ. Умова 3) також виконується, оскільки

$$\rho(x, z) = \max_{a<t<b} |(x - z)(t)| \leqslant \max_{a<t<b} (|x(t) - y(t)| + \\ + |y(t) - z(t)|) \leqslant \max_{a<t<b} |x(t) - y(t)| + \max_{a<t<b} |y(t) - \\ - z(t)| = \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Вправи.

1. Обчисліть відстань між функціями $\sin t$ і $\cos t$ в просторі $C[0; 2\pi]$. Скориставшись неперервністю синуса та косинуса, знаходимо:

$$\rho(\sin t, \cos t) = \max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} |\sin t - \cos t| = \\ = \sqrt{2} \max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} \left|\sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right| = \sqrt{2}.$$

2. Нехай $M = (X; \rho)$ — деякий метричний простір і M^* — довільна непорожня його підмножина. Доведіть, що коли в M^* задати ту саму метрику ρ, то M^* також буде метричним простором.

Щойно розглянутий метричний простір неперервних на відрізку функцій має численні й дуже важливі застосування в різних розділах математики, зокрема в обчислювальній математиці, де центральним є питання про наближення (апроксимацію) функцій. Апроксимація полягає в тому, що на деякому відрізку $[a; b]$ функцію $f(x)$ замінюють функцією $\varphi(x)$, яку простіше досліджувати або обчислювати і яка в певному розумінні близька до $f(x)$. Близькість функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$, зокрема, можна оцінювати за допомогою відстані $\rho(f(x), \varphi(x)) = \max\limits_{a<x<b} |f(x) - \varphi(x)|$, тобто в метричному просторі $C[a, b]$ неперервних на відрізку функцій.

Наприклад, при досить малому x справджується рівність $\operatorname{tg} x \approx x$, або, точніше, $\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3}$.

Нехай x змінюється на відрізку $[0; 0,5]$. Користуючись метрикою простору $C[0; 0,5]$ неперервних на цьому відрізку функцій, можна оцінити точність наближення функції $f(x) = \operatorname{tg} x$ функцією $\varphi(x) = x + \frac{x^3}{3}$:

$$\rho\left(\operatorname{tg} x,\ x + \frac{x^3}{3}\right) = \max_{0<x<0,5} \left|\operatorname{tg} x - \left(x + \frac{x^3}{3}\right)\right| \approx 0{,}0046.$$

Отже, обчислюючи наближене значення функції $\operatorname{tg} x$ на відрізку $[0; 0,5]$ за многочленом $x + \frac{x^3}{3}$, ми припустимось похибки, меншої ніж 0,005.

В обчислювальній математиці широко використовують *метод послідовних наближень*, який дає можливість діставати з довільною наперед заданою точністю наближення до відомої нерухомої точки, яка є точним розв'язком даного рівняння або системи рівнянь. Такий метод розв'язування рівнянь грунтується на *принципі відображень стиску* — фундаментальній теоремі функціонального аналізу, згідно з якою

перетворення стиску метричного простору що задовольняє так звану умову повноти, має єдину нерухому точку. Докладніше з цими питаннями ознайомлює стаття А. Я. Дороговцева. «Принцип відображень стиску», вміщена в п'ятому випуску (К., Рад. шк., 1974, с. 70—87). Теорема належить відомому польському математику С. Банаху (1892—1945) і названа на його честь. Метрична теорема Банаха використовується для доведення існування розв'язків різних типів рівнянь і їх систем.

Повернемося до абстрактних метричних просторів і розглянемо ще деякі їх властивості.

Означення 2. *ε-околом точки $a \in X$ називається множина всіх таких точок $x \in X$, для яких виконується умова* $\rho(a, x) < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$. ε-окіл називається також відкритою кулею і позначається через $B(a, \varepsilon)$.

Наприклад, у просторі R (числова пряма) ε-окіл точки — це інтервал $]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$, в просторі R^2 — відкрите коло радіуса ε, в просторі R^3 — відкрита куля радіуса ε, в просторі R^n $(n \in N)$ — n-вимірна відкрита куля радіуса ε.

Означення 3. *Точка $a \in A$ називається внутрішньою точкою множини A, якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що $B(a; \varepsilon) \subset A$. Множина A називається відкритою, якщо всі її точки — внутрішні.*

Прикладами відкритих множин є відкриті кулі в будь-якому метричному просторі X.

Нижче буде доведено, що для неперервної числової функції f і $C \in R$ множина $\{x \in R \mid f(x) < c\}$ також є відкритою. Серед відкритих підмножин метричного простору X є найменша — множина Φ і найбільша — множина X, тобто для будь-якої підмножини U $\Phi \subset U \subset X$.

Теорема 3. ***Об'єднання і переріз будь-якого скінченного числа відкритих множин також є відкрита множина.***

Доведення. Нехай $U = \bigcup\limits_{\alpha} U_2$, де всі U_α відкриті. Якщо $a \in U$, то для $a \in U_{\alpha_0}$ для деякого α_0. З відкритості U_{α_0}

випливає, що існує таке $\varepsilon > 0$, що $B(a, \varepsilon) \subset U_{\alpha_0} \subset U$. Отже, U теж відкрита.

Розглянемо випадок, коли $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$, де всі U_i відкриті. Якщо $a \in U$, то $a \in U_i$, $i = 1, \ldots, n$, а тому існують такі $\varepsilon_i > 0$, що $B(a, \varepsilon_i) \subset U_i$. Тоді $B(a, \varepsilon) \subset U$, де $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$. Отже, множина U відкрита. Що й треба було довести.

Зауважимо, що переріз нескінченного числа відкритих множин може й не бути відкритою множиною. Наприклад, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left]-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right[= \{0\}$.

Узагальнимо поняття границі числової послідовності, ввівши означення поняття границі послідовності точок метричного простору.

Нехай в метричному просторі (X, ρ) задано послідовність точок x_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

Означення 4. *Точка $a \in X$ називається границею послідовності X_n, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке натуральне число n_0, що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність* $\rho(x_n, a) < \varepsilon^{(1)}$ або, *що те ж саме,* $\rho(x_n, a) \to 0$.

Для випадку границі числові послідовності, тобто для метричного простору R, ця нерівність має вигляд $|x_n - a| < \varepsilon$.

Послідовність точок метричного простору, яка має границю, називається *збіжною*.

Безпосередньо з означення границі випливає, що *для збіжності послідовності x_n до точки a необхідно і достатньо, щоб кожному ε-околу точки a належали всі точки послідовності, крім, можливо, скінченної їх кількості.*

Звідси випливає, що *коли границя послідовності існує, то вона єдина.*

Як аналог функції дійсної змінної, можна ввести відображення метричних просторів.

Введемо означення границі та неперервності відображення метричних просторів.

Означення 5. *Точка $b \in Y$ називається границею відображення f метричного простору (X, ρ) в метричний простір (Y, ρ_1) при $x \to a$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, що задовольняють умови $x \neq a$, $\rho(x, a) < \delta$, виконується нерівність $\rho_1(f(x), b) < \varepsilon$.* Як і для границі числових функцій, для границі відображення метричних просторів використовуватимемо символіку $\lim f(x) = b$.

Означення 6. *Відображення $f: X \to Y$ називається неперервним в точці $a \in X$, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

Відображення називається неперервним, якщо воно неперервне в кожній точці множини X.

Теорема 4. (Глобальний критерій неперервності). ***Для того, щоб відображення $f: (X, \rho) \to (Y, \rho_1)$ було неперервним, необхідно і достатньо, щоб прообраз кожної відкритої множини в Y був відкритою множиною в X.***

Доведення. *Необхідність.* Нехай f неперервне, множина V відкрита в Y і

$$U = f^{-1}(V) = \{a \in X \mid f(a) \in V\}.$$

Якщо $a \in U$, то $b = f(a) \in V$. З відкритості V випливає, що існує такий ε-окіл точки b, який є підмножиною V. З неперервності f випливає, що існує таке $\delta > 0$, що $f(B(a, \delta)) \subset B(b, \varepsilon) \subset V$. Отже, $B(a, \delta) \subset f^{-1}(V) \subset U$.

Робимо висновок, до a — внутрішня точка множини U. Тому множина U відкрита.

Достатність. Нехай прообраз будь якої відкритої множини в Y відкритий в X. Розглянемо будь-яку точку $a \in X$. Нехай $\varepsilon > 0$ і $V = B(b, \varepsilon)$, де $b = f(a)$. Тоді множина V відкрита bY, а тому множина $U = f^{-1}(V) = f^{-1}(B(b, \varepsilon))$ має бути відкритою в X. Отже, точка a є внутрішньою точкою множини U. Тому існує таке $\delta > 0$, що $B(a, \delta) \subset U$. Але тоді $f(B(a, \delta)) \subset f(U) = V = B(b, \varepsilon)$. Отже, з умови $\rho(x, a) < \delta$ випливає, що виконується нерівність $\rho_1(f(x), b) < \varepsilon$. А це означає, що $\lim f(x) = b = f(a)$, тобто f неперервне в точці a. Теорему доведено.

Теорема 5. ***(Неперервність композиції двох неперервних відображень). Якщо $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ — неперервні відображення метричних просторів, то відображення $g\circ f:X\to Z$, $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ теж неперервне.***

Доведення. Якщо W відкрита множина в просторі Z, то з неперервності g випливає, що множина $g^{-1}(W)$ відкрита в Y, а з неперервності f випливає, що множина $f^{-1}(g^{-1}(W))=(g\circ f)^{-1}(W)$ відкрита в X. Застосовуючи глобальний критерій неперервності до відображення $g\circ f$, приходимо до висновку про його неперервність. Теорему доведено.

Якщо f — відображення метричного простору (X, ρ) в простір R^m, то для кожного $x\in X f(x)\in R^m$, тобто $f(x)=(y_1, \dots, y_m)$, де $y_i\in R$, $i=1, \dots, m$.

Отже, відображення $f:X\to R^m$ задає m відображень $f_i:X\to R$, $f_i(x)=y_i$, які називатимемо *компонентами відображення* f. Тоді можна записати, що $f(x)=(f_1(x), \dots, f_m(x))$.

Теорема 6. ***Для існування границі при $x\to a$ відображення $f:(X, \rho)\to R^m$ необхідно і достатньо, щоб всі компоненти відображення f мали границі при $x\to a$. При цьому $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x), \dots, f_m(x))=(\lim\limits_{x\to a}f_1(x), \dots, \lim\limits_{x\to a}f_m(x))$.***

Доведення. *Необхідність.* Нехай $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$, де $b=(b_1, \dots, b_m)\in R^m$. Тоді відстань в просторі R^m між $f(x)$ і b, яка дорівнює $\left(\sum\limits_{j=1}^{m}(f_j(x)-b_j)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, є величина нескінченно мала при $x\to a$.

Звідси випливає, що нескінченно малими є величини $(f_i(x)-b_i)$, $i=1, \dots, m$, а тому $\lim\limits_{x\to a}f_i(x)=b_i$.

Достатність. Нехай $\lim\limits_{x\to a}f_i(x)=b_i$, тобто величини $(f_i(x)-b_i)$ є нескінченно малими при $x\to a$ $(i=1, \dots, m)$.

Оскільки $\left(\sum\limits_{i=1}^{m}(f_i(x)-b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{m}|f_i(x)-b_i|$, то відстань між елементами $f(x)=(f_1(x), \dots, f_m(x))$ і $b=(b_1, \dots, b_m)$ також є нескінченно малою при $x\to a$, тобто $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$.

Теорему доведено.

Наслідок. *Відображення $f:X\to R^m$ неперервне тоді і тільки тоді, коли всі його компоненти неперервні.*

Наведемо деякі приклади неперервних відображень метричних просторів.

1. Відображення $h, g:R^2\to R$, $h(x, y)=x$, $g(x, y)=y$, неперервні. Звідси випливає, що відображення $\varphi, \psi:R^2\to R$, $\varphi(x, y)=x^2-y^2$, $\psi(x, y)=2xy$, теж неперервні.

2. Розглянемо відображення $f:R^2\to R^2$, $f(x, y)=(U, V)=(x^2-y^2, 2xy)$. Компоненти його $f_1(x, y)=x^2-y^2$, $f_2(x, y)=2xy$ неперервні. Отже, за теоремою 6 відображення f теж неперервне.

3. Для будь-якого натурального n відображення

$$A_n:C\quad[0;\ 2\pi]\to R,\ A_n(x)=\int_0^{2\pi}x(t)\cos nt\,dt$$

неперервне тому, що для будь-яких функцій $x, y\in C[0;\ 2\pi]$ $|A_n(x)-A_n(y)|=$

$$=\left|\int_0^{2\pi}x(t)\cos nt\,dt-\int_0^{2\pi}y(t)\cos nt\,dt\right|\leqslant\int_0^{2\pi}|x(t)-y(t)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant 2\pi\times\max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi}|x(t)-y(t)|=2\pi\cdot\rho(x,\ y).$$

Вправи.

1. Довести, що коли ρ — деяка метрика в X, то формула $\rho_1(x,y)=\frac{\rho(x,\ y)}{1+\rho(x,\ y)}$ теж задає метрику в X.

2. Довести, що послідовність $x_n(t)=\frac{1}{n}\sin nt$ збігається в просторі $C[0;\ 2\pi]$, а послідовність $y_n(t)=\sin nt$ — ні.

3. Довести, до відображення $f:R^2\to R^2$, $f(x,y)=(U,\ V)=(e^x\cos y,\ e^x\sin y)$ є неперервним.

4. Довести неперервність відображень

$$B_n : C\,[0; 2\pi] \to R,\quad B_n(x) = \int\limits_0^{2\pi} x(t)\sin nt\,dt,\quad n \in N.$$

Список використаної та рекомендованої літератури

1. Следзінський І. Ф., Тесленко І. Ф. Метричні простори в шкільному курсі математики. К., Рад. шк. 1978. 108 с.
2. Колмогоров А. М., Фомін С. В. Елементи теорії функції і функціонального аналізу. К., Вища шк. 1974. 496 с.
3. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М., Наука, 1977, с. 325—415.
4. Давидов М. О. Курс математичного аналізу. К., Вища шк., 1979. Ч. 3, с. 218—348.

А. Я. ДОРОГОВЦЕВ

ФУНКЦІЇ, ЩО ЗАДОВОЛЬНЯЮТЬ УМОВУ ЛІПШИЦЯ, І ФОРМУЛА НЬЮТОНА—ЛЕЙБНІЦА

У цій статті для досить широкого класу функцій, що задовольняють певну умову, доведено основне співвідношення інтегрального числення — формулу Ньютона—Лейбніца, за допомогою якої в шкільному курсі математики вводиться поняття інтеграла (див.: «Алгебра і початки аналізу, 9—10», с. 195—200). Розглядаються питання, пов'язані з похідною та її застосуваннями. Це дещо доповнений варіант лекції, яку автор прочитав учням IX—X класів шкіл Києва.

1. Функції, що задовольняють умову Ліпшиця

Означення. *Нехай f — функція, визначена на відрізку $[a; b]$. Говорять, що вона задовольняє умову Ліпшиця порядку $\alpha > 0$, коли існує таке число c, що нерівність*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant c\,|x_1 - x_2|^\alpha \qquad (1)$$

виконується для довільних значень $x_1 \in [a; b]$, $x_2 \in [a; b]$.

Числа c і α залежать від функції f, тому далі вживатимемо такі позначення: $c = c(f)$, $\alpha = \alpha(f)$.

Розглянувши властивості класу функцій, що задовольняють умову Ліпшиця, переконаємося в тому, що цей клас є досить широким.

1. ***Функція, що задовольняє умову Ліпшиця на відрізку $[a; b]$, — обмежена.***

Справді, використавши (1) з $x_1 = x$, $x_2 = a$, маємо для довільного $x \in [a; b]$:

$$|f(x)| = |f(x) - f(a) + f(a)| \leqslant |f(x) - f(a)| + \\ + |f(a)| \leqslant c \cdot |x - a|^\alpha + |f(a)| \leqslant c \cdot |b - a|^\alpha + |f(a)|.$$

2. ***Сума (різниця) функцій, що задовольняють умову Ліпшиця порядку α на $[a; b]$, також задовольняє умову Ліпшиця порядку α на $[a; b]$.***

Справді, якщо функції f і g задовольняють умову виду (1), то у випадку суми дістаємо для довільних $x_1 \in [a; b]$, $x_2 \in [a; b]$:

$$|(f(x_1) + g(x_1)) - (f(x_2) + g(x_2))| = |(f(x_1) - f(x_2)) + \\ + (g(x_1) - g(x_2))| \leqslant |f(x_1) - f(x_2)| + |g(x_1) - g(x_2)| \leqslant \\ \leqslant c(f) \cdot |x_1 - x_2|^\alpha + c(g) \cdot |x_1 - x_2|^\alpha = (c(f) + \\ + c(g)) \cdot |x_1 - x_2|^\alpha.$$

3. ***Добуток функцій, що задовольняють умову Ліпшиця порядку α на $[a; b]$, також задовольняє умову Ліпшиця порядку α на $[a; b]$.***

Для довільних $x \in [a; b]$, $x_2 \in [a; b]$ маємо:

$$|f(x_1)\,g(x_1) - f(x_2)\,g(x_2)| = |(f(x_1) - f(x_2))\,g(x_1) + \\ + f(x_2)\,(g(x_1) - g(x_2))| \leqslant |f(x_1) - f(x_2)| \cdot |g(x_1)| + \\ + |f(x_2)| \cdot |g(x_1) - g(x_2)| \leqslant A \cdot (c(f) + c(g)) \cdot |x_1 - x_2|^\alpha,$$

де A — число таке, що

$$|f(x)| \leqslant A,\quad |g(x)| \leqslant A$$

для всіх $x \in [a; b]$. Таке число існує за властивістю 1.

4. ***Частка $\frac{f}{g}$ функцій f і g таких, що задовольняють умову Ліпшиця порядку α на $[a; b]$ і деякого числа Δ $|g(x)| \geqslant \Delta > 0$ для всіх $x \in [a; b]$, задовольняє умову Ліпшиця порядку α.***

Доведення випливає з нерівностей:

$$\left|\frac{f(x_1)}{g(x_1)} - \frac{f(x_2)}{g(x_2)}\right| = \frac{|f(x_1)g(x_2) - f(x_2)g(x_1)|}{|g(x_1)g(x_2)|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\Delta^2}\left|[f(x_1) - f(x_2)]g(x_2) + f(x_2)[g(x_2) - g(x_1)]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A}{\Delta^2}(c(f) + c(g)) \cdot |x_1 - x_2|^{\alpha}, \quad x_1 \in [a;\ b], \quad x_2 \in [a;\ b],$$

і A — число з доведення властивості 3.

5. ***Якщо функція g задовольняє умову Ліпшиця порядку $\alpha(g)$ на відрізку $[c; d]$, а функція f набуває значення з $[c; d]$ задовольняє умову Ліпшиця порядку $\alpha(f)$ на відрізку $[a; b]$, то складена функція***

$$h(x) = g(f(x)), \quad x \in [a;\ b]$$

задовольняє умову Ліпшиця порядку $\alpha(f) \cdot \alpha(g)$ на $[a; b]$.

Доведення очевидне:

$$|h(x_1) - h(x_2)| = |g(f(x_1)) - g(f(x_2))| \leqslant c(g) \times$$
$$\times |f(x_1) - f(x_2)|^{\alpha(g)} \leqslant c(g) \cdot c(f)^{\alpha(g)} \cdot |x_1 - x_2|^{\alpha(f)\cdot\alpha(g)}$$

для довільних $x_1 \in [a;\ b]$, $x_2 \in [a;\ b]$.

6. ***Функція, що задовольняє умову Ліпшиця на відрізку $[a; b]$, — неперервна на цьому відрізку.***

Приклади

1. Многочлен задовольняє умову Ліпшиця порядку 1 на довільному відрізку $[a; b]$.

Справді, функція $f(x) = c$, $x \in [a; b]$, де c — число, яке задовольняє умову Ліпшиця довільного порядку α з числом $c(f) = 0$. Функція $f(x) = x$, $x \in [a; b]$ задовольняє умову Ліпшиця порядку 1 з числом $c(f) = 1$. Залишається використати властивості 3 і 2.

2. Функції $\sin x$ і $\cos x$ задовольняють умову Ліпшиця порядку 1 на всій числовій прямій.

За відомою нерівністю маємо:

$$|\sin x_1 - \sin x_2| = 2\left|\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x_1 + x_2}{2}\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2 \cdot \left|\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\right| \cdot 1 \leqslant |x_1 - x_2|$$

для довільних дійсних x_1 і x_2. Аналогічно для функції $\cos x$.

Як наслідок властивості 4 маємо, що функції $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$ задовольняють умову Ліпшиця порядку 1 на довільному відрізку $[a; b]$, що міститься в множині визначення.

Можна також довести за допомогою теореми Лагранжа, що функції $\log_a x$ і a^x задовольняють умову Ліпшиця порядку 1 на відрізках, що лежать у множині визначення. Аналогічну властивість має відношення двох многочленів. Отже, клас функцій, що задовольняють умову Ліпшиця, дуже широкий. Усі відомі нам функції задовольняють умову Ліпшиця на певних відрізках. Складніше навести приклади функцій, для яких умова Ліпшиця не виконується.

Вправи.

1. Довести, що функція $f(x) = |x|$ задовольняє умову Ліпшиця порядку 1 на $]-\infty, \infty[$.

2. Визначити функції, що задовольняють умову Ліпшиця порядку $\alpha > 1$ на відрізку $[a; b]$.

3. Функція $f(x) = \sqrt{x}$ задовольняє умову Ліпшиця порядку 1 на кожному інтервалі $[a, \infty[$ з $a > 0$ і задовольняє умову Ліпшиця порядку $\frac{1}{2}$ на кожному відрізку $[0; a]$, $a > 0$.

4. Нехай f — функція, що визначена і задовольняє умову Ліпшиця порядку 1 на всій осі зі сталою $c(f) < 1$, тобто для всіх x_1, x_2:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant c(f)|x_1 - x_2|.$$

Довести, що рівняння

$$f(x) = x$$

не може мати більш як один розв'язок. Якщо x^* — розв'язок цього рівняння, то

$$|x^* - z_n| \leqslant c(f)^n \cdot |x^* - z_0|, \quad n \geqslant 1,$$

де z_0 — довільне число,

$$z_1 = f(z_0), \ z_2 = f(z_1), \ \ldots, \ z_n = f(z_{n-1}), \ldots .$$

Таким чином, для довільного числа z_0 маємо:

$$z_n \to x^*, \ n \to \infty!$$

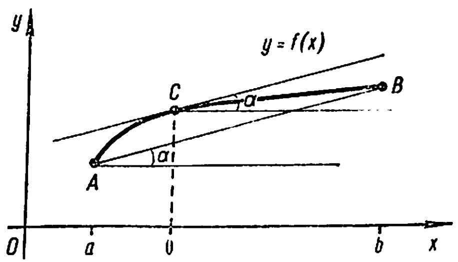
2. Теорема Лагранжа

Припустимо, що f неперервна на відрізку $[a; b]$ функція і що для кожного $x \in]a; b[$ існує похідна $f'(x)$. Тоді існує точка $\theta \in]a; b[$, така, що

$$f(b) - f(a) = f'(\theta)(b - a).$$

Ця теорема є фундаментальним твердженням диференціального числення, завдяки якому можна аналізувати поведінку функцій за допомогою похідної. Наслідками теореми Лагранжа є, наприклад, такі твердження: 1) *якщо похідна функції дорівнює* 0 *в усіх точках інтервалу, то функція на цьому інтервалі стала*; 2) *якщо похідна функції додатна в усіх точках інтервалу, то функція на цьому інтервалі зростає.*

Формальне доведення теореми Лагранжа виходить за межі цієї статті, подамо лише геометричну її інтерпретацію. Нагадаємо, що значення похідної в точці є тангенсом кута нахилу до осі абсцис дотичної до графіка функції у відповідній точці.



Мал. 1

Відношення

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

є тангенсом нахилу хорди AB до осі абсцис (мал. 1). Здається очевидним існування точки на графіку функції, в якій дотична паралельна хорді AB. Такою є точка C на мал. 1 (відповідне значення аргументу є θ).

3. Суми Дарбу

У цьому розділі ми використаємо без доведення таке інтуїтивно очевидне твердження: ***неперервна на відрізку функція набуває на цьому відрізку найменшого і найбільшого значення.***

Нехай f — неперервна на відрізку $[a; b]$ функція. Позначимо через $\lambda = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ довільний набір точок з $[a; b]$ таких, що

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Нехай $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ — довжина відрізка $[x_k; x_{k+1}]$, індекс k набуває значення $0, 1, \ldots, n-1$.

Покладемо також

$$|\lambda| = \max\{\Delta x_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_{n-1}\},$$

де $|\lambda|$ — найбільша з довжин відрізків, на які точки λ розбивають відрізок $[a; b]$.

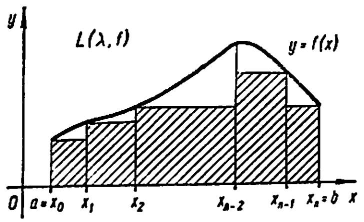
Для кожного k на відрізку $[x_k; x_{k+1}]$ визначимо числа m_k і M_k:

$$m_k = \min_{x_k < x < x_{k+1}} f(x), \quad M_k = \max_{x_k < x < x_{k+1}} f(x);$$

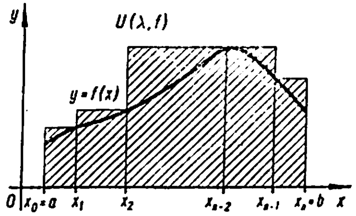
m_k і M_k — найменше і найбільше значення функції f на відрізку $[x_k; x_{k+1}]$.

Означення 1. *Нижньою сумою Дарбу для функції f і набору λ на відрізку* $[a; b]$ *називається сума*:

$$m_0\Delta x_0 + m_1\Delta x_1 + m_2 \cdot \Delta x_2 + \cdots + m_{n-1} \cdot \Delta x_{n-1} = L(\lambda, f).$$



Мал. 2



Мал. 3

О з н а ч е н н я 2. *Верхньою сумою Дарбу для функції f і набору λ на відрізку $[a;\ b]$ називається сума:*

$$M_0\Delta x_0 + M_1\Delta x_1 + M_2 \cdot \Delta x_2 + \cdots + M_{n-1} \cdot \Delta x_{n-1} = U(\lambda,\ f).$$

Очевидно, що завжди

$$L(\lambda, f) \leqslant U(\lambda, f).$$

Суми Дарбу мають таку геометричну інтерпретацію. Припустимо, що $f(x) \geqslant 0$, $x \in [a;\ b]$. Множина точок площини, що лежать під графіком функції $y = f(x)$ і над відрізком $[a;\ b]$, називається криволінійною трапецією. Сума $L(\lambda, f)$ є площа фігури, що складається з прямокутників, розташованих у криволінійній трапеції (мал. 2), сума $U(\lambda, f)$ є площа фігури, що складається з прямокутників і містить у собі криволінійну трапецію (мал. 3).

4. Визначений інтеграл. Формула Ньютона—Лейбніца

О з н а ч е н н я. *Якщо існує єдине число J, таке, що для довільного набору λ справджується нерівність*

$$L(\lambda, f) \leqslant J \leqslant U(\lambda,\ f),$$

то число J називається інтегралом від функції f на відрізку $[a;\ b]$.

Інтеграл J звичайно позначають символом:

$$J = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Можна довести, що для неперервної на відрізку $[a; b]$ функції інтеграл існує. Це доведення досить складне. Воно значно спрощується у випадку функції f, що задовольняє умову Ліпшиця.

Теорема. ***Нехай функція f задовольняє умову Ліпшиця порядку α на відрізку $[a;\ b]$. Припустимо, що функція f має первісну F на $[a;\ b]$. Тоді інтеграл від функції f на відрізку $[a;\ b]$ існує і справджується рівність***

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

(формула Ньютона—Лейбніца).

Д о в е д е н н я. Спочатку переконаємося, що для довільного набору λ справджуються нерівності:

$$L(\lambda,\ f) \leqslant F(b) - F(a) \leqslant U(\lambda,\ f).$$

Скористаємося позначеннями п. 3. При кожному k застосуємо теорему Лагранжа до функції F на відрізку $[x_k;\ x_{k+1}]$:

$$F(x_{k+1}) - F(x_k) = F'(\theta_k) \cdot \Delta x_k,$$

де $\theta_k \in]x_k;\ x_{k+1}[$. За означенням первісної, $F'(\theta_k) = f(\theta_k)$ і, очевидно,

$$m_k \leqslant f(\theta_k) \leqslant M_k.$$

Тому

$$m_k \cdot \Delta x_k \leqslant F(x_{k+1}) - F(x_k) \leqslant M_k \cdot \Delta x_k$$

для $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Додамо всі ці нерівності:

$$m_0 \cdot \Delta x_0 + m_1 \Delta x_1 + \cdots + m_{n-1} \cdot \Delta x_{n-1} \leqslant F(x_n) - F(x_0) \leqslant M_0 \cdot \Delta x_0 + M_1 \cdot \Delta x_1 + \cdots + M_{n-1} \cdot \Delta x_{n-1},$$

або

$$L(\lambda, f) \leqslant F(b) - F(a) \leqslant U(\lambda, f). \qquad (2)$$

Доведемо тепер, що $F(b) - F(a)$ — це єдине число, яке задовольняє останню нерівність для довільного набору λ.

Справді, за означенням,

$$M_k - m_k = f(x_k^*) - f(x_k^{**}),$$

де $x_k^* \in [x_k; x_{k+1}]$, $x_k^{**} \in [x_k; x_{k+1}]$. Оскільки f задовольняє умову Ліпшиця порядку α, то

$$f(x_k^*) - f(x_k^{**}) = |f(x_k^*) - f(x_k^{**})| \leqslant c \cdot |x_k^* - x_k^{**}|^{\alpha} \leqslant \leqslant c \cdot \Delta x_k^{\alpha} \leqslant c \cdot |\lambda|^{\alpha},$$

де c — стала. Отже, при кожному k

$$M_k - m_k \leqslant c \cdot |\lambda|^{\alpha}.$$

Звідси

$$U(\lambda, f) - L(\lambda, f) = (M_0 - m_0)\Delta x_0 + (M_1 - m_1)\Delta x_1 + \cdots + (M_{n-1} - m_{n-1})\Delta x_{n-1} \leqslant c \cdot |\lambda|^{\alpha} \cdot (b-a),$$

причому величину $|\lambda|$ можна зробити як завгодно малою. Якщо два різні числа J_1 і J_2 $(J_1 < J_2)$ задовольняють нерівності (2) для всіх наборів λ, то мають виконуватися нерівності

$$0 < J_2 - J_1 \leqslant U(\lambda, f) - L(\lambda, f) \leqslant c \cdot (b-a) \cdot |\lambda|^{\alpha}$$

для всіх наборів λ. Маємо суперечність. Тому існує тільки єдне число, а саме: $F(b) - F(a)$, яке задовольняє нерівності (2) при всіх λ.

З а у в а ж е н н я. Теорему доведено за умови і с н у в а н н я первісної для функції f. Зокрема, для неперервної функції первісна існує, але це твердження доводити не будемо.

Вправи.

1. Використаємо позначення п. 3. На кожному відрізку $[x_k; x_{k+1}]$ візьмемо довільну точку ξ_k, тобто $x_k \leqslant \xi_k \leqslant x_{k+1}$. Сума

$$f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} = S(\lambda, \{\xi_k\}, f)$$

називається інтегральною сумою для функції f, набору λ і відповідного набору точок $\{\xi_k\}$.

Дайте геометричну інтерпретацію інтегральної суми. За умов теореми п. 4 доведіть нерівність:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - S(\lambda, \{\xi_k\}, f) \right| \leqslant c(f) \cdot (b-a) \cdot |\lambda|^{\alpha}.$$

В к а з і в к а. Переконайтеся, що

$$L(\lambda, f) \leqslant S(\lambda, \{\xi_k\}, f) \leqslant U(\lambda, f).$$

2. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^a + 2^a + \ldots + (n-1)^a}{n^{a+1}}$, $a > 0$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{k \cdot n} + \dfrac{1}{kn+1} + \cdots + \dfrac{1}{mn+1}\right)$, $k < m$ $(k, m \in N)$.

В к а з і в к а. У випадку а) на відрізку $[0; 1)$ розглянути функцію x^a, набір

$$\lambda = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\right\}$$

і покласти $\xi_k = x_k = \dfrac{k}{n}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

3. Довести нерівності:

а) $\left| \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} - \ln 2 \right| \leqslant \dfrac{1}{n}$, $n \geqslant 1$;

б) $\left| \dfrac{n}{n^2+1^2} + \dfrac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n^2} - \dfrac{\pi}{4} \right| \leqslant \dfrac{1}{n}$, $n \geqslant 1$.

Р. П. УШАКОВ, Б. І. ХАЦЕТ

ОПУКЛІ ПОСЛІДОВНОСТІ ТА ПОВ'ЯЗАНІ З НИМИ НЕРІВНОСТІ

Характерною ознакою сучасної науково-технічної революції є математизація науки й виробництва, інтенсивне застосування математичних методів у різноманітних галузях теоретичного знання і практичної діяльності людини. Однією з найважливіших прикладних галузей математики є *математичне програмування*, яке виникло в середині XX ст. під впливом потреб практики, пов'язаних з пошуком оптимальних розв'язків задач проектування, планування і управління складними системами. Основою математичного програмування є теорія та методи розв'язування екстремальних задач, серед яких вирізняються задачі на дослідження опуклих функцій, заданих на опуклих множинах. Створено навіть окремий розділ теорії оптимізації процесів — *опукле програмування*.

У попередніх випусках цього збірника було вміщено ряд статей про опуклі функції та їх застосування до важливих для практики й цікавих нерівностей.

У цій статті розглянемо спеціальний клас опуклих функцій — опуклі числові послідовності.

Основні відомості про опуклі функції

Означення 1. *Множина точок площини називається опуклою, якщо вона містить разом з довільними двома своїми точками весь відрізок, що сполучає ці точки.*

Одну точку також вважають опуклою множиною.

Опуклими множинами є, наприклад, трикутник, паралелограм, круг, еліпс, смуга між двома паралельними прямими, довільний відрізок, промінь, пряма, півплощина.

На числовій прямій опуклими є лише такі множини: *відрізки* $[a; b]$, *інтервали* $]a; b[$, *півсегменти* $]a; b]$ або $[a; b[$, *промені* $]-\infty, a]$, $]\infty; a[$, $[a; +\infty[$, $]a; +\infty[$, а також *уся пряма* $]-\infty; +\infty[$.

Будь-яку з таких множин називатимемо *проміжком* і позначатимемо символом $\langle a; b\rangle$ (a; b — числа або $\pm\infty$).

Означення 2. *Функція називається опуклою (угнутою) на проміжку $\langle a; b\rangle$, якщо для довільних $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ і довільних невід'ємних λ_1, λ_2 при $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ виконується нерівність*

$$\frac{f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)}{(f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \ge \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2))}.$$

Теорема. ***Для того, щоб неперервна функція f була опуклою (угнутою) на проміжку $\langle a; b\rangle$, необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова:***

$$\frac{f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \le \frac{1}{2} f(x_1) + \frac{1}{2} f(x_2)}{\left(f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \ge \frac{1}{2} f(x_1) + \frac{1}{2} f(x_2)\right)}.$$

(Доведення цієї теореми можна знайти в статті: Хацет Б. І., Шейнцвіт Р. П. Опуклі функції та нерівності. У світі математики. К., Рад. шк., 1975, вип. 6, с. 131).

Зауважимо, що геометричний зміст означення опуклої функції полягає ось у чому: *множина усіх точок площини, які лежать на графіку функції та вище від нього, є опуклою.*

Можна довести, що ***для опуклої на проміжку $\langle a; b\rangle$ функції не існує більш як одна точка строгого мінімуму*** (значення функції в цій точці є найменшим з усіх її значень на проміжку).

Означення 3. *Послідовність $\{a_n\}$ називається опуклою (угнутою), якщо для будь-якого натурального $n \ge 2$ справджується нерівність*

$$a_n \le \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}) \quad \left(a_n \ge \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})\right). \qquad (1)$$

Зауважимо, що іноді говорять про опуклість чи угнутість також *скінченної* послідовності $\{a_n\}_{n=1}^{m}$, маючи на увазі, що умова (1) виконується для $n = 2, 3, \ldots, m-1$.

Приклади.

1. Для арифметичної прогресії $\{a_n\}$ справджується рівність $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$ $(n \geqslant 2)$, тобто арифметична прогресія є водночас опукла і угнута послідовність. Очевидно, що це єдина послідовність з такою властивістю, бо з рівності $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$ випливає, що $\{a_n\}$ — арифметична прогресія; адже в цьому разі

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n \quad (n \geqslant 2).$$

2. Геометрична прогресія $\{b_n\}$ з додатними членами є опукла послідовність. Справді, $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, де q — знаменник прогресії, а тому

$$b_n \leqslant \frac{1}{2}(b_{n-1} + b_{n+1}) \leftrightarrow b_1 q^{n-1} \leqslant \frac{1}{2}(b_1 q^{n-2} + b_1 q^{n}) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow 2q \leqslant 1 + q^2 \leftrightarrow 0 \leqslant (1-q)^2.$$

Остання нерівність правильна, тому правильна й вихідна нерівність.

3. Скінченна послідовність $a_n = A_m^n$, де $m > 2$; $n = 1, 2, \ldots, m-2$ (A_m^n — це число розміщень з m елементів по n), є опуклою. Справді,

$$a_n \leqslant \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}) \leftrightarrow 2A_m^n \leqslant A_m^{n-1} + A_m^{n+1} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow 2 \cdot \frac{m!}{(m-n)!} \leqslant \frac{m!}{(m-n+1)!} + \frac{m!}{(m-n-1)} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow 2 \leqslant \frac{1}{m-n+1} + m - n.$$

Остання нерівність правильна, бо $m - n \geqslant 2$.

4. Послідовність із загальним членом $a_n = \frac{1}{n}$ опукла. Справді,

$$a_n \leqslant \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}) \leftrightarrow \frac{2}{n} \leqslant \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} \leftrightarrow \frac{2}{n} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2n}{n^2-1} \leftrightarrow n^2 - 1 \leqslant n^2.$$

5. Послідовність $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ угнута. Справді, $a_n \geqslant \frac{1}{2} \times$
$\times (a_{n-1} + a_{n+1}) \leftrightarrow 2\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \leftrightarrow 2\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{2}{n} \geqslant 2 \times$
$\times \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \leftrightarrow \frac{2}{n} \geqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \leftrightarrow 1/n \geqslant \frac{1}{n+1}.$

6. Послідовність $a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$ (n двійок) угнута.

Насамперед зауважимо, що

$$a_n < \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{4}}}} = 2,$$

отже, виконується подвійна нерівність $1 < a_n < 2$. Оскільки $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$, то $a_{n-1} = a_n^2 - 2$. Тепер маємо: $a_n \geqslant \frac{1}{2} \times$
$\times (a_{n-1} + a_{n+1}) \leftrightarrow 2a_n \geqslant a_n^2 - 2 + a_{n+1} \leftrightarrow (a_n - 1)^2 + a_{n+1} \leqslant 3.$
Остання нерівність правильна, оскільки $(a_n - 1)^2 < 1$ та $a_{n+1} < 2$.

7. Послідовність, яку задано рекурентно умовами $a_1 > 0$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$, угнута. Справді, легко бачити, що $a_n > 0$ для всіх натуральних n. Далі маємо: $a_n \geqslant \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}) \leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}} \geqslant \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + a_n + \frac{1}{a_n}\right) \Leftrightarrow a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}} \geqslant a_n + \frac{1}{a_n} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{a_{n-1}} \geqslant \frac{1}{a_n} \Leftrightarrow a_n \geqslant a_{n-1} \Leftrightarrow a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}} \geqslant a_{n-1} \Leftrightarrow \frac{1}{a_{n-1}} \geqslant 0.$$

Зв'язок з опуклими (угнутими) функціями

Опукла (угнута) послідовність є, очевидно, окремим випадком опуклої (угнутої) функції, а саме: функції, заданої на множині натуральних чисел. Якщо опукла (угнута) функція f, задана на множині X, яка містить множину N, то послідовність $a_n = f(n)$, $n = 1, 2, \ldots$ також опукла (угнута). Адже з того, що нерівність

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2)) \left(f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2))\right)$$

виконується для всіх $x_1 x_2 \in X$, випливає, що вона виконується, зокрема, для $x_1 = n - 1$ і $x_2 = n + 1$ при довільному $n \geqslant 2$.

Отже, для доведення опуклості (угнутості) послідовності $\{a_n\}$, загальний член якої можна подати як значення $f(n)$ функції f, заданої на ширшій за N множині x (наприклад, на множині $X = [1; \infty[$), можна використовувати усі застосовні до такої функції методи встановлення опуклості (угнутості); зокрема, у випадках диференційовності f можна досліджувати монотонність її першої чи знак другої похідної (див.: Ушаков Р. П., Хацет Б. І. Опуклі функції та нерівності.— У світі математики, вип. 10, с. 81—98).

Приклади.

1. Послідовність із загальним членом $a_n = \frac{1}{n}$ можна для дослідження опуклості (угнутості) замінити функцією $f(x) = \frac{1}{x}$, заданою на проміжку $[1; \infty[$. Її похідна $f'(x) = -\frac{1}{x^3}$ зростає на проміжку $[1; \infty[$, тому функція $f(x) = \frac{1}{x}$ опукла на цьому проміжку, а разом з нею опукла дана послідовність (порівняйте з наведеним на с. 129 прикладом 4).

2. Нехай P_n — периметр правильного n-кутника, вписаного у коло радіуса $R: P_n = 2nR \sin\frac{\pi}{n}$, $n \geqslant 3$. Виявляється, що послідовність P_n угнута. Справді, відповідна функція $y = 2Rx \sin\frac{\pi}{x}$, $x \geqslant 3$ диференційовна, причому $y'' = -\frac{2R\pi^2}{x^3} \times \sin\frac{\pi}{x}$. При $x \geqslant 3$ $\sin\frac{\pi}{x} > 0$ і, отже, $y'' < 0$.

Розглядувана функція, а тому й послідовність P_n угнуті. Зауважимо, що звідси, зокрема, випливає нерівність $2n \sin \times \frac{\pi}{n} > (n-1)\sin\frac{\pi}{n-1} + (n+1)\sin\frac{\pi}{n+1}$, $n \geqslant 3$, безпосередньо довести яку досить складно.

Вправи.

1. Довести, що послідовність $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ угнута.

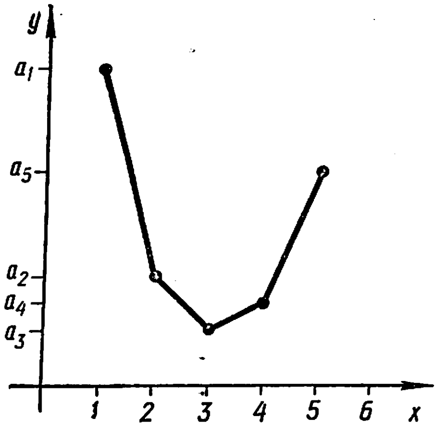
Вказівка: Розгляньте функцію $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, $x \geqslant 1$ і використайте подвійну нерівність $\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$, $x > 0$.

2. Довести, що послідовність $a_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n$ угнута.

3. Довести, що послідовність $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ опукла.

4. Довести, що послідовність $a_n = n \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$ опукла.

Зауважимо, що у випадку існування функції f, заданої на проміжку $[1; \infty[$ і пов'язаної з даною послідовністю $\{a_n\}$ співвідношенням $a_n = f(n)$, $n \in N$, з опуклості послідовності $\{a_n\}$ аж ніяк не випливає опуклість функції f. Наприклад, функція $f(x) = \sin \pi x$ не є опуклою (чи угнутою) на проміж-



Мал. 1

ку $[1; \infty[$, хоч послідовність із загальним членом $a_n = \sin \pi n = 0$ є сталою, а тому може вважатися опуклою (чи угнутою).

Проте можна навести цікавий окремий випадок, коли опуклість послідовності обумовлює опуклість пов'язаної з нею функції.

Справді, нехай $\{a_n\}$ — опукла послідовність, а f — функція, задана на проміжку $[1; \infty[$ і така, що $f(n) = a_n$, $n \in N$, причому на кожному з проміжків $[n; n+1[$ f — лінійна, тобто $f(x) = a_n + (x - n) \times (a_{n+1} - a_n)$ для $x \in [n; n+1[$. Тоді f також опукла на проміжку $[1; \infty[$.

Іншими словами, якщо послідовність $\{a_n\}$ опукла, то ламана (з нескінченною кількістю ланок), вершинами якої є точки $A_n(n; a_n)$, є графіком функції f, опуклої на $[1; \infty[$ (див. мал. 1).

Доведення. Зауважимо насамперед, що опуклість f досить довести на кожному скінченному проміжку $[1; n]$, $n \in N$ (чому?). А на такому проміжку функцію f можна задати формулою:

$$f(x) = \left(\frac{a_1 + a_3}{2} - a_2\right)|x - 2| + \left(\frac{a_2 + a_4}{2} - a_3\right)|x - 3| + \cdots + \left(\frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} - a_k\right)|x - k| + \cdots + \left(\frac{a_{n-2} + a_n}{2} - a_{n-1}\right)|x - (n - 1)| + \frac{a_2 - a_1 + a_n - a_{n-1}}{2}x + \frac{2a_1 - a_2 - (n-1)a_n + na_{n-1}}{2} \quad (2)$$

(Пропонуємо читачам перевірити цю рівність для проміжку $[k; k + 1]$, де k — довільне натуральне число, яке не перевищує $n - 1$).

Останні два члени правої частини рівності (2) утворюють лінійну, а тому й опуклу функцію. Сума решти членів також опукла функція, бо є лінійною комбінацією опуклих функцій виду $y = |x - k|$ з невід'ємними (в силу опуклості послідовності $\{a_n\}$) коефіцієнтами виду $\frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} - a_k$ (див. означення 3). Отже, в цілому $f(x)$ опукла як сума опуклих функцій.

Аналогічну властивість має угнута послідовність.

Властивості опуклих (угнутих) послідовностей

Теорема 1. *Якщо послідовність $\{a_n\}$ опукла (угнута) і $k > 0$, то послідовність $\{ka_n\}$ також опукла (угнута).*

Теорема 2. *Якщо послідовності $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ опуклі (угнуті) одночасно, k_1 і k_2 — додатні числа, то послідовність $\{k_1a_n + k_2b_n\}$ опукла (угнута).*

Довести ці теореми пропонуємо читачам. Очевидно, що останню теорему можна поширити на будь-яке (скінченне) число послідовностей.

Вправи.

1. Довести опуклість таких послідовностей:
а) $a_n = c_0 + c_1n + c_2n^2 + \ldots + c_kn^k$, $c_i > 0$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$;
б) $a_n = 2n! + \frac{3}{n}$; в) $a_n = \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3}$.
2. Довести угнутість таких послідовностей:
а) $a_n = n + \sqrt{n}$; б) $a_n = 3\ln n + 5n\sin\frac{\pi}{n}$.
3. Теорема 3. *Якщо послідовність $\{a_n\}$ опукла (угнута) і $k < 0$, то послідовність $\{ka_n\}$ угнута (опукла). Довести і узагальнити на випадок кількох послідовностей.*

Теорема 4. *Якщо послідовність $\{a_n\}$ угнута, а функція f угнута і монотонно зростає, то*

послідовність $\{f(a_n)\}$ ***угнута.*** (Природно припустити, що значення a_n, $n \in N$ належать області визначення f).

Доведення. Оскільки f угнута функція, то

$$\frac{1}{2}\left(f(a_{n-1}) + f(a_{n+1})\right) \leqslant f\left(\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\right). \qquad (3)$$

Послідовність $\{a_n\}$ угнута, тому $\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} \leqslant a_n$. Функція f монотонно зростає, отже, $f\left(\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\right) \leqslant f(a_n)$. З останньої нерівності і нерівності (3) дістаємо: $\frac{1}{2}\left(f(a_{n-1}) + f(a_{n+1})\right) \leqslant f(a_n)$, тобто послідовність $\{f(a_n)\}$ угнута.

Теорема 5. ***Якщо послідовність*** $\{a_n\}$ ***опукла, а функція*** f ***опукла і монотонно зростає, то послідовність*** $\{f(a_n)\}$ ***опукла.***

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 4.

Вправи.

Довести такі твердження:

1. Теорема 6. *Якщо* $\{a_n\}$ *угнута послідовність, а* f *— опукла і монотонно спадна функція, то послідовність* $\{f(a_n)\}$ *опукла.*

2. Теорема 7. *Якщо* $\{a_n\}$ *опукла послідовність, а* f *— угнута і монотонно спадна функція, то послідовність* $\{f(a_n)\}$ *угнута.*

3. Спираючись на теорему 4, довести угнутість послідовностей: а) $a_n = \ln n$; б) $a_n = \ln \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$; в) $a_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}$; г) $a_n = \operatorname{arctg} \sqrt{n}$; д) $a_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}}$.

4. Довести, що послідовність $a_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\dots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}$ угнута.

Вказівка. За теоремою 4 послідовності $a_n = \sqrt{n}$ та $a_n = \sqrt{n-1+\sqrt{n}}$ угнуті.

Зауважимо, що з угнутості розглядуваної послідовності дістаємо нерівність:

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\dots+\sqrt{n-1}}} + \sqrt{1+\sqrt{2+\dots+\sqrt{n+\sqrt{n+1}}}} < 2\sqrt{1+\sqrt{2+\dots+\sqrt{n}}}.$$

5. Спираючись на теорему 5, довести опуклість послідовностей:

а) $a_n = e^{n!}$; б) $a_n = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$; в) $a_n = n! \ln n!$; г) $a_n = \left(n! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)^3$.

6. Спираючись на теорему 6, довести опуклість послідовностей:

а) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$; б) $a_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}$; в) $a_n = \log_{0,1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$; г) $a_n = e^{-\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}}$.

7. Довести угнутість послідовностей:

а) $a_n = \arccos \frac{1}{n}$; б) $a_n = -(n!)^2$; в) $a_n = \sqrt{|1-n^2|}$.

Ми розглянули питання про зв'язок між опуклими (угнутими) послідовностями і функціями. Але тепер звернемося до послідовностей, для яких дослідження опуклості (угнутості) за допомогою переходу до відповідної функції недоцільне або й неможливе.

Нерівності, пов'язані з опуклими послідовностями

Для опуклої послідовності $\{a_n\}$ виконується нерівність

$$a_{n+1} + a_n \leqslant a_{n-1} + a_{n+2} \quad (n \geqslant 2). \qquad (4)$$

Справді, оскільки $\{a_n\}$ — опукла послідовність, то $2a_n \leqslant \leqslant a_{n-1}+a_{n+1}$, $2a_{n+1} \leqslant a_n + a_{n+2}$. Додавши ці нерівності, дістанемо нерівність (4). Аналогічно можна довести, що для угнутої послідовності $\{a_n\}$ виконується нерівність

$$a_{n+1}+a_n \geqslant a_{n-1}+a_{n+2} \quad (n \geqslant 2). \tag{5}$$

Вправи.

1. Довести, що нерівності (4) і (5) перетворюються у рівності лише у випадку, коли $\{a_n\}$ — арифметична прогресія.
2. З допомогою нерівності (4) довести (при $n \leqslant 2$) нерівності:

а) $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+2}$; б) $n!+(n+1)!<(n-1)!+(n+2)!$;

в) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}+\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}+\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+3}$.

3. З допомогою нерівності (5) довести (при $n \geqslant 2$) нерівності:

а) $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}>\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}+\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}$;

б) $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}>\sqrt{n-1}+\sqrt{n+2}$.

4. Довести, що при $n \geqslant 4$ виконуються нерівності:

а) $n \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}+(n+1)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n+1}<(n-1)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n-1}+(n+2)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n+2}$;

б) $n \sin\frac{\pi}{n}+(n+1)\sin\frac{\pi}{n+1}>(n-1)\sin\frac{\pi}{n-1}+(n+2)\sin\frac{\pi}{n+2}$.

5. Довести нерівності:

а) $\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}>\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$;

б) $\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}}>1+\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{5}}}$.

Для опуклої послідовності $\{a_n\}$ виконується нерівність

$$a_{k-1}+a_{k+1} \leqslant a_{k-l}+a_{k+l} \quad (2 \leqslant l \leqslant k-1). \tag{6}$$

Справді, оскільки $\{a_n\}$ — опукла послідовність, то

$$2a_{k-1} \leqslant a_{k-2}+a_k, \quad 2a_{k+1} \leqslant a_k + a_{k+2}.$$

Додавши ці нерівності, дістанемо: $2(a_{k-1}+a_{k+1}) \leqslant a_{k-2}+ + a_{k+2}+2a_k$. Додавши до цієї нерівності нерівність $2a_k \leqslant \leqslant a_{k-1}+a_{k+1}$, дістанемо $a_{k-1}+a_{k+1} \leqslant a_{k-2}+a_{k+2}$. Аналогічно доведемо, що $a_{k-2}+a_{k+2} \leqslant a_{k-3}+a_{k+3}, \ldots$ і, нарешті, $a_{k-l+1}+a_{k+l-1} \leqslant a_{k-l}+a_{k+l}$.

З цих нерівностей і випливає нерівність (6).

Вправи.

1. Довести, що для опуклої послідовності $\{a_n\}$ виконується нерівність $2a_n \leqslant a_{n-l}+a_{n+l}$ $(l \leqslant n-1,\ n \geqslant 2)$.
2. Довести, що для угнутої послідовності $\{a_n\}$ мають місце нерівності $2a_k \geqslant a_{k-1}+a_{k+1} \geqslant a_{k-2}+a_{k+2} \geqslant \cdots \geqslant a_{k-l}+a_{k+l}$.
3. Довести, що для опуклої послідовності $\{a_n\}$ виконується нерівність $a_p+a_k \leqslant a_{p-l}+a_{k+l}$ $(l<p<k+l)$.
4. Довести, що для угнутої послідовності $\{a_n\}$ виконується нерівність $a_p+a_k \geqslant a_{p-l}+a_{k+l}$ $(l<p<k+l)$.
5. Довести нерівності $(1 \leqslant l < p < k+l)$:

а) $b_p+b_k<b_{p-l}+b_{k+l}$, де $b_l>0$ — члени геометричної прогресії;

б) $p!+k!<(p-l)!+(k+l)!$

в) $\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p}+\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}>\left(1+\frac{1}{p-l}\right)^{p-l}+\left(1+\frac{1}{k+l}\right)^{k+l}$.

6. Довести нерівність

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}>\sqrt{2}+ + \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}.$$

Для опуклої послідовності $\{a_n\}$ виконується нерівність

$$a_1+a_n \geqslant \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{7}$$

Справді, візьмемо нерівність $a_p+a_k \leqslant a_{p-l}+a_{k+l}$, яка має місце для опуклої послідовності $\{a_n\}$ $(1 \leqslant l < p < k+l)$. Поклавши $p=n-k+1$, $l=n-k$, з останньої нерівності дістанемо $a_{n-k+1}+a_n \leqslant a_k+a_n$. Якщо $k=1, 2, \ldots, n$, то

$a_1 + a_n \leqslant a_1 + a_n$, $a_2 + a_{n-1} \leqslant a_1 + a_n$, ..., $a_{n-1} + a_2 \leqslant a_1 + a_n$, $a_n + a_1 \leqslant a_1 + a_n$. Додавши всі ці нерівності, дістанемо нерівність (7).

Вправи.

1. Довести, що для угнутої послідовності $\{a_n\}$ виконується нерівність $a_1 + a_n \leqslant \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$.

2. Довести нерівності:

а) $1! + n! \geqslant \frac{2}{n}(1! + 2! + \cdots + n!)$;

б) $1 + \frac{1}{n} \geqslant \frac{2}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$;

в) $1 + \sqrt{n} \leqslant \frac{2}{n}(1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n})$;

г) $n^n \leqslant (n!)^2$.

Покажемо тепер, що для опуклої послідовності виконується така цікава нерівність

$$\frac{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}}{n} \leqslant \frac{a_1 + a_3 + \cdots a_{2n+1}}{n+1}. \qquad (8)$$

Доведення її спирається на таку тотожність:

$$\sum_{k=1}^{n} k(n-k+1)(a_{2k-1} - 2a_{2k} + a_{2k+1}) + \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) \times$$
$$\times (a_{2k} - 2a_{2k+1} + a_{2k+2}) = n\sum_{k=1}^{n+1} a_{2k-1} - (n+1)\sum_{k=1}^{n} a_{2k}. \qquad (9)$$

Маємо:

$$\sum_{k=1}^{n} k(n-k+1)(a_{2k-1} - 2a_{2k} + a_{2k+1}) + \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) \times$$
$$\times (a_{2k} - 2a_{2k+1} + a_{2k+2}) = na_1 + \sum_{k=2}^{n} k(n-k+1) \times$$

$$\times a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{n-1} (k(n-k+1) - 2k(n-k))\ a_{2k+1} +$$
$$+ na_{2n+1} - 2na_{2n} + \sum_{k=1}^{n-1}(-2k(n-k+1) +$$
$$+ k(n-k))\,a_{2k} + \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)\,a_{2k+2} = na_1 + na_{2n+1} -$$
$$-2na_{2n} + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)(n-k)\,a_{2k+1} + \sum_{k=1}^{n-1}(k(n-k+1) -$$
$$-2k(n-k))\,a_{2k+1} + \sum_{k=1}^{n-1}(-2k(n-k+1) +$$
$$+ k(n-k))\,a_{2k} + \sum_{k=2}^{n}(k-1)(n-k+1)\,a_{2k} =$$
$$= na_1 + \sum_{k=1}^{n-1}((k+1)(n-k) + k(n-k+1) -$$
$$-2k(n-k))\,a_{2k+1} + na_{2n+1} + ((n-1)\cdot 1 - 2n)\,a_{2n} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n-1}(-2k(n-k+1) + k(n-k) + (k-1) \times$$
$$\times (n-k+1)) + a_{2k} = na_1 + \sum_{k=1}^{n-1} na_{2k+1} + \sum_{k=1}^{n-1} \times$$
$$\times (-n-1))\,a_{2k} + na_{2n+1} + (-n-1)\,a_{2n} =$$
$$= n\sum_{k=1}^{n+1} a_{2k-1} - (n+1)\sum_{k=1}^{n} a_{2k}.$$

Отже, тотожність (9) доведено. Оскільки для опуклої послідовності $a_{2k-1} - 2a_{2k} + a_{2k+1} \geqslant 0$ та $a_{2k} - 2a_{2k+1} + a_{2k+2} \geqslant 0$, то ліва частина тотожності (9) невід'ємна, отже, невід'ємна і права її частина. Це означає, що $n\sum_{k=1}^{n+1} a_{2k-1} \geqslant (n+1)\sum_{k=1}^{n} a_{2k}$, звідки безпосередньо випливає нерівність (8).

Вправи.

1. Довести, що для угнутої послідовності виконується нерівність $n\sum_{k=1}^{n+1} a_{2k-1} \leqslant (n+1)\sum_{k=1}^{n} a_{2k}$.

2. Довести, що нерівність (8) перетворюється на рівність лише у випадку, коли $\{a_n\}$ — арифметична прогресія.

3. Довести нерівності:

а) $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right) < \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}\right)$;

б) $(n+1)(2!+4!+\cdots+(2n)!) < n(1!+3!+\cdots+(2n+1)!)$;

в) $n(P_3+P_5+\cdots+P_{2n+3}) < (n+1)(P_4+P_6+\cdots+P_{2n+2})$, де P_l — периметр правильного n-кутника, вписаного у дане коло;

г) $n(\sqrt{1}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{2n+1}) < (n+1)(\sqrt{2}+\sqrt{4}+\cdots+\sqrt{2n})$.

Для опуклої послідовності $\{a_n\}$ виконується нерівність

$$a_n \leqslant \frac{1}{2n-1}(a_1+a_2+\cdots+a_{2n-1}). \qquad (10)$$

Справді, для опуклої послідовності маємо: $2a_n \leqslant a_1+a_{2n-1}$, $2a_n \leqslant a_2+a_{2n-2}$, ..., $2a_n \leqslant a_{n-1}+a_{n+1}$. Додавши ці нерівності, матимемо $2(n-1)a_n \leqslant a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_{n+1}+\cdots+a_{2n-1}$. Додаючи до обох частин останньої нерівності a_n, дістанемо $(2n-1)a_n \leqslant a_1+a_2+\cdots+a_{2n-1}$, звідки і випливає нерівність (10). Вона, очевидно, є аналогом нерівності Іенсена для опуклих функцій:

$$f\left(\sum_{i=1}^{h}\lambda_i x_1\right) \leqslant \sum_{i=1}^{h}\lambda_i f(x_i), \text{ де } \lambda_i \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^{n}\lambda_1 = 1.$$

Якщо f — опукла функція на $[1; \infty[$, то для довільного $n \in N$

$$f\left(\frac{1+2+\cdots+2n-1}{2n-1}\right) \leqslant \frac{f(1)+f(2)+\cdots+f(2n-1)}{2n-1}$$

$$\text{або } f(n) \leqslant \frac{1}{2n-1}\sum_{i=1}^{k} f(a_i).$$

Якщо $f(n) = a_n$, то дістаємо $a_n \leqslant \frac{1}{2n-1}(a_1+a_2+\cdots+a_{2n-1})$, де $\{a_n\}$ — опукла послідовність.

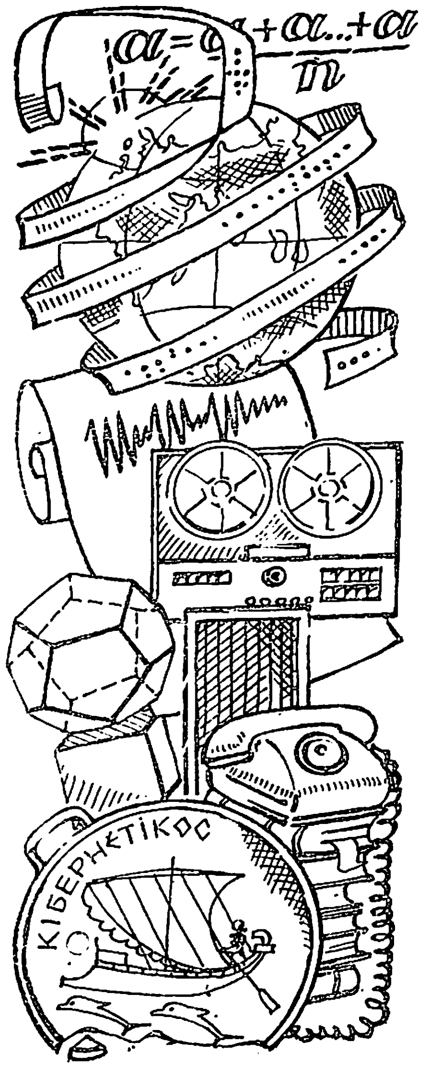
Вправи.

1. Довести, що для угнутої послідовності виконується нерівність $(2n-1)a_n \geqslant a_1+a_2+\cdots+a_{2n-1}$.

2. Довести, що в нерівності (10) рівність досягається лише у випадку, коли $\{a_n\}$ — арифметична прогресія.

3. Довести, що для опуклої послідовності $\{a_n\}$ та непарного натурального n виконується нерівність $na_{\frac{n+1}{2}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Використовуючи властивості опуклих та угнутих послідовностей, можна записати й довести багато цікавих нерівностей. Пропонуємо читачам придумати кілька нерівностей, спираючись на опуклість чи угнутість певних послідовностей, а потім спробувати довести ці нерівності іншими методами, наприклад методом математичної індукції.



МИНУЛЕ І СУЧАСНЕ МАТЕМАТИКИ

Г. М. СИТА

МИХАЙЛО ВАСИЛЬОВИЧ ОСТРОГРАДСЬКИЙ

Перша половина XIX століття була періодом визначних відкриттів у галузі точних наук. Диференціальне числення, створене Ньютоном (1641—1727) і Лейбніцем (1646—1716), надзвичайно розширило можливості застосувань математики, зокрема дало змогу розпочати дослідження математичними методами фізичних явищ і процесів, таких, наприклад, як коливання струни, поширення тепла і світла тощо. Щоб описати ці явища, було знайдено відповідні диференціальні рівняння, тобто співвідношення, які пов'язують невідомі функції та їх похідні. Так виникла математична фізика, причому перші ж успіхи їх були настільки значні, що один з корифеїв науки того часу французький математик Ж. Б. Фур'є (1768—1830) писав у захопленні: «Розглянутий із цього погляду математичний аналіз такий різноманітний, як і сама природа».

Саме в цей знаменний для історії науки період відбувалося становлення наукового світогляду нашого славетного співвітчизника Михайла Васильовича Остроградського (1801—1862). Його наукові праці залишили великий слід у розвитку математики, а особливо тих її галузей, які пов'язані із застосуваннями до природознавства. Але внесок М. В. Остроградського в історію вітчизняної науки не обмежується його науковими працями. Він був прекрасним педагогом і організатором математичної освіти в Росії, впливав на весь розвиток вітчизняної наукової думки. Науково-педагогічна діяльність М. В. Остроградського послужила могутнім поштовхом для виникнення в нашій країні наукових шкіл математиків та механіків, сприяла розвиткові математичної освіти в технічних вузах і тим самим створенню в Росії першорядної технічної інтелігенції.

М. В. Остроградський народився в селі Пашенній (тепер Пашенівка) Козельщинського району Полтавської області 24 вересня 1801 року в сім'ї дрібного поміщика. Раннє дитинство його пройшло у рідному селі, серед безмежного роздольного степу, в дитячих розвагах із селянськими дітьми, у слуханні чудових українських пісень, старовинних казок та легенд. Остроградські вели свою генеалогію від запорізьких козаків. Діди і прадіди Михайла Васильовича служили в козацькому війську, брали участь у багатьох походах і боях, не раз виявляли військову доблесть та героїзм. Мабуть, саме тому в дитинстві Михайло Васильович так мріяв стати військовим. Але йому судилося стати ученим.

Михайло ріс жвавим, моторним, тямущим хлопчиком. Ще в ранньому дитинстві він виявив виняткову спостережливість і захоплювався всякими вимірюваннями — завжди носив із собою в кишені шнурок з прив'язаним до нього камінчиком і за допомогою цього «приладу» міряв глибину кожного колодязя або ями.

У 1810 році батько віддає *Михайла до Полтавської* гімназії.

Незважаючи на неабиякі здібності, що були помічені педагогами, науками він не захопився і мріяв тільки про одне — стати військовим. Поступаючись палкому бажанню сина та зваживши на його богатирську зовнішність і міцне здоров'я, батько вирішує забрати його з гімназії та віддати в гвардійський полк. Проте, порадившись з родичами, він все-таки змінює свій намір і везе Михайла в Харків для підготовки і вступу в університет (1816).

Спочатку юний Остроградський ще не відчуває свого справжнього покликання, хоча й вчиться на фізико-математичному факультеті. Але невдовзі викладач математики А. Ф. Павловський, людина широкої ерудиції, захоплена своєю професією, помічає надзвичайні здібності юнака і пробуджує в ньому свідомий інтерес до науки. Остроградський починає з радістю вчитися і дуже швидко дивує успіхами свого вчителя. Цьому сприяє і знайомство та зближення з ректором університету професором математики Т. Ф. Осиповським.

Блискуче закінчивши університет в 1818 році, Остроградський рік живе у батька, а потім знову повертається до Харкова, маючи намір самовдосконалитися в прикладній математиці й одержати ступінь кандидата. У той час в Росії панувала реакція, жорстоких переслідувань зазнавала всяка прогресивна думка. І от реакційні кола університету, посилаючись на те, що Остроградський нехтував лекціями з філософії та богопізнання, починають чинити опір намірам Остроградського. І хоча всі необхідні екзамени він склав успішно і був відзначений серед кращих (1820), видачу йому кандидатського диплома весь час відкладали. Гордий юнак, обурений таким ставленням, повертає у ректорат виданий йому раніше атестат і просить викреслити назавжди його ім'я із списків студентів (1822).

Ця прикра історія тільки розпалила в ньому любов до справжньої науки. Він приймає несподіване та сміливе рішення — їхати в Париж, який був у той час центром наукової

думки. І ніякі зовнішні перешкоди: вагання батьків, здивування й осуд родичів та знайомих, певні матеріальні труднощі, пригоди в дорозі — зупинити впертого юнака вже не можуть.

Роки, які Остроградський пробув у Парижі (з 1822 по 1828), були надзвичайно багаті на визначні відкриття в галузі математики. Там в цей час працювали такі видатні вчені, як П. Лаплас, С. Д. Пуассон, О. Коші, Ж. Б. Фур'є. М. В. Остроградський приїхав учитись у титанів. Але дуже швидко й сам заявив про себе на повний голос.

У 1824 році М. В. Остроградський подає Товариству аматорів науки дві праці, присвячені обчисленню визначених інтегралів у випадку, коли інтегровна функція в проміжку інтегрування має певні особливості — розривна або набуває нескінченних значень. Ці праці досить оригінальні, але через критичне ставлення до них автора опубліковані не були (їх передали в архів Паризької академії наук, де вони зберігаються й досі).

Талант та ентузіазм молодого вченого швидко привернули до себе увагу. У 1825 році О. Коші в своїх мемуарах згадує про оригінальні дослідження росіянина, «обдарованого великою проникливістю і дуже вправного в аналізі нескінченно малих».

У 1826 році М. В. Остроградський подає Паризькій академії своє дослідження, присвячене розповсюдженню хвиль на поверхні рідини — проблемі, яку вивчали П. Лаплас, Ж. Лагранж, С. Д. Пуассон, О. Коші. Остроградський розглядав рідину в посудині скінченної глибини. Це була принципово нова задача, і успіх молодого вченого став його значним внеском у гідродинаміку.

М. В. Остроградського цікавило багато питань: і створення загальних методів розв'язання задач математичної фізики, і властивості кратних інтегралів, і спеціальні функції. Повернувшись у 1828 році до Петербурга, він подає Академії наук праці, в одній з яких — його оригінальне виведення центрального в теорії потенціала рівняння Пуассона, а в другій, з теорії теплоти, вперше в усій загальності сформульовано метод розв'язування задач математичної фізики, так званий метод

Фур'є (який сам Фур'є застосовував лише в деяких окремих випадках). В останній праці показано, зокрема, як у загальному випадку розв'язати питання про охолодження довільного тіла, обмеженого поверхнею без особливих точок або ліній. Тут він дістав також цілий ряд важливіших результатів чисто теоретичного плану: довів формулу, що пов'язує об'ємний інтеграл з інтегралом по поверхні (формула Остроградського), розглянув поняття спряженого оператора, встановив принцип локалізації тригонометричних рядів (який значно пізніше був сформульований німецьким математиком Г. Ріманом, але названий на його честь). Разом з тим у згаданій праці М. В. Остроградський висунув ряд важливих проблем, які вперше зробив спробу розв'язати лише через 70 років відомий французький математик А. Пуанкаре.

М. В. Остроградський залишив велику наукову спадщину. Він перший розв'язав питання про розподіл тепла в трикутній призмі, основою якої є прямокутний трикутник. У праці «Про рівняння розповсюдження тепла всередині рідини» (1836) вчений застосував дуже вишуканий і водночас простий та строгий метод доведення. Замість того, щоб розглядати елементарні паралелепіпеди, як це робили до нього французькі математики, М. В. Остроградський виділяє в тілі довільний об'єм та складає для нього певне інтегральне рівняння. Далі, оскільки це рівняння має справджуватися для будь-якого об'єму, він, прирівнявши до нуля інтегровану функцію, дістає шуканий результат. Зауважимо, що підходи до цієї проблеми, запропоновані французькими математиками Ж. Б. Фур'є та С. Д. Пуассоном, були помилковими, оскільки базувалися на хибних припущеннях.

Наукова творчість М. В. Остроградського завжди була спрямована на вивчення загальних законів природи. Якщо в молоді роки він досліджував проблеми математичної фізики, то згодом на перший план в його творчому доробку виступає аналітична механіка, причому близько третини його наукових праць присвячено саме їй.

Незалежно від англійського вченого У. Гамільтона М. В. Остроградський встановив (у загальнішому порівняно з результатом У. Гамільтона вигляді) один з найважливіших законів механіки — принцип найменшої дії. Цей закон згодом виявився корисним для розв'язання багатьох задач механіки, фізики, квантової механіки, теорії відносності. Дуже велике значення мають дослідження М. В. Остроградського з теорії канонічних рівнянь механіки, в яких він розглядає питання про розв'язування (інтегрування) диференціальних рівнянь механіки. Встановлений ним результат значно узагальнив результат німецького математика К. Якобі і знайшов численні застосування у сучасній фізиці при вивченні руху елементарних частинок, а також в астрономії.

М. В. Остроградський дістав оригінальні розв'язки важливих задач гідродинаміки, гідростатики, теорії пружності, теорії тяжіння, балістики, небесної механіки. Як зауважив відомий російський математик і механік М. Є. Жуковський, праці М. В. Остроградського лише в галузі механіки «охоплюють собою майже всі питання, на розв'язуванні яких були зосереджені в той час думки видатних європейських геометрів» (так в той час називали математиків).

Цікавими та глибокими були дослідження М. В. Остроградського в області варіаційного числення. Діставши певне диференціальне рівняння (яке названо на його честь), він повністю розв'язав задачу про знаходження екстремуму кратного інтеграла. Цікаво, що цей результат учений одержав в 1834 році, а в 1840 Паризька академія наук (не маючи відомостей про роботу М. В. Остроградського) оголосила премію за розв'язання проблеми. М. В. Остроградський розкрив і деякі властивості інтегрування лінійних диференціальних рівнянь методом варіації довільного параметра. Майже всі основні результати в теорії кратних інтегралів належать М. В. Остроградському.

І які б проблеми не розв'язував надалі вчений (він займався також теорією удару, алгеброю, теорією чисел, теорією ймовірностей тощо), всі його наукові праці позначені глибиною й оригінальністю, в них незмінно виявилася широта його поглядів, вміння проникнути глибоко в суть проблеми і знайти численні узагальнення.

Слава і визнання швидко приходять до нього. У 1831 році він уже обраний академіком Петербурзької академії наук, згодом стає членом-кореспондентом Паризької академії наук, дійсним членом академій: Американської, Римської, Турінської, почесним членом Київського та Московського університетів і багатьох наукових товариств.

З поверненням до Петербурга розкривається ще один талант М. В. Остроградського — талант блискучого лектора і педагога. Від славетних Лагранжа і Коші він успадкував стислість, витонченість викладу. Учений викладає в Головному педагогічному інституті та в чотирьох військових навчальних закладах Петербурга: Морському кадетському корпусі, Інституті корпусу шляхів сполучення, Михайловському артилерійському та Головному інженерному училищах, виступає з публічними лекціями, займається підготовкою навчальних програм. Бути учнем М. В. Остроградського (а згодом — хоча б серед учнів його учнів), слухати його лекції вважалося за велику честь. Збереглося багато захоплених розповідей про М. В. Остроградського-педагога. Ось фрагменти із спогадів одного з його учнів, інженера В. А. Панаєва:

«Остроградський читав у нас аналітичну механіку, тобто його улюблену науку, в якій, завдяки йому, розв'язано головну задачу загального руху... Остроградський був творцем не в одній тільки науці про рух, він був великим творцем також у галузі чистого аналізу. Як геометр-філософ він не переносив окремих висновків: його геній вабив його до висновків загальних, абсолютних. Публічні лекції, які він читав у 50-х роках, відкрили неосяжний, новий горизонт і нескінченне поле для математичного аналізу...

...Слухати його лекції було справжньою насолодою, він умів піднімати дух слухачів. Читав він з великим піднесенням, писав величезними буквами... Уся зовнішність Остроградського виражала могутність... Дивлячись на його благородне

піднесене чоло, на його обличчя, приємне та з виразом глибокого розуму і твердості, кожний відчував, що бачить перед собою могутнього мислителя...»

«Центром всієї математичної діяльності в Росії цілком та без лестощів можна назвати Остроградського», — писав у 1838 році його учень К. Яниш.

М. В. Остроградський приділяв велику увагу підвищенню ролі фундаментальних знань у інженерній практиці. Навчальні установи, в яких він викладав, стали кращими в країні закладами щодо математичної підготовки слухачів. Кілька поколінь інженерів, офіцерів армії і флоту, артилеристів, педагогів були зобов'язані йому глибиною своїх математичних знань. Саме завдяки М. В. Остроградському наприкінці XIX ст. Росія мала розвинену прикладну й технічну науку.

Виключно важливе значення мали педагогічні твори та настанови М. В. Остроградського. Він вважав за головну мету освіти — збудити здібність до самостійного мислення, намагався виховати в своїх учнях почуття гідності та впевненості в своїх силах. Тому не дивно, що М. В. Остроградський залишив після себе велику кількість талановитих учнів, серед яких можна назвати основоположника теорії автоматичного регулювання І. О. Вишнеградського, творця гідродинамічної теорії тертя М. П. Петрова, ученого-інженера, основоположника теорії розрахунку в мостобудуванні Д. І. Журавського, інженера-фортифікатора Ц. А. Кюї (відомого російського композитора) та ін.

«Остроградський, — писав М. Є. Жуковський, — зробився ланкою, що з'єднувала нашу вітчизну з тогочасним центром математичного світу. Своїми численними ученими працями він розширив та поповнив ідеї французьких геометрів, а своїми блискучими лекціями насаджував ці ідеї серед російських молодих учених».

Авторитет і популярність М. В. Остроградського були такими значними, що саме його ім'я стало синонімом вченого. Батьки, віддаючи дітей вчитися, бажали їм «стати другим Остроградським». Л. М. Толстой, турбуючись про долю селянських дітей, писав: «Як би не пропустити Ломоносова, Пушкіна, Глінку, Остроградського».

М. В. Остроградський був визначною, оригінальною, всебічно обдарованою людиною. Він відрізнявся веселою вдачею, був дотепним і товариським. Його високо цінували не тільки за великий розум, але й за незалежність, демократизм, скромність, щирість і простоту, за повагу до людей праці, за його людську гідність.

М. В. Остроградський завжди мав глибокі демократичні переконання. Після повернення з Франції за ним був встановлений поліцейський нагляд. Він був знайомий з багатьма представниками передової російської та української інтелігенції: О. С. Пушкіним, В. А. Жуковським, С. С. Гулаком-Артемовським, родинами М. В. Лисенка та М. П. Старицького. Особливо дружні стосунки у нього були з Т. Г. Шевченком, його улюбленим поетом. Повернувшись із заслання, Т. Г. Шевченко записав у «Щоденнику»: «Великий математик прийняв мене з розпростертими обіймами, як земляка і як свого сім'янина, що надовго кудись виїжджав».

«Перебуваючи на вершині слави, — зазначав М. Є. Жуковський, — вшанований за свої наукові праці у всій Європі, Остроградський поводив себе надзвичайно просто і не любив говорити про свої заслуги».

На все життя Михайло Васильович зберіг любов до свого краю, до рідної мови. Навіть під час лекцій частенько вставляв яке-небудь дотепне українське слівце. Влітку майже щороку виїжджав на Україну, де любив поринати у повний спокій і милуватися чудовими краєвидами.

Помер М. В. Остроградський раптово, 1 січня 1862 року в Полтаві по дорозі з Пашенної в Харків, похований він у своєму селі.

Праці М. В. Остроградського — невичерпне джерело оригінальних ідей не лише для його сучасників. І сьогодні активно розвиваються деякі з них. Саме ідеї М. В. Остроградського дають, наприклад, можливість правильно описати рух електрона в магнітних полях або спінові ефекти в квантовій теорії поля.

Оглядаючись в думках на життєвий шлях великого вченого, ми знову і знову з вдячністю вклоняємося його пам'яті, бо в наших сьогоднішніх досягненнях є велика частка і його праці.

Список використаної та рекомендованої літератури

1. Конфорович А., Сорока М. Остроградський М. В. К., Молодь, 1980. 213 с.
2. Гнеденко Б. В., Погребысский И. Б. Михаил Васильевич Остроградский. М., Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
3. Гнеденко Б. В. Михаил Васильевич Остроградский. М., Знание, 1984. 64 с.

«ЗАНЯТТЯ МАТЕМАТИКОЮ ПРИНОСЯТЬ МЕНІ СПРАВЖНЮ РАДІСТЬ...»

Бесіда з академіком Л. С. Понтрягіним*

Лев Семенович Понтрягін — один з найвидатніших математиків сучасності, Герой Соціалістичної Праці, лауреат Ленінської та Державної премій СРСР, кавалер чотирьох орденів Леніна, академік АН СРСР.

Ще студентські праці Л. С. Понтрягіна прирівнювалися за їх значимістю до відкриттів. Півстоліття тому доведенням класичної теореми — закону двоїстості — 30-річний член-кореспондент АН СРСР створив нову дисципліну — топологічну алгебру, яка просунула вперед математику XX століття так само, як у свій час теорія Галуа.

Ім'я Понтрягіна, який став сліпим у 13 років, можна зіставити з іменем Миколи Островського.

— Леве Семеновичу, чи є у Вас улюблений вислів, або приказка? І чи керуєтеся Ви ними?

— Фраза великого німецького математика Давіда Гільберта, який жив на рубежі минулого й нинішнього століть: «Видатні відкриття народжуються як парадокси, а вмирають як тривіальності». Типовий приклад, що підтверджує цю думку, — десяткова система запису чисел, яка виникла у V сто-

* Переклад бесіди, яку провів з Л. С. Понтрягіним кореспондент газети «Неделя» (№ 24, с. 13).

літті нашої ери в Індії й стала звичною в наші дні. Ще дуже люблю народну оповідь про жабу, яка впала в глечик з вершками; у безнадії вона борсалася, поки не збила грудку масла й, спираючись на неї, вибралась з глечика. Мій принцип — бути схожим на цю жабу.

— Що дає Вам сили для такої важкої роботи?

— «Внутрішні пружини» тут цілком земні. Люди, які присвятили себе науці, перебувають у невтомному пошуку, бо ними володіє, не даючи спокою, полум'яна думка: що зробити заради кращого життя на землі? Так чи можуть бути перепочинки в цій діяльності?

— Напевне у вченого, як і в поета, є своє Болдіно, де краще за все працюється. А у Вас це...?

— Уявіть, що працювати можу скрізь. У роки війни математикою займався постійно, в будь-яких умовах: у чергах за хлібом, або в дорозі, на підніжці трамваю, тримаючись за поручні... Тепер це відбувається і вдома, і на дачі, і, природно, в інституті.

— Цікаво, ким Ви мріяли стати в дитинстві?

— Мої іграшки були технічними, найчастіше зробленими мною самим. Якби обставини склалися інакше, став би, напевне, інженером. Хлопчиком любив відвідувати завод «Серп і Молот», де служив рахівником батько. Бував у гвіздковому цеху: з хвилюванням спостерігав за роботою прокатного стану — як з обертових валів вилітає вогненна залізна змія, а робітник кліщами ловить її і, обвівши навколо себе, спрямовує в наступні прокатні вали. Чарівна картина!

Після повної втрати зору питання про вибір професії, зрозуміло, ускладнилося. Пробував учитися музики, протягом кількох годин тренувався на піаніно, але безуспішно. Думав: чи не стати істориком? Математика давалася мені важко, і думка про неї, як про професію, прийшла не одразу. Але у VIII й особливо IX класі серйозно нею зацікавився.

Знання здобував з популярних книжечок. І вже не мислив іншої професії. Вступив на фізмат МДУ. Слухав лекції, запам'ятовував і розумів усе відразу, ніколи нічого не записував.

Повторював удома лекцію мислено. До моменту здачі екзаменів твердо знав майже весь курс.

— Які почуття охоплюють Вас, коли Ви здобуваєте довгожданий результат досліджень?

— З десяти задач, за які берешся, мабуть, лише одна розв'язується успішно. Незавершена робота викликає деякий страх: а раптом я взагалі не зумію її завершити й кілька років наполегливої праці пропадуть марно? Завершене дослідження також тривожить: а раптом виявиться помилка? Усі ці переживання — своєрідний стимул до ретельного виконання роботи... Чули оповідь про художника, який щоразу, беручись за нову роботу, забуває про всі свої попередні картини, вони наче перестають існувати для нього, лишається тільки одна, головна, яку потрібно написати? Досвідченого майстра страшить цей шлях у незвідане. Так само й у математиків: чергова задача — головна.

— Чи зазнавали змін Ваші усталені наукові принципи та погляди?

— Захоплення чистою математикою тривало довго. Але все частіше й настирливіше переді мною поставало запитання: для чого потрібна абстрактна математика, без практичних застосувань? Одного разу — це було у 1932 році — до мене додому прийшов без усякого попередження молодий фізик Олександр Олександрович Андронов. Сказав, що чув про моє бажання зайнятися прикладними аспектами математики. Знайомство з цим ученим, людиною справді видатною, переросло в дружбу, яка тривала двадцять років, до його кончини. Вона започаткувала новий напрям моїх наукових інтересів.

Особливо гостро відчував необхідність використовувати свої знання для розв'язання практичних задач під час Великої Вітчизняної війни.

Восени 1952 я почав вести в Математичному інституті семінар з теорії коливань і теорії регулювання. На кожному занятті додержували правила: доповідь кожного учасника починається з розповіді про технічний пристрій, а потім іде його опис з допомогою диференціальних рівнянь; завершується усе математичним аналізом роботи пристрою. У 1961 році разом з трьома моїми учнями опублікував книгу «Математична теорія оптимальних процесів»; наступного року вона була удостоєна Ленінської премії.

— Ви і тепер продовжуєте займатися прикладними дослідженнями?

— Так, намагаюся розв'язати одну задачу в теорії диференціальних ігор, якою почав займатися ще в 1964 році. (Наша бесіда готувалася до друку, коли подзвонив академік і повідомив про успішне завершення роботи, результати якої опубліковані в одному з номерів «Доповідей АН СРСР»).

— Леве Семеновичу, що в людині Вам абсолютно чуже?

— Нечесність. Прагнення до почестей.

— Ваше ставлення до власної знаменитості?

— Ціную знаменитість за те, що вона дає більші можливості чинити корисні для суспільства дії.

— Що Ви вважаєте найважливішим у житті?

— Професійну діяльність. Правда, заняття математикою академік Петро Сергійович Новиков порівнював з роботою в каменоломні. Але ця «каменоломня» приносить мені справжню радість!

ЗАДАЧІ І РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

В. С. ПОКРОВСЬКИЙ

ЯК СКЛАСТИ ГЕОМЕТРИЧНУ ЗАДАЧУ

Вивчаючи в школі мову й літературу, ви часто пишете твори, які допомагають глибше пізнати і мову, і літературу. Та навряд чи ви працюєте над математичними творами. А було б дуже корисно! Що ж таке написання математичного твору? Насамперед — це самостійне складання нових математичних задач. Правда, досить важко створювати задачі, не маючи новичок їх розв'язування. І навіть навпаки: ідеї, реалізовані в умовах більшості задач, виникають у їх авторів під час розв'язування деяких інших задач. А конструювання складних і незвичайних задач — надійний шлях до оволодіння мистецтвом розв'язування задач.

Отже, будемо вчитися складати й розв'язувати геометричні задачі.

ПЛАНІМЕТРІЯ

1. Бісектриса в прямокутному трикутнику

На малюнку 1 зображено прямокутний трикутник ABC. Проведемо медіану гіпотенузи BO і бісектрису AN кута BAC, яка перетинає цю медіану в точці F.

Нехай $\angle ACB=30°$. Легко знайти відношення AF до FN. Справді, трикутник BAO — рівносторонній. Нехай $AB=1$, тоді $BN=\frac{\sqrt{3}}{3}$, причому $\frac{AB^2}{BN^2}=\frac{AF}{FN}=3$.

Тепер, коли відомий кінцевий результат, складемо задачу:

У трикутнику ABC з прямим кутом B медіана гіпотенузи поділяє бісектрису кута BAC у відношенні $3:1$, лічачи від вершини A. Знайти кути трикутника.

Р о з в ' я з а н н я. Через основу бісектриси AN проведемо відрізок NT, паралельний медіані гіпотенузи BO (мал. 2).

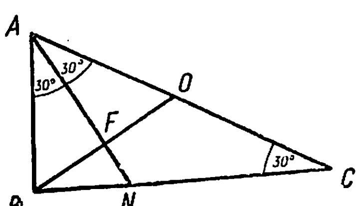
Маємо: $\frac{AF}{FN}=\frac{AO}{OT}=3$.

Нехай $OT=1$, тоді $AO=3$, $CO=3$, $CT=2$, причому

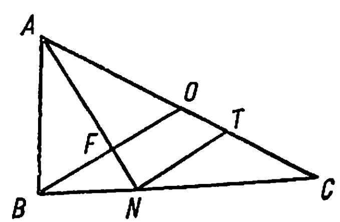
$$\frac{CT}{TO}=\frac{CN}{BN}=2.$$

Скориставшись властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника, дістанемо шукані величини кутів:

$$\frac{BN}{CN}=\frac{AB}{AC}=\sin ACB=\frac{1}{2},\quad \angle ACB=30°,\quad \angle BAC=60°.$$



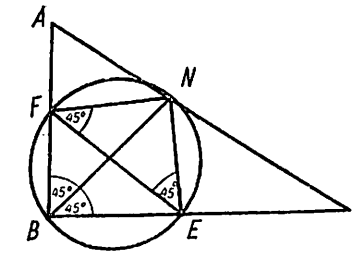
Мал. 1



Мал. 2

Складемо задачу, використавши те, що бісектриси суміжних кутів взаємно перпендикулярні.

На малюнку 3 зображено прямокутний трикутник ABC. Проводимо бісектрису BN прямого кута ABC і бісектриси суміжних кутів BNA і BNC. Точки F і E — основи цих бісектрис. Тоді $\angle FNE=90°$ і легко помітити, що чотирикутник $BFNE$ вписаний, звідки:



Мал. 3

$$\angle NFE=\angle NBE=45°,\quad \angle NEF=\angle FBN=45°.$$

Фактично задачу вже складено й розв'язано. Умову її сформулюємо так:

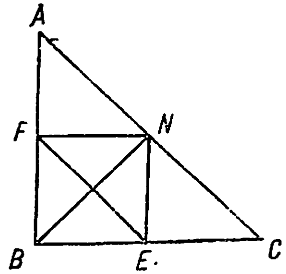
У прямокутному трикутнику ABC з прямим кутом при вершині B відрізок BN є бісектрисою прямого кута B. Відрізки NF і NE — бісектриси суміжних кутів BNA і BNC відповідно. Довести, що трикутник FNE рівнобедрений.

За цією конструкцією можна скласти ще й таку задачу:

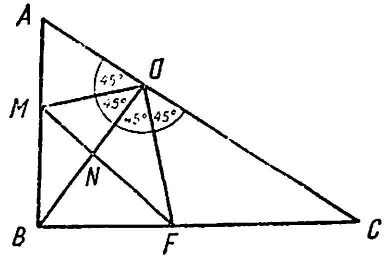
У прямокутному трикутнику ABC з прямим кутом при вершині B відрізок BN — бісектриса прямого кута B. Відрізки NF і NE — бісектриси суміжних кутів BNA і BNC відповідно. Відомо, що трикутники FNE і ABC подібні. Знайти $\frac{S_{BFNE}}{S_{ABC}}$.

Р о з в ' я з а н н я. З попередньої задачі маємо, що трикутник FNE рівнобедрений прямокутний (мал. 4). Отже, і трикутник ABC рівнобедрений прямокутний, а $BFNE$ — квадрат. Легко бачити, що $\frac{S_{BFNE}}{S_{ABC}}=\frac{1}{2}$.

Складемо ще одну задачу з такою конструкцією, замінивши бісектрису прямого кута висотою, проведеною з вершини прямого кута на гіпотенузу.



Мал. 4



Мал. 5

На малюнку 5 зображено прямокутний трикутник ABC. Відрізок BD — висота, проведена з вершини прямого кута на гіпотенузу. Відрізки DM і DF — бісектриси суміжних кутів BDA і BDC відповідно.

Під час складання попередніх задач ми докладно розібрали особливості цієї конструкції. Але є ще одна деталь: відрізок BD — бісектриса кута MDF. Використавши цей факт і врахувавши, що трикутники BDA і BDC подібні, сформулюємо задачу:

У прямокутному трикутнику ABC з вершини прямого кута B на гіпотенузу AC проведено висоту BD. Відрізки DM і DF — бісектриси суміжних кутів BDA і BDC відповідно. Відрізки BD і MF перетинаються в точці N; $MN = k \cdot NF$. Знайти кути трикутника ABC.

Р о з в ' я з а н н я. Використавши властивості бісектриси внутрішнього кута трикутника, маємо:

$$\frac{DM}{DF} = \frac{MN}{NF} = k \quad (\text{мал. } 5).$$

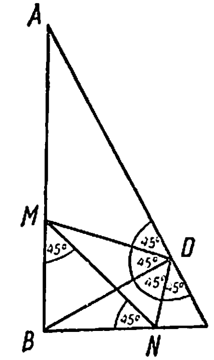
З подібності трикутників BDA і BDC випливає:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DM}{DF} = k = \operatorname{tg} ACB, \quad \angle ACB = \operatorname{arctg} k,$$

$$\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} k.$$

Складемо ще одну задачу з такою конструкцією:

У прямокутному трикутнику ABC з прямим кутом B з вершини прямого кута на гіпотенузу проведено висоту BD. Відрізки DM і DN — бісектриси кутів BDA і BDC відповідно. $AM = \sqrt{3} \cdot BN$. Знайти $\frac{DM}{DN}$.



Мал. 6

Р о з в ' я з а н н я. Трикутник MBN (мал. 6) — рівнобедрений, прямокутний. $BM = BN$. Нехай $BN = 1$, тоді і $BM = 1$; $AM = \sqrt{3}$. Скориставшись властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника, дістанемо:

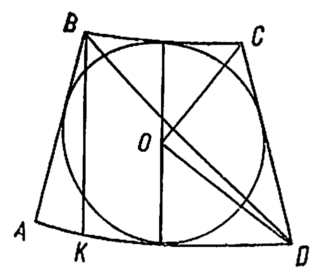
$$\frac{AD}{BD} = \frac{AM}{BM} = \operatorname{tg} ABD = \sqrt{3}; \quad \angle ABD = 60°, \quad \angle ACB = 60°;$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DM}{DN} = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}.$$

2. Описана рівнобічна трапеція

Впишемо коло в рівнобічну трапецію і згадаємо, які властивості має така конструкція (мал. 7).

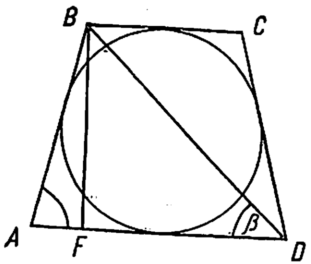
1) У будь-якій трапеції, описаній навколо кола, бічну сторону видно із центра цього кола під кутом 90°.



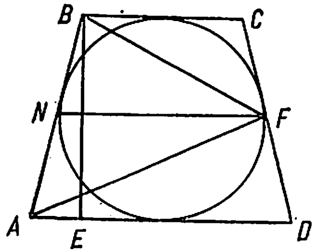
Мал. 7

2) У рівнобедреній трапеції довжина проекції діагоналі на більшу основу дорівнює довжині середньої лінії, тобто $DK = \frac{AD + BC}{2}$.

3) Довжина бічної сторони описаної рівнобедреної трапеції дорівнює довжині середньої лінії, тобто $AB = DK$.



Мал. 8



Мал. 9

Складемо серію задач за цією конструкцією.

$ABCD$ — описана рівнобічна трапеція. Довести, що $\sec^2 BDA + \cos^2 BAD = 2$ (мал. 8).

Р о з в' я з а н н я. Нехай $\angle BAD = \alpha$ і $\angle BDA = \beta$. Тоді $\sin\alpha = \mathrm{tg}\,\beta$, $\sin^2\alpha = \mathrm{tg}^2\beta$, $1-\cos^2\alpha = \sec^2\beta - 1$, $\sec^2\beta + \cos^2\alpha = 2$.

Зауважимо, що коли середину бічної сторони трапеції (мал. 9, точка F) сполучити з вершинами A і B, то $S_{ABF} = \frac{S_{ABCD}}{2}$.

(Доведіть самостійно, що таку властивість має будь-яка трапеція.)

Скориставшись цим, складемо задачу:

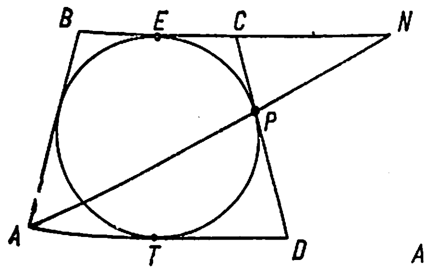
В описаній рівнобічній трапеції $ABCD$ точка F — середина бічної сторони CD (мал. 9). *Відрізок BE — висота трапеції.* $ED = \frac{1}{BF}$; $S_{ABCD} = Q$. *Знайти кут ABF.*

Р о з в' я з а н н я. $S_{ABF} = \frac{Q}{2}$; $ED = AB$, $AB \cdot BF = 1$.

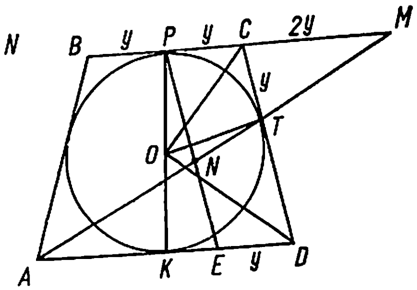
Отже,

$$\frac{Q}{2} = \frac{\sin ABF}{2}, \quad \angle ABF = \arcsin Q.$$

На малюнку 10 подано рівнобічну трапецію, описану навколо кола, яке дотикається до основ BC і AD відповідно у точ-



Мал. 10



Мал. 11

ках E і T, а до бічної сторони CD в точці P. Нехай прямі AP і BC перепинаються в точці N. Легко бачити, що $AD = 2PD$. Оскільки трикутники APD і CPN подібні, то $BE = EC = CP = \frac{CN}{2}$. Отже, можемо скласти задачу:

У рівнобічну трапецію $ABCD$ вписано коло, яке дотикається до меншої основи BC у точці P і до бічної сторони CD у точці T. На більшій основі AD вибрано точку F, таку, що відрізки PF і CD паралельні. Відрізки AT і PF перетинаються в точці N; $PN = k \cdot NF$. Знайти кути трапеції.

Р о з в' я з а н н я. Нехай прямі AT і BC перетинаються в точці M (мал. 11). Позначимо $BP = CP = CT = y$, тоді $CM = 2y$.

З подібності трикутників PNM і ANF випливає:

$$\frac{PM}{AF} = \frac{PN}{NF} = k, \quad \frac{3y}{AF} = k, \quad AF = \frac{3y}{k}.$$

Оскільки

$AD = AF + DF = AF + PC = \frac{y(3+k)}{k}$, то $DT = \frac{y(3+k)}{2k}$, а оскільки

$$\angle COD = 90^\circ, \text{ то } \frac{CO^2}{DO^2} = \frac{CT}{DT} = \frac{2k}{3+k} = \mathrm{tg}^2\, CDO.$$

(Рівність $\frac{CO^2}{DO^2} = \frac{CT}{DT}$ доведіть самостійно.)

6 4-996

Остаточно маємо:

$$\operatorname{tg} CDO = \sqrt{\frac{2k}{3+k}}, \quad \angle ADC = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2k}{3+k}},$$

$$\angle BCD = \pi - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2k}{3+k}}.$$

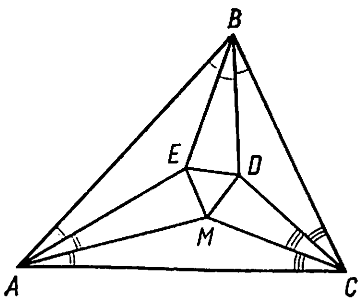
3. Теорема Морлея

Ви добре знайомі з численними цікавими властивостями бісектриси кута трикутника — променя, що ділить його пополам. Виявляється, що трисектриса кута трикутника — промінь, що ділить його у відношенні 1:2 (відтинає третину його величини), також має цікаві властивості. Справджується, зокрема, так звана теорема Морлея:

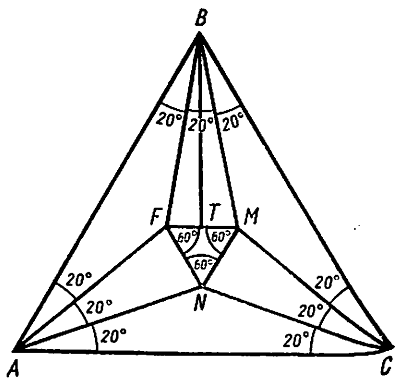
Три точки перетину суміжних трисектрис внутрішніх кутів довільного трикутника є вершинами рівностороннього трикутника (мал. 12).

Названо цю теорему на честь американського математика Ф. Морлея, який довів її в 1899 р.

На малюнку 12 три точки перетину суміжних трисектрис є вершинами рівностороннього трикутника.



Мал. 12

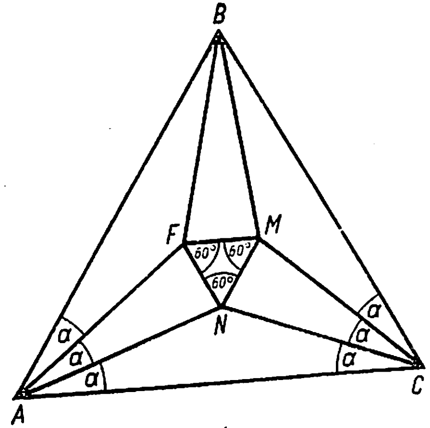


Мал. 13

Наведемо приклади задач, що виникають в зв'язку з теоремою Морлея.

На малюнку 13 подано рівносторонній трикутник ABC. Нехай трисектриси його кутів прилеглі до сторін BC, CA і AB, перетинаються в точках M, N, F.

Тоді, за теоремою Морлея, трикутник FNM — рівносторонній. Спробуємо виділити особливо важливі вузли конструкції для складання задачі. Зауважимо, що кути NCM, ABM і FNM (в зазначеному порядку) утворюють арифметичну прогресію, а в рівнобедреному трикутнику FAN кут при вершині дорівнює 20°.



Мал. 14

Можна довести, що коли в рівнобедреному трикутнику ABC з основою a і бічною стороною b кут при вершині дорівнює 20°, то $a^3 + b^3 = 3ab^2$. (Доведіть самостійно.)

Узявши до уваги те, що відношення площ трикутників ABC і FNM можна виразити за допомогою тригонометричних функцій кутів 10° або 20°, складемо задачу:

У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB=BC$) трисектриси кутів, прилеглі до сторін BC, CA і AB, перетинаються в точках M, N і F. Кути NCM, ABM і FNM (у зазначеній послідовності) *утворюють арифметичну прогресію. Довести, що*

$$1)\ \frac{S_{ABC}}{S_{FNM}} = \operatorname{cosec}^2 10° - 4\cos^2 10°;$$

$$2)\ \frac{BF^3}{FN} = 3CM^2 - FN^2.$$

Р о з в ' я з а н н я. 1) За теоремою Морлея, трикутник FNM рівносторонній (мал. 14).

Нехай $\angle NCA = \angle NAC = \alpha$, тоді

$$\angle ABC = 180° - 6\alpha, \quad \angle ABM = \frac{2}{3}\,(180° - 6\alpha),$$

$$\angle NCM + \angle FNM = 2\angle ABM$$

(за властивістю арифметичної прогресії) і

$$\alpha + 60° = \frac{4}{3}\,(180° - 6\alpha), \quad \alpha = 20°.$$

За теоремою синусів, маємо (мал. 13):

$$\frac{AB}{\sin 40°} = \frac{BF}{\sin 20°}.$$

Нехай $AB = 1$, $BF = \frac{\sin 20°}{\sin 40°} = \frac{1}{2\cos 20°}$, T — середина відрізка FM. Тоді:

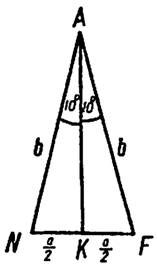
$$FT = \frac{FM}{2} = \frac{1}{2\cos 20°}\cdot \sin 10°, \quad FM = \frac{\sin 10°}{\cos 20°},$$

$$S_{FNM} = \frac{\sin^2 10° \sqrt{3}}{4\cos^2 20°}, \quad S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Остаточно дістанемо:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{FNM}} = \frac{\cos^2 20°}{\sin^2 10°} = \frac{(1 - 2\sin^2 10°)^2}{\sin^2 10°} = \frac{1 - 4\sin^2 10° + 4\sin^4 10°}{\sin^2 10°} =$$

$$= \operatorname{cosec}^2 10° - 4 + 4\sin^2 10° = \operatorname{cosec}^2 10° - 4\cos^2 10°.$$

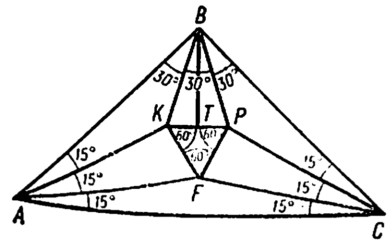


Мал. 15

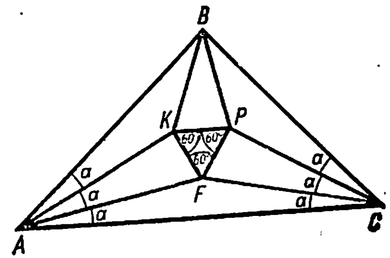
Що й треба було довести.

2) Перепишемо рівність $\frac{BF^3}{FN} = 3CM^2 - FN^2$ (мал. 15) так:

$$AF^3 = FN\cdot(3AF^2 - FN^2),$$
$$AF^3 = 3AF^2\cdot FN - FN^3,$$
$$AF^3 + FN^3 = 3AF^2\cdot FN.$$



Мал. 16



Мал. 17

Позначимо $AF = b$, $FN = a$. Отже, маємо довести, що $b^3 + a^3 = 3ab^2$.

Справді,

$$NK = b\sin 10°, \quad NF = 2b\sin 10° = a, \quad b^3 + 8b^3\sin^3 10° = 6b^3\sin 10°, \quad 8\sin^3 10° + 1 = 6\sin 10°,$$

$$\sin^3 10° = \frac{3\sin 10° - \sin 30°}{4}, \quad \frac{8\,(3\sin 10° - \sin 30°)}{4} + 1 = 6\sin 10°.$$

Що й треба було довести.

Складемо ще одну задачу з такою конструкцією.

На малюнку 16 подано рівнобедрений прямокутний трикутник ABC. Нехай трисектриси кутів трикутника, прилеглі до сторін BC, CA, AB, перетинаються в точках P, F і K. Взявши до уваги те, що кути FAC, PCA, KFP (в зазначеному порядку) утворюють геометричну прогресію, складемо задачу:

У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) трисектриси кутів, прилеглі до сторін BC, CA і AB, перетинаються в точках P, F і K. Кути FAC, PCA і KFP у зазначеній послідовності утворюють геометричну прогресію. Знайти $\frac{S_{KPF}}{S_{ABC}}$.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай $\angle FCA = \alpha$ (мал. 17), тоді $\angle PCA = 2\alpha$. За теоремою Морлея, трикутник KFP — рівносторонній; $\alpha\cdot 60° = 4\alpha^2$ за властивістю геометричної прогресії, отже, $\alpha = 15°$.

Нехай $AB = 1$, $S_{ABC}=\frac{1}{2}$, $\angle AKB = 135°$ (мал. 16). За теоремою синусів, $\frac{1}{\sin 135°}=\frac{BK}{\sin 15°}$; $BK=\frac{\sin 15°}{\sin 135°}$. T — середина відрізка KP (мал. 16).

$$KT=\frac{\sin^2 15°}{\sin 135°},\quad KP=\frac{2\sin^2 15°}{\sin 135°},$$

$$S_{KPF}=\frac{KP^2\sqrt{3}}{4}=\frac{4\sin^4 15°}{\sin^2 135°}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=2\sqrt{3}\sin^4 15°,$$

$$\frac{S_{KPF}}{S_{ABC}}=4\sqrt{3}\sin^4 15°,$$

$$4\sin^4 15°=(2\sin^2 15°)^2=(1-\cos 30°)^2=$$

$$=1-2\cos 30°+\cos^2 30°=1-\sqrt{3}+\frac{3}{4}=\frac{7-4\sqrt{3}}{4},$$

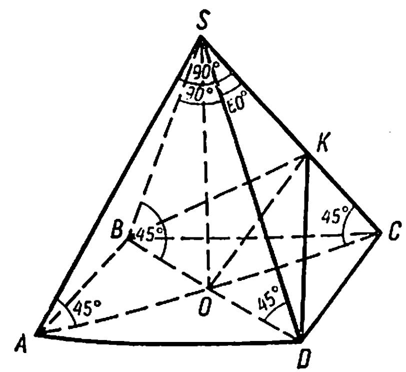
$$\frac{S_{KPF}}{S_{ABC}}=\frac{\sqrt{3}\,(7-4\sqrt{3})}{4}=\frac{7\sqrt{3}-12}{4}.$$

СТЕРЕОМЕТРІЯ

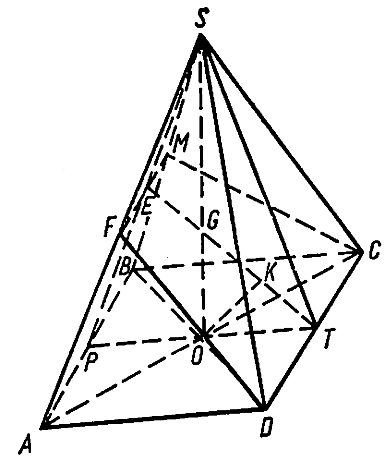
1. Правильна чотирикутна піраміда, усі ребра якої рівні між собою

Нехай $SABCD$ — правильна чотирикутна піраміда, усі ребра якої мають однакову довжину (мал. 18). Бічні грані такої піраміди — рівносторонні трикутники. Діагональні перерізи — рівнобедрені прямокутні трикутники. Отже, бічні ребра утворюють з площиною основи кут 45°. Центр кулі, описаної навколо піраміди, лежить у центрі основи. Двогранний кут при бічному ребрі дорівнює $2\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$. Використавши всі ці факти, складемо таку задачу:

У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ двогранний кут при бічному ребрі дорівнює $2\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$. Точки F і M —



Мал. 18



Мал. 19

відповідно середини бічних ребер AS і BS; O — центр кулі, описаної навколо піраміди. Знайти відношення об'ємів пірамід $SABCD$ і $ODFMC$.

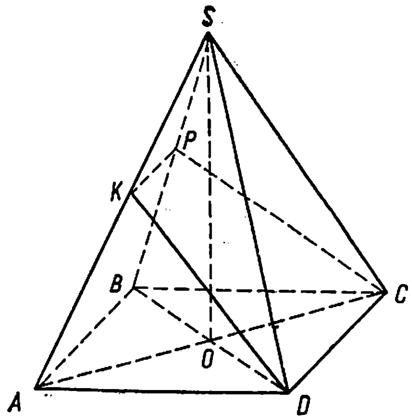
Р о з в ' я з а н н я. Точки E, P, T — середини відрізків FM, AB і DC відповідно; G — центроїд трикутника PST (мал. 19). Нехай $AD = 1$. Тоді:

$$AC=\sqrt{2},\quad AO=CO=SO=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad V_{SABCD}=\frac{\sqrt{2}}{6},\quad OG=\frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$GT=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{18}}=\frac{\sqrt{11}}{6}.$$

З точки O проведемо перпендикуляр до площин DFM, K — основа цього перпендикуляра. Виразивши площу трикутника GOT двома способами, маємо:

$$OK=\frac{OG\cdot OT}{GT};\quad OK=\frac{\sqrt{2}\cdot 1\cdot 6}{6\cdot 2\cdot\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{22}}{22}.$$



Мал. 20

За властивістю медіан трикутника:

$$TE = \frac{3}{2}TG = \frac{3\sqrt{11}}{12} = \frac{\sqrt{11}}{4},$$

$$S_{DFMC} = \frac{3\sqrt{11}}{16};$$

$$V_{ODFMC} = \frac{3\sqrt{11}\cdot\sqrt{22}}{16\cdot 3\cdot 22} = \frac{\sqrt{2}}{32};$$

$$\frac{V_{SABCD}}{V_{ODFMC}} = \frac{16}{3}.$$

Наступний приклад показує, що, складаючи задачі, треба бути дуже обережними.

На малюнку 20 зображено правильну чотирикутну піраміду $SABCD$.

Відомо, що центр описаної навколо неї кулі лежить у центрі основи. Вибираємо точки K і P на бічних ребрах SA і SB так, що площина $DKPC$ паралельна прямій AB.

Складемо, наприклад, таку задачу:

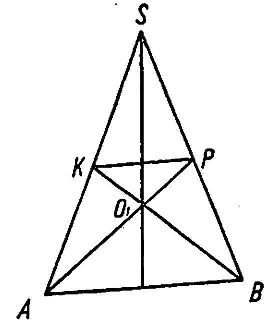
У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ центр кулі, описаної навколо піраміди, міститься в центрі основи. Точки K і P належать відповідно бічним ребрам AS і BS. Площина $DKPC$ паралельна прямій AB. Знайти, у якому відношенні ця площина поділяє об'єм піраміди, якщо в трапецію $DKPC$ можна вписати коло.

Насамперед потрібно знайти, у якому відношенні будь-яка з точок K або P поділяє бічне ребро піраміди. Оскільки центр кулі, описаної навколо піраміди, лежить у центрі основи, то з властивостей нашої конструкції випливає, що бічні грані піраміди — рівносторонні трикутники.

На малюнку 21 показано бічну грань піраміди ASB. Нехай O_1 — точка перетину відрізків AP і BK.

Легко помітити, що $2KO_1 > KP$, $2AO_1 > AB$.

Тому $2\,KB > KP + AB$ і $2\,DK > KP + DC$.



Мал. 21

Таким чином у трапецію $DKPC$ вписати коло не можна. А тепер поставимо запитання так: *у якому відношенні площина $DKPC$ поділяє об'єм піраміди, якщо в трапецію $AKPB$ можна вписати коло* (*мал.* 20)?

Р о з в ' я з а н н я. Нехай $KP = x$ і $AB = a$. Тоді $SK = SP = x$; $AK = BP = a - x$.

За властивістю описаного чотирикутника:

$$a + x = 2(a - x), \quad x = \frac{a}{3}; \quad \frac{SK}{AS} = \frac{1}{3};$$

$$\frac{V_{DKPS}}{V_{SABD}} = \frac{S_{KSP}}{S_{ABS}} = \frac{1}{9}, \quad \frac{V_{DKPS}}{V_{SABCD}} = \frac{1}{18};$$

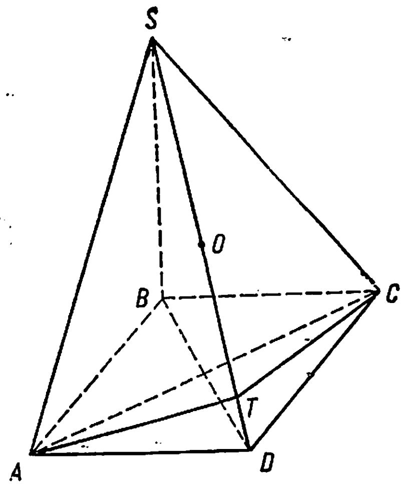
$$\frac{V_{DKPS}}{V_{SDKPC}} = \frac{S_{DKP}}{S_{DKPC}} = \frac{1}{4}, \quad \frac{V_{SDKPC}}{V_{SABCD}} = \frac{2}{9},$$

$$\frac{V_{SDKPC}}{V_{CDAKPB}} = \frac{2}{7}.$$

2. Одна спеціальна чотирикутна піраміда

На малюнку 22 подано правильну чотирикутну піраміду $SABCD$, в основі якої лежить квадрат $ABCD$, а бічне ребро BS перпендикулярне до площини основи. Розглянемо деякі властивості такої конструкції і складемо кілька задач.

Насамперед маємо: $\angle SAD = \angle SCD = 90°$. Центр кулі, описаної навколо піраміди, лежить на середині бічного ребра SD. Радіус кулі, вписаної в піраміду, дорівнює радіусу кола, вписаного в одну з бічних граней BSC або ABS; SAB і SCB — лінійні кути двогранних кутів AD і CD. Побудуємо лінійний кут двогранного кута, утвореного бічними гранями ASD і DSC. Нехай T — точка перетину перпендикулярів, проведених з точок A і C до ребра SD.



Мал. 22

Відрізки AT і CT — це висоти прямокутних трикутників SAD і SCD, проведених з вершин прямих кутів SAD і SCD до гіпотенузи SD, тому

$$\frac{DT}{ST}=\frac{AD^2}{AS^2}=\frac{AB^2}{AS^2}=\cos^2 SAB.$$

Таким чином, ми дістали достатню інформацію для складання задач:

В основі чотирикутної піраміди $SABCD$ лежить квадрат $ABCD$. Бічне ребро BS перпендикулярне до площини основи піраміди. Точка T належить відрізку SD. Площина ATC перпендикулярна до ребра SD. $ST = 4DT$. Знайти відношення радіусів описаної і вписаної куль.

Розв'язання.

$$\frac{DT}{ST}=\frac{AD^2}{AS^2}=\frac{AB^2}{AS^2}=\cos^2 SAB=\frac{1}{4},\quad \angle SAB=60^\circ \quad (\text{мал. } 22).$$

Нехай $AB = 1$, тоді $BS=\sqrt{3}$, $AS = 2$;
r — радіус кулі, вписаної в піраміду;
R — радіус кулі, описаної навколо піраміди;

$$r=\frac{AB+BS-AS}{2}=\frac{1+\sqrt{3}-2}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2},\quad BD=\sqrt{2};$$

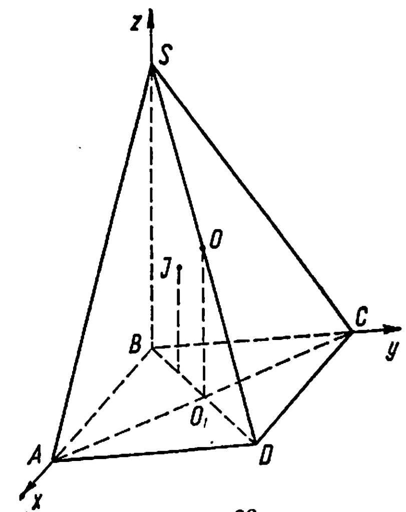
$$SD=2R=\sqrt{2+3}=\sqrt{5};\quad R=\frac{\sqrt{5}}{2};\quad \frac{R}{r}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{15}}{2}.$$

Складемо ще одну задачу з такою конструкцією:

В основі чотирикутної піраміди $SABCD$ — квадрат $ABCD$. Бічне ребро BS перпендикулярне до площини основи піраміди.

Відомо, що площа однієї бічної грані вдвічі більша за площу другої. Відстань від центра кулі, описаної навколо піраміди до бічної грані, дорівнює $\frac{1}{2}$.

Знайти відстань між центрами описаної і вписаної куль.



Мал. 23

Розв'язання. За малюнком 23 маємо: $BC = 1$, $S_{ASD} = 2S_{ABS}$, $AS\cdot AD = 2AB\cdot BS$, $AS = 2BS$, звідки $\angle SAB = \angle SCB = 30^\circ$.

Нехай r — радіус кулі, вписаної в піраміду, J — центр цієї кулі, а O — центр кулі, описаної навколо піраміди. Тоді:

$$r=\frac{BS+BC-SC}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2}=\frac{3-\sqrt{3}}{6}.$$

Утворимо прямокутну систему координат, як показано на малюнку. Знайдемо координати центрів описаної і вписаної куль:

$$J\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6};\ \frac{3-\sqrt{3}}{6};\ \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right),\quad O\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{6}\right),$$

$$OJ=\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{12}}.$$

(Спробуйте розв'язати цю задачу без методу координат.)

Ви ознайомилися лише з деякими способами створення геометричних задач. Сподіваємося, що заняття це захопило вас і надалі ви, складаючи все нові й нові задачі, оволодіватимете мистецтвом їх розв'язування.

Г. Ф. ОЛІЙНИК

ВИДІЛЕННЯ КВАДРАТА ДВОЧЛЕНА І РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Квадрат двочлена ви навчилися виділяти в VII класі, коли виводили формулу коренів квадратного рівняння. Розглянемо на конкретних прикладах, як, виділяючи квадрат двочлена, можна ефективно розв'язувати досить складні рівняння, розкладати на множники вирази, виконувати тотожні перетворення виразів, доводити тотожності тощо.

Приклади.

1. Розкласти на множники вираз

$(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2.$

Розв'язання. Уведемо підстановку

$$x^2 + 4x + 8 = a.$$

Тоді вираз перепишемо так:

$$a^2 + 3xa + 2x^2.$$

Виділимо з тричлена $a^2 + 3xa + 2x^2$ квадрат двочлена. Якщо доданок a^2 розглядати як квадрат його першого члена, а доданок $3xa$ як подвоєний добуток першого і другого членів, то з тотожності $3xa = 2 \cdot \frac{3}{2} xa$ випливає, що другим членом двочлена є вираз $\frac{3}{2} x$. Додамо до тричлена вираз $\frac{9}{4} x^2$ і протилежний йому вираз $-\frac{9}{4} x^2$. Дістанемо:

$$a^2 + 3xa + 2x^2 = a^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} xa + \frac{9}{4} x^2 - \frac{9}{4} x^2 + 2x^2 =$$
$$= \left(a^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} xa + \frac{9}{4} x^2\right) - \frac{9}{4} x^2 + 2x^2 = \left(a + \frac{3}{2} x\right)^2 - \frac{1}{4} x^2 =$$
$$= \left(a + \frac{3}{2} x - \frac{1}{2} x\right)\left(a + \frac{3}{2} x + \frac{1}{2} x\right) = (a + x)(a + 2x).$$

Тепер неважко розкласти на множники й запропонований вираз:

$(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2 = (x^2 + 4x + 8 + x) \times$
$\times (x^2 + 4x + 8 + 2x) = (x^2 + 5x + 8)(x^2 + 6x + 8) = (x + 2) \times$
$\times (x + 4)(x^2 + 5x + 8).$

2. Довести, що вираз $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6) + 10$ набуває додатних значень при всіх значеннях x.

Розв'язання.

Спочатку перетворимо добутки $(x-1)(x-6)$ і $(x-3) \times$ $\times (x-4)$ у многочлени.

Маємо:

$(x-1)(x-6)(x-3)(x-4) + 10 = (x^2 - 7x + 6)(x^2 - 7x + 12) + 10.$

Вираз $x^2 - 7x + 12$ подамо у вигляді суми двох доданків: $x^2 - 7x + 12 = (x^2 - 7x + 6) + 6$,

звідки

$$(x^2 - 7x + 6)((x^2 - 7x + 6) + 6) + 10 = (x^2 - 7x + 6)^2 + 6(x^2 - 7x + 6) + 10.$$

Перетворивши здобутий вираз, як у попередньому прикладі, матимемо:

$(x^2 - 7x + 6)^2 + 6(x^2 - 7x + 6) + 10 = (x^2 - 7x + 9)^2 + 1.$

Вираз $(x^2 - 7x + 9)^2 + 1$ додатний при всіх значеннях x.

3. Розв'язати рівняння:

$$\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right).$$

Розв'язання.

Виділимо квадрат з двочлена $\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2}$:

$$\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 3\left(\frac{x^2}{9} + \frac{16}{x^2}\right) = 3\left(\frac{x^2}{9} + \frac{16}{x^2} - 2 \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{4}{x} + 2 \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{4}{x}\right) =$$
$$= 3\left(\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right)^2 + \frac{8}{3}\right) = 3\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right)^2 + 8,$$

звідки

$$3\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)^2+8=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right).$$

Останнє рівняння легко розв'язати, ввівши підстановку $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=y$.

Відповідь. $x_1=6$; $x_2=-2$; $x_{3,4}=3\pm\sqrt{21}$.

4. Розв'язати рівняння:

$$20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2+48\frac{x^2-4}{x^2-1}=0. \qquad (1)$$

Нехай $\frac{x-2}{x+1}=a$, $\frac{x+2}{x-1}=b$. Тоді

$$20a^2-5b^2+48ab=0. \qquad (2)$$

Перетворимо ліву частину рівняння так, щоб можна було виділити квадрати двочленів:

$$20a^2-5b^2+48ab=36a^2-16a^2-9b^2+24ab+24ab+4b^2=(36a^2+24ab+4b^2)-(16a^2-24ab+9b^2)=(6a+2b)^2-(4a-3b)^2.$$

Вираз $(6a+2b)^2-(4a-3b)^2$ розкладемо на множники:

$$(6a+2b)^2-(4a-3b)^2=(6a+2b-4a+3b)(6a+2b+4a-3b)=(2a+5b)(10a-b).$$

Отже, рівняння (2) рівносильне рівнянню $(2a+5b)(10a-b)=0$. Звідки дістаємо:

$$2a=-5b \text{ або } 10a=b.$$

Рівняння (1), очевидно, рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$\left[\begin{aligned}&\frac{2(x-2)}{x+1}=\frac{-5(x+2)}{x-1},\\&\frac{10(x-2)}{x+1}=\frac{x+2}{x-1}.\end{aligned}\right.$$

Множина коренів першого з цих рівнянь є порожньою, а множина коренів другого складається з двох елементів 3 і $\frac{2}{3}$.

Відповідь. $x_1=3$; $x_2=\frac{2}{3}$.

5. Розв'язати рівняння:

$$x^2+\frac{81x^2}{(9+x)^2}=40.$$

Розв'язання. Виділимо з виразу $x^2+\frac{81x^2}{(9+x)^2}$ квадрат різниці двох виразів:

$$x^2+\frac{81x^2}{(9+x)^2}=x^2+\left(\frac{9x}{9+x}\right)^2-2\cdot x\cdot\frac{9x}{9+x}+2\cdot x\frac{9x}{9+x}=$$
$$=\left(x-\frac{9x}{9+x}\right)^2+\frac{18x^2}{9+x}=\left(\frac{x^2}{9+x}\right)^2+\frac{18x^2}{9+x}.$$

Рівняння набере вигляду:

$$\left(\frac{x^2}{9+x}\right)^2+\frac{18x^2}{9+x}=40. \qquad (3)$$

Для розв'язування цього рівняння введемо підстановку $\frac{x^2}{9+x}=y$.

Тоді рівняння зводиться до квадратного відносно y рівняння:

$$y^2+18y=40.$$

Розв'язавши його, знайдемо, $y=-20$ або $y=2$.

Отже, рівняння (3) рівносильне сукупності таких двох рівнянь:

$$\left[\begin{aligned}&\frac{x^2}{9+x}=-20,\\&\frac{x^2}{9+x}=2.\end{aligned}\right.$$

Кожне із здобутих рівнянь легко розв'язується.

Відповідь. $x_{1,2}=1\pm\sqrt{19}$.

6. Довести нерівність $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geqslant a(b+c+d+e)$, де a, b, c, d, e — довільні дійсні числа.

Р о з в ' я з а н н я.

Щоб довести нерівність, достатньо показати, що на заданій множині значень змінних a, b, c, d, e різниця $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-a(b+c+d+e)$ невід'ємна.

Щоб встановити це, застосуємо операцію виділення квадрата двочлена.

Запишемо доданок a^2 у вигляді суми чотирьох доданків

$$a^2=\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}$$

і виконаємо перетворення:

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-a(b+c+d+e)=$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-ab-ac-ad-ae=$$
$$=\left(\frac{a^2}{4}-ab+b^2\right)+\left(\frac{a^2}{4}-ac+c^2\right)+\left(\frac{a^2}{4}-ad+d^2\right)+$$
$$+\left(\frac{a^2}{4}-ac+c^2\right)=\left(\frac{a}{2}-b\right)^2+\left(\frac{a}{2}-c\right)^2+$$
$$+\left(\frac{a}{2}-d\right)^2+\left(\frac{a}{2}-e\right)^2.$$

Сума, яку ми дістали, невід'ємна при всіх дійсних значеннях a, b, c, d, e, звідки і випливає справедливість доводжуваної нерівності.

7. Доведіть, що значенням виразу $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$ є натуральне число.

Р о з в ' я з а н н я.

Виділимо з виразів $11+6\sqrt{2}$ і $11-6\sqrt{2}$ квадрати двочленів:

$$11+6\sqrt{2}=9+6\sqrt{2}+2=3^2+2\cdot 3\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=$$
$$=(3+\sqrt{2})^2;$$
$$11-6\sqrt{2}=9-6\sqrt{2}+2=(3-\sqrt{2})^2.$$

Отже,

$$\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}+$$
$$+\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}=3+\sqrt{2}+3-\sqrt{2}=6.$$

8. Розв'язати рівняння:

$$\sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+11+6\sqrt{x+2}}=6. \qquad (5)$$

Р о з в ' я з а н н я. Записавши підкореневі вирази у вигляді квадратів двочленів, матимемо:

$$\sqrt{(3-\sqrt{x+2})^2}+\sqrt{(3+\sqrt{x+2})^2}=6. \qquad (6)$$

Рівняння (6) рівносильне рівнянню

$$|3-\sqrt{x+2}|+3+\sqrt{x+2}=6. \qquad (7)$$

Рівняння (7) рівносильне сукупності двох систем:

$$\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}3-\sqrt{x+2}\geqslant 0,\\ 3-\sqrt{x+2}+3+\sqrt{x+2}=6;\end{cases} & (а)\\ \begin{cases}3-\sqrt{x+2}<0,\\ -3+\sqrt{x+2}+3+\sqrt{x+2}=6.\end{cases} & (б)\end{array}\right.$$

Очевидно, що рівняння із системи (а) має безліч розв'язків, які задовольняють умову $3-\sqrt{x+2}\geqslant 0$.

Розв'яжемо нерівність $3-\sqrt{x+2}\geqslant 0$. Вона рівносильна системі:

$$\begin{cases}x+2\leqslant 9,\\ x+2\geqslant 0,\end{cases} \text{ з якої маємо: } \begin{cases}x\leqslant 7,\\ x\geqslant -2.\end{cases}$$

Отже, розв'язком системи (а) є проміжок $[-2; 7]$.

Система (б) розв'язків не має. Пропонуємо читачеві переконатися в цьому.

Відповідь. Проміжок $[-2; 7]$.

9. Доведіть, що сума $\sqrt{\sin^4 x + \cos 2x} + \sqrt{\cos^4 x - \cos 2x}$ не залежить від x, і знайдіть цю суму.

Розв'язання.

$$\sqrt{\sin^4 x + \cos 2x} + \sqrt{\cos^4 x - \cos 2x} =$$
$$= \sqrt{\sin^4 x + 1 - 2\sin^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 1 - 2\cos^2 x} =$$
$$= \sqrt{(1 - \sin^2 x)^2} + \sqrt{(1 - \cos^2 x)^2} = 1 - \sin^2 x +$$
$$+ 1 - \cos^2 x = 1.$$

Вправи

1. Задано вираз $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5$, де x і y — дійсні числа. Знайти ті значення x і y, при яких вираз перетворюється в нуль.

2. Розкладіть на множники:
а) $(x^2 + x + 4)^2 + 8x(x^2 + x + 4) + 15x^2$;
б) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15$.

3. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^2 + x + x^{-1} + x^{-2} = 4$;

б) $4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 17$;

в) $\frac{4x^2}{3} + \frac{3}{x^2} - 4 = 10\left(\frac{2x}{3} + \frac{1}{x}\right)$;

г) $x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} = 5$;

д) $\sqrt{x + 1 + 2\sqrt{x}} + \sqrt{x + 1 - 2\sqrt{x}} = 2$.

4. Доведіть, що значення виразу — натуральне число:

$$\frac{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{17 - 12\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{17 + 12\sqrt{2}}}.$$

5. Доведіть рівність:

$$\sqrt{2}\left(\sqrt{8 + \sqrt{2}\cdot\sqrt{9 + \sqrt{17}}} + \sqrt{8 - \sqrt{2}\cdot\sqrt{9 - \sqrt{17}}}\right) = 2\sqrt{17}.$$

6. Доведіть, що сума $\sqrt{4\cos^4 x - 6\cos 2x + 3} + \sqrt{4\sin^4 x + 6\cos 2x + 3}$ не залежить від x, і обчисліть її.

7. Визначте вид трикутника, якщо між довжинами його сторін існує така залежність:

$$a^4 + b^4 + c^4 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2.$$

8. Доведіть, що рівняння $(a^2 + b^2 + c^2)\, x^2 + 2\,(a + b + c)\, x + 3 = 0$ не має дійсних коренів, якщо $a \neq b \neq 0$.

9. Доведіть, що $a^4 + 2a^3b + 2ab^3 + b^4 \leqslant 6a^2b^2$, де a і b — дійсні числа одного знака.

І. А. КУШНІР

ДОВЕДЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Теорія нерівностей відіграє в математиці велику роль, а деякі її сучасні галузі, зокрема лінійне та нелінійне програмування, теорія ігор, дослідження операцій тощо, повністю грунтуються на цій теорії.

Розглянемо досить широкий клас цікавих і важливих для застосувань нерівностей, доведення яких пов'язані з геометричними міркуваннями і які на цій підставі називатимемо *геометричними*.

Наведемо числові нерівності, які використовуватимемо далі при доведенні геометричних нерівностей:

1°. $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \geqslant n\sqrt[n]{a_1a_2a_3\dots a_n},\ a_1 > 0,$ (1°)
$a_2 \geqslant 0, \dots, a_n \geqslant 0;$ (2°)

2°. $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \geqslant a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3;$

3°. $(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant$ (3°)
$\geqslant n^2,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0\dots,\ a_n > 0;$ (4°)

4°. $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant abc(a + b + c);$

5°. $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2},\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$ (5°)

Проілюструємо застосування нерівності (1°) при $n = 2$.

1. a, b, c — довжини сторін трикутника ABC, p — його півпериметр, r — радіус вписаного кола. Довести, що

$$\frac{1}{\sqrt{p-a}}+\frac{1}{\sqrt{p-b}}+\frac{1}{\sqrt{p-c}}<\frac{\sqrt{p}}{r}.$$

Доведення. Перетворимо ліву частину нерівності:

$$\frac{1}{\sqrt{p-a}}+\frac{1}{\sqrt{p-b}}+\frac{1}{\sqrt{p-c}}=$$
$$=\frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}+\sqrt{(p-a)(p-c)}+\sqrt{(p-a)(p-b)}}{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

З нерівності (1°) для $n=2$ маємо:

$$a_1+a_2\geqslant 2\sqrt{a_1a_2},$$

звідки

$$\sqrt{a_1a_2}\leqslant\frac{a_1+a_2}{2}.$$

Тоді

$$\sqrt{(p-b)(p-c)}\leqslant\frac{p-b+p-c}{2},$$
$$\sqrt{(p-a)(p-c)}\leqslant\frac{p-a+p-c}{2},$$
$$\sqrt{(p-a)(p-b)}\leqslant\frac{p-a+p-b}{2}.$$

Додавши три останні нерівності, дістанемо:

$$\sqrt{(p-b)(p-c)}+\sqrt{(p-a)(p-c)}+\sqrt{(p-a)(p-b)}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2p-b-c+2p-a-c+2p-a-b}{2}=$$
$$=\frac{6p-2(a+b+c)}{2}=\frac{6p-4p}{2}=p.$$

Позначимо через S площу $\triangle ABC$. Тоді

$$\frac{1}{\sqrt{p-a}}+\frac{1}{\sqrt{p-b}}+\frac{1}{\sqrt{p-c}}<$$
$$<\frac{p}{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}}=\frac{p\sqrt{p}}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}=$$
$$=\frac{p\sqrt{p}}{S}=\frac{p\sqrt{p}}{p\cdot r}=\frac{\sqrt{p}}{r}.$$

2. Бічні ребра трикутної піраміди взаємно перпендикулярні. Довести, що

$$S_1+S_2+S_3\geqslant\frac{9H^2}{2},$$

де S_1, S_2, S_3 — площі бічних граней, H — висота піраміди.

Доведення. Позначимо довжини бічних ребер піраміди через a, b, c (мал. 1). Тоді, за нерівністю (1°), при $n=3$ дістанемо:

$$S_1+S_2+S_3=\frac{1}{2}(ab+bc+ac)\geqslant\frac{3}{2}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}. \quad (1)$$

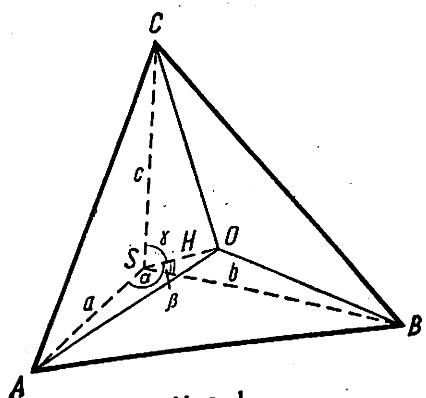
Відомо, що пряма, яка проходить через вершину прямого тригранного кута, утворює з його ребрами такі кути α,β,γ, що $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. В даному випадку

$$\cos\alpha=\frac{H}{a},\ \cos\beta=\frac{H}{b},$$

$$\cos\gamma=\frac{H}{c}$$

і

$$\frac{H^2}{a^2}+\frac{H^2}{b^2}+\frac{H^2}{c^2}=1,$$



Мал. 1

звідки

$$H^2 = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2},$$

Застосуємо ще раз нерівність (1°) при $n = 3$. Дістанемо

$$H^2 = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2} \leqslant \frac{a^2b^2c^2}{3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}} = \frac{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{3},$$

або $\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geqslant 3H^2$ (2). З нерівностей (1) і (2) випливає, що $S_1 + S_2 + S_3 \geqslant \frac{3}{2}\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geqslant \frac{9}{2}H^2$.

Що й треба було довести.

Проілюструємо застосування нерівності (2°).

3. α, β, γ — величини плоских кутів тригранного кута. Довести, що $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha < \frac{4}{3}\pi^2$.

Доведення. Відомо, що сума плоских кутів тригранного кута менша за 2π:

$$\alpha + \beta + \gamma < 2\pi, \text{ тобто } (\alpha + \beta + \gamma)^2 < 4\pi^2,$$

або

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma) < 4\pi^2. \quad (3)$$

Згідно з нерівністю (2°),

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \leqslant \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2. \quad (4)$$

Додавши нерівності (3) і (4), дістанемо:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) < 4\pi^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

$$\text{або } \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha < \frac{4}{3}\pi^2.$$

Проілюструємо застосування нерівності (3°) при $n = 3$, $n = 4$.

4. Довести, що

$$h_a + h_b + h_c \geqslant 9r,$$

де h_a, h_b, h_c — довжини висот трикутника, r — радіус вписаного в нього кола.

Доведення. Доведемо спочатку, що

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}. \quad (5)$$

Справді, якщо a, b, c — довжини сторін трикутника, S — його площа, то

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a + b + c}{2S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}.$$

За нерівністю (3°) при $n = 3$

$$(h_a + h_b + h_c)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \geqslant 9.$$

Врахувавши рівність (5), дістанемо:

$$h_a + h_b + h_c \geqslant 9r.$$

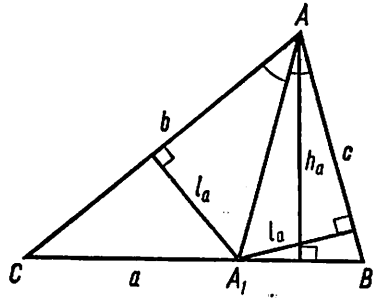
5. Довести, що $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 \geqslant 16\rho$, де h_1, h_2, h_3, h_4 — довжини висот тетраедра, ρ — радіус вписаної в нього кулі.

Доведення. Якщо S_1, S_2, S_3, S_4 — площі граней тетраедра, Q — площа його повної поверхні, то

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} = \frac{1}{\frac{3V}{S_1}} + \frac{1}{\frac{3V}{S_2}} + \frac{1}{\frac{3V}{S_3}} + \frac{1}{\frac{3V}{S_4}} =$$

$$= \frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{3V} = \frac{Q}{3V} = \frac{1}{\rho}. \quad (6)$$

Пропонуємо читачам самостійно довести формулу $\rho = \frac{3V}{Q}$, де ρ — радіус вписаної у піраміду кулі, V і Q — об'єм цієї піраміди і площа її повної поверхні.



Мал. 2

З нерівності (3°) при $n=$ маємо:

$$(h_1+h_2+h_3+h_4)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}\right)\geqslant 16.$$

Враховуючи рівність (6), дістанемо:

$$h_1+h_2+h_3+h_4\geqslant 16\rho.$$

Покажемо застосування нерівності (5°).

6. h_a, h_b, h_c — довжини висот трикутника ABC, l_a, l_b, l_c — відстані від основ бісектрис кутів трикутника до його сторін. Довести, що

$$\frac{l_a}{h_a}+\frac{l_b}{h_b}+\frac{l_c}{h_c}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Доведення. AA_1 — бісектриса $\angle BAC$ трикутника ABC (мал. 2). Позначимо площі трикутників ABC, AA_1B, AA_1C через S, S_1, S_2. Тоді

$$S=S_1+S_2,\ \text{або}\ \frac{c\cdot l_a}{2}+\frac{b\cdot l_a}{2}=\frac{a\cdot h_a}{2},$$

де a, b, c — довжини сторін трикутника ABC. Отже,

$$\frac{l_a}{h_a}=\frac{a}{b+c}.$$

Аналогічно:

$$\frac{l_b}{h_b}=\frac{b}{a+c},\ \frac{l_c}{h_c}=\frac{c}{a+b}\ \text{і}\ \frac{l_a}{h_a}+\frac{l_b}{h_b}+\frac{l_c}{h_c}=$$
$$=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}.$$

Врахувавши нерівність (5°), дістанемо:

$$\frac{l_a}{h_a}+\frac{l_b}{h_b}+\frac{l_c}{h_c}\geqslant\frac{3}{2}.$$

7. У площині трикутника ABC взято точку X. Довести, що

$$p<XA+XB+XC<2p,$$

де p — півпериметр трикутника ABC.

Доведення. Доведемо ліву частину нерівності. Відомо, що $XA+XB>AB$, $XA+XC>AC$, $XB+XC>BC$. Тоді

$$2(XA+XB+XC)>2p,\ \text{або}\ XA+XB+XC>p.$$

Праву частину нерівності доведемо за допомогою векторів. Маємо: $|\vec{AB}|+|\vec{BC}|>|\vec{AC}|$. Оскільки $\vec{AC}=\vec{AX}+\vec{XC}$, то $|\vec{AB}|+|\vec{BC}|>|\vec{AX}|+|\vec{XC}|$.

Аналогічно: $|\vec{BC}|+|\vec{AC}|>|\vec{BX}|+|\vec{AX}|$, $|\vec{AB}|+|\vec{AC}|>|\vec{BX}|+|\vec{CX}|$. Додавши ці три нерівності, дістанемо:

$$2(|\vec{AB}|+|\vec{AC}|+|\vec{BC}|)>2(|\vec{AX}|+|\vec{BX}|+|\vec{CX}|),$$

або

$$XA+XB+XC<2p.$$

8. Якщо A, B, C — величини кутів трикутника ABC, то

$$1)\ \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8};\qquad 2)\ R\geqslant 2r,$$

де R — радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, r — радіус вписаного в нього кола.

Доведення. 1) Оскільки $\frac{A}{2}\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, то

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}},\ \text{де}\ \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

(за теоремою косинусів).

Тоді

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}\leqslant\sqrt{\frac{a^2}{4bc}},$$

отже, $\sin\frac{A}{2}\leqslant\frac{a}{2\sqrt{bc}}$. Аналогічно

$$\sin\frac{B}{2}\leqslant\frac{b}{2\sqrt{ac}},\quad \sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{c}{2\sqrt{ab}},$$

отже,

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{abc}{8abc}=\frac{1}{8}.$$

2) $$r=\frac{S}{p}=\frac{abc}{4Rp}=\frac{2R\sin A\cdot 2R\sin B\cdot 2R\sin C}{4R\cdot R(\sin A+\sin B+\sin C)}=$$

$$=\frac{2R\sin A\sin B\sin C}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}=$$

$$=\frac{R\sin A\sin B\sin C}{\sin\frac{A+B}{2}\cdot 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}=$$

$$=\frac{2R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\cdot 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\ 2\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=$$

$$=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant 4R\cdot\frac{1}{8}=\frac{R}{2},\ \text{звідки}\ R\geqslant 2r.$$

Остання нерівність часто використовується для доведення інших геометричних нерівностей.

9. Якщо a, b, c — довжини сторін трикутника ABC, p — його півпериметр, S — площа, R — радіус описаного кола, r — радіус вписаного в трикутник кола, то

$$1)\ a^4+b^4+c^4\geqslant 16S^2,\quad 2)\ \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geqslant\frac{1}{R^2},$$

$$3)\ S\geqslant 3\sqrt{3}r^2.$$

Довести.

Доведення. 1) З нерівності (4°) маємо:

$$a^4+b^4+c^4\geqslant abc(a+b+c)=4SR\cdot\frac{2S}{r}=\frac{R}{r}\cdot 8S^2\geqslant 16S^2.$$

Що й треба було довести.

$$2)\ \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2};$$

з нерівності (2°) дістанемо:

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\geqslant ab^2c+a^2bc+abc^2=abc(a+b+c).$$

Отже,

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geqslant\frac{abc(a+b+c)}{a^2b^2c^2}=\frac{a+b+c}{abc}=$$

$$=\frac{\frac{2S}{r}}{4RS}=\frac{1}{2Rr}\geqslant\frac{1}{2R\cdot\frac{R}{2}}=\frac{1}{R^2}.$$

3) З нерівності (1°) при $n=3$ маємо:

$$(a+b+c)^3\geqslant 27abc,\ 8p^3\geqslant 27\cdot 4R\cdot S\geqslant 27\cdot 8r\cdot S,$$

$$8\left(\frac{S}{r}\right)^3\geqslant 27\cdot 8r\cdot S,\ \frac{S^3}{r^3}\geqslant 27r\cdot S,\ S^2\geqslant 27r^4,$$

$$S\geqslant\sqrt{27}\cdot r^2,\ S\geqslant 3\sqrt{3}r^2.$$

10. l_a, l_b, l_c — бісектриси внутрішніх кутів трикутника ABC; p — його півпериметр; A, B, C — величини кутів. Довести, що

$$l_a+l_b+l_c\leqslant 2p.$$

Доведення. Можна довести, що $l_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$ (зробіть це самостійно).

Врахувавши, що $\left|\cos\frac{A}{2}\right| \leqslant 1$, і застосувавши нерівніст[ь] (1°) для $n=2$, матимемо:

$$l_a \leqslant \frac{2bc}{b+c} \leqslant \frac{(b+c)^2}{2(b+c)} = \frac{b+c}{2}.$$

Аналогічно $l_b \leqslant \frac{c+a}{2}$, $l_c \leqslant \frac{b+a}{2}$.

Отже, $l_a + l_b + l_c \leqslant 2p$.

11. У трикутнику ABC $b+c=2R\sqrt{3}$. Довести, щ[о] $\frac{\sin 2A}{\sin 3A} > \frac{2}{3}$, де a, b, c — сторони даного трикутника; R — радіус описаного кола; $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — його кути.

Доведення. Враховуючи, що $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$, матимемо $b+c=2R\sqrt{3}$, або $2R(\sin B+\sin C) = 2R\sqrt{3}$, $2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = \sqrt{3}$, звідки $\sin\frac{B+C}{2}\cdot 2\cos\frac{B-C}{2} = \sqrt{3}$.

Оскільки $b \neq c$, $B \neq C$, то

$$0 < \cos\frac{B-C}{2} < 1 \text{ і } \sin\frac{B+C}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\frac{A}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отже, $A < \frac{\pi}{3}$ і $\frac{1}{2} < \cos A < 1$; тому

$$\frac{\sin 2A}{\sin 3A} = \frac{2\sin A\cos A}{\sin A\,(3-4\sin^2 A)} = \frac{2\cos A}{3-4\sin^2 A} = \frac{2\cos A}{4\cos^2 A - 1}.$$

Позначимо $2\cos A = x$, де $x \in \,]1;\,2[$. Тоді

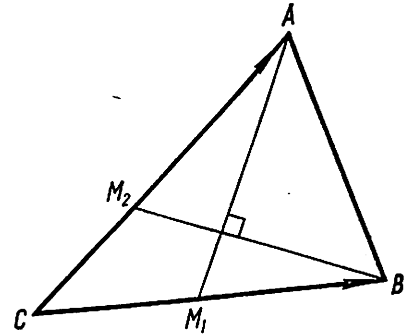
$$\frac{2\cos A}{4\cos^2 A-1} = \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{x-\frac{1}{x}}.$$

Функція $f(x) = x - \frac{1}{x}$ при $x \in \,]1;\,2]$ монотонно зростає $\left(f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0 \text{ при } x \in \,]1;\,2]\right)$ і досягає свого найбільшого зна-

чення при $x = 2$, тобто при $x \in \,]1;\,2[$ $f(x) < 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Отже, $\frac{1}{f(x)} > \frac{2}{3}$ при $x \in \,]1;\,2[$.

12. Медіана AM_1 трикутника ABC перпендикулярна до медіани BM_2. Довести, що $\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2$, де $a = BC$, $b = AC$.



Мал. 3

Доведення. Позначимо (мал. 3) $\vec{CA} = \vec{b}$, $\vec{CB} = \vec{a}$, де вектори $\vec{CA}$ і $\vec{CB}$ — неколінеарні. Тоді $\vec{AM_1} = \frac{\vec{a}}{2} - \vec{b}$, $\vec{BM_2} = \frac{\vec{b}}{2} - \vec{a}$. За умовою

$AM_1 \perp BM_2$, тобто $\vec{AM_1}\cdot\vec{BM_2} = 0$, або

$$\left(\frac{\vec{a}}{2} - \vec{b}\right)\left(\frac{\vec{b}}{2} - \vec{a}\right) = 0,$$

$$\frac{\vec{a}\,\vec{b}}{4} - \frac{\vec{b}^2}{2} - \frac{\vec{a}^2}{2} + \vec{a}\cdot\vec{b} = 0.$$

Але

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = a^2,\ \vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = b^2,\ \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos ACB.$$

$$\frac{5}{4}ab\cos ACB = \frac{a^2+b^2}{2},\quad a^2+b^2-2ab\cos ACB = \frac{a^2+b^2}{5},\quad c^2 = \frac{a^2+b^2}{5}.$$

Оскільки $c < a+b$ і $c > |a-b|$, то трикутник існує, якщо виконуються нерівності

$$\begin{cases} c^2 < (a+b)^2, \\ c^2 > (a-b)^2, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \dfrac{a^2+b^2}{5} < (a+b)^2, \\ (a-b)^2 < \dfrac{a^2+b^2}{5}, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} 4a^2 + 10ab + 4b^2 > 0, \\ 4a^2 - 10ab + 4b^2 < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 + 5\left(\dfrac{a}{b}\right) + 2 > 0, \\ 2\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 - 5\left(\dfrac{a}{b}\right) + 2 < 0. \end{cases}$$

Оскільки a і b — довжини сторін трикутника, то перша з нерівностей системи очевидна. З другої нерівності дістанемо:

$$\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2.$$

Що й треба було довести.

13. Серед усіх прямокутних паралелепіпедів з даною діагоналлю d знайти той, який має найбільшу площу повної поверхні, і обчислити її.

Р о з в ' я з а н н я. Позначимо ребра прямокутного паралелепіпеда через a, b і c. Тоді повну поверхню S паралелепіпеда можна подати у вигляді

$$S = 2\ (ab + ac + bc).$$

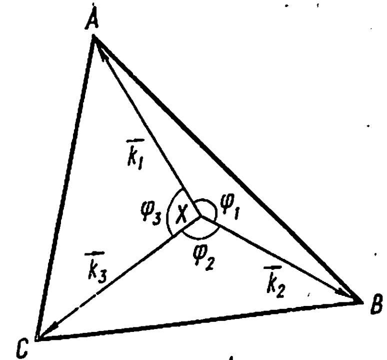
За нерівністю (2°) маємо:

$$2(ab + ac + bc) \leqslant 2(a^2 + b^2 + c^2) = 2d^2.$$

Отже, площа повної поверхні даного паралелепіпеда буде найбільшою і дорівнюватиме $2d^2$, коли

$2ab + 2ac + 2bc = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2$, звідки $(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 0$, або $a = b = c$, тобто з усіх прямокутних паралелепіпедів з даною діагоналлю найбільшу повну поверхню $2d^2$ має куб.

14. Точка X належить площині трикутника ABC. Знайти найменше значення виразу $XA^2 + XB^2 + XC^2$ (мал. 4).



Мал. 4

Р о з в' я з а н н я. Введемо позначення: $\overrightarrow{XA} = \vec{k}_1$, $\overrightarrow{XB} = \vec{k}_2$, $\overrightarrow{XC} = \vec{k}_3$, a, b, c — довжини сторін трикутника ABC, $\varphi_1 = \angle AXB$, $\varphi_2 = \angle BXC$, $\varphi_3 = \angle AXC$. Тоді

$$(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3)^2 \geqslant 0, \text{ або}$$

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + 2(\vec{k}_1\vec{k}_2 + \vec{k}_1\vec{k}_3 + \vec{k}_3\vec{k}_2) \geqslant 0. \quad (7)$$

З трикутників XAB, XBC, XAC за теоремою косинусів маємо:

$$2|\vec{k}_1||\vec{k}_2|\cos\varphi_1 = k_1^2 + k_2^2 - c^2,$$

$$2|\vec{k}_2||\vec{k}_3|\cos\varphi_2 = k_2^2 + k_3^2 - a^2,$$

$$2|\vec{k}_1||\vec{k}_3|\cos\varphi_3 = k_1^2 + k_3^2 - b^2,$$

звідки

$$2\vec{k}_1\vec{k}_2 = k_1^2 + k_2^2 - c^2,$$

$$2\vec{k}_2\vec{k}_3 = k_2^2 + k_3^2 - a^2,$$

$$2\vec{k}_1\vec{k}_3 = k_1^2 + k_3^2 - b^2.$$

Тоді вираз (7) можна записати так:

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) - (a^2 + b^2 + c^2) \geqslant 0,$$

або

$$3(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) - (a^2 + b^2 + c^2) \geqslant 0, \text{ звідки}$$

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \geqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

Отже, найменшим значенням виразу $|XA|^2+|XB|^2+|XC|^2$ буде,

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

15. Серед усіх трикутників знайти той, що має найбільший добуток синусів внутрішніх кутів.

Розв'язання. Нехай $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — кути трикутника ABC. Довести, що

$$\sin A\sin B\sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Нехай $\angle A_1 = 180° - 2\angle A$, $\angle B_1 = 180° - 2B$, $\angle C_1 = 180° - 2C$. Тоді, за доведеною вище нерівністю:

$$\sin\frac{A_1}{2}\sin\frac{B_1}{2}\sin\frac{C_1}{2}\leqslant\frac{1}{8}.$$

Отже,

$$\sin\frac{A_1}{2}\sin\frac{B_1}{2}\sin\frac{C_1}{2}=\cos A\cos B\cos C\leqslant\frac{1}{8}.$$

Крім того,

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)}{8}},$$

тобто

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\leqslant\sqrt{\frac{1}{8}\left(\frac{3+\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right)^3}.$$

За нерівністю (1°):

$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)\leqslant$$
$$\leqslant\left(\frac{1+\cos A+1+\cos B+1+\cos C}{3}\right)^3=$$
$$=\left(\frac{3+\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right)^3.$$

Але (за цією самою нерівністю)

$$\cos A+\cos B+\cos C = 1-2\sin^2\frac{A}{2}+1-2\sin^2\frac{B}{2}+$$
$$+1-2\sin^2\frac{C}{2}=3-2\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)=$$
$$=1+2\cdot2\cdot\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant 1+4\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{2}.$$

Таким чином,

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\leqslant\sqrt{\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{27}\left(3+\frac{3}{2}\right)^3}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{9^3}{2^3}}=\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Маємо:

$$\sin A\sin B\sin C = 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\leqslant$$
$$\leqslant 8\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}=\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Отже, серед усіх трикутників найбільший добуток синусів внутрішніх кутів має рівносторонній, оскільки у нерівності (1°) рівність виконується при $a_1 = a_2 = a_3 \ldots = a_n$.

16. Серед усіх чотирикутників, вписаних у півколо радіуса R, знайти той, що має найбільшу площу.

Розв'язання. Введемо позначення кутів чотирикутника $ABCD: BAD = x$, $CDA = y$ (мал. 5), M — точка перетину його діагоналей. Тоді

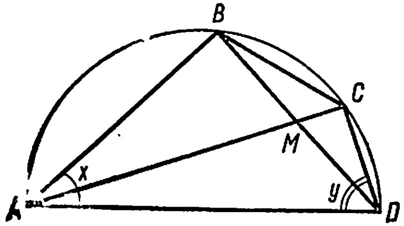
$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}BD\cdot AC\sin AMD = 2R^2\sin x\sin y\sin(x+y),$$ де

$$\angle AMD=\frac{1}{2}(180°+\smile BC),$$ а $180° + \smile BC =$
$$=\smile AB+\smile BC+\smile CD+\smile BC = 2y+2x;$$

отже,

$$\angle AMD=\frac{1}{2}(2y+2x)=x+y.$$

7 4-996



Мал. 5

Покладемо $x + y = 180° - z$. Тоді з попередньої задачі випливає, що

$$\sin x \sin y \sin (x + y) \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$$ і

$$S_{ABCD} \leqslant 2R^2 \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2.$$

Знак рівності відповідає випадку $x = y = z = 60°$.

Отже, з усіх чотирикутників, вписаних у півколо радіуса R, найбільшу площу має рівнобедрена трапеція.

Вправи

1. a, b, c—сторони трикутника ABC $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — його кути. Довести, що

1) $\frac{a-b}{p-b} + \frac{b+c}{p-b} + \frac{c-a}{p-a} \leqslant 0$ (p — півпериметр ΔABC);

2) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4S\sqrt{3}$ (S — площа ΔABC);

3) $\angle A^2 + \angle B^2 + \angle C^2 \geqslant \frac{\pi^2}{3}$.

2. У трикутнику ABC h_a, h_b, h_c, m_a, m_b, m_c, l_a, l_b, l_c — довжини його висот, медіан і, відповідно, бісектрис; R і r — радіуси описаного і вписаного кіл.

Довести, що

1) $3R \geqslant h_a + h_b$; 2) $m_a \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{a(8p-9a)}$;

3) $S \geqslant 2\sqrt{Rr^3}$; 4) $l_a + l_b + l \leqslant \frac{9}{2}R$.

3. У правильному тетраедрі R — радіус описаної, r — радіус вписаної кулі. Довести, що $R \geqslant 3r$.

4. Серед усіх трикутників з даною площею S знайти той, у якого найбільша сума квадратів довжин сторін.

Список використаної та рекомендованої літератури

1. В. Г. Коваленко, М. Б. Гельфанд, Р. П. Ушаков. Доведення нерівностей. К., Вища шк., 1979. 96 с.

2. Копцюх М. Г., Савич Є. Ф. Доведення нерівностей. К., Рад. шк., 1982. 144 с.

3. Коровкин П. П. Неравенства. М., Наука, 1983. 71 с.

Я. С. БРОДСЬКИЙ, А. К. СЛІПЕНКО

ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛА ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

У курсі алгебри та початків аналізу ви ознайомилися із застосуваннями інтеграла до обчислення площ та об'ємів фігур, до розв'язування деяких фізичних задач.

Проте з допомогою інтегрального числення можна ефективно розв'язувати значно ширше коло різноманітних задач, у тому числі й таких, які традиційно розв'язують елементарними методами, не застосовуючи поняття інтеграла.

Розглянемо ряд прикладів таких задач і наведемо докладні їх розв'язання.

Нерівності

З означення інтеграла випливає, що для невід'ємної і неперервної на проміжку $[a; b[$ функції $f(x)$ справджується нерівність $\int_a^x f(t)\,dt \geqslant 0$ для всіх $x \in [a; b[$.

На цій підставі можна довести таку теорему:

Якщо функції f і g неперервні на проміжку $[a; b[$ і для всіх $x \in [a; b[$ $f(x) \geqslant g(x)$, то при всіх x з проміжку $[a; b[$

$$\int_a^x f(t)\,\partial t \geqslant \int_a^x g(t)\,dt.$$

Задачі.

1. Довести, що для всіх додатних значень x

$$e^x \geqslant 1 + x. \qquad (1)$$

Розв'язання. При $x \geqslant 0$ маємо очевидну нерівність $e^x \geqslant 1$. Функції $f(x) = e^x$ і $g(x) = 1$ задовольняють на проміжку $[0; \infty[$ умови сформульованого вище твердження. Тому для довільного $x \geqslant 0$

$$\int_0^x e^t\,dt \geqslant \int_0^x 1 \cdot dt,$$

звідки $e^x - 1 \geqslant x$.

Зауважимо, що нерівність (1) справджується й при від'ємних значеннях x.

Застосувавши той самий метод до нерівності (1), дістанемо

$$\int_0^x e^t\,dt \geqslant \int_0^x (1 + t)\,dt,$$

або

$$e^x - 1 \geqslant x + \frac{x^2}{2},$$

тобто $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

Міркуючи аналогічно, маємо:

$$e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6},\ e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \text{ і т. д.}$$

Зауважимо, що ці нерівності можна довести й методами диференціального числення.

2. Довести, що при $b \geqslant a > 0$ виконується нерівність:

$$\ln\frac{b}{a} \geqslant 2\frac{b-a}{b+a}. \qquad (2)$$

Розв'язання. Нерівність (2) подамо у вигляді:

$$\ln\frac{b}{a} \geqslant 2\frac{\frac{b}{a} - 1}{\frac{b}{a} + 1}.$$

Позначивши $x = \frac{b}{a}$, дістанемо:

$$\ln x \geqslant 2\frac{x-1}{x+1}. \qquad (3)$$

Доведемо, що нерівність (3) виконується при $x \geqslant 1$. У задачі 1 ми виходили з очевидної нерівності: $e^x \geqslant 1$ при $x \geqslant 0$. Спробуємо і в задачі 2 записати правильну нерівність, з якої інтегруванням можна дістати нерівність (3). Продиференціюємо обидві частини нерівності (3):

$$(\ln x)' = \frac{1}{x};\ \left(2\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{4}{(x+1)^2}.$$

Легко довести, що при $x > 0$ $\frac{1}{x} \geqslant \frac{4}{(x+1)^2}$. Застосовуючи на проміжку $[1; \infty[$ сформульовану вище теорему, дістанемо:

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt \geqslant \int_1^x \frac{4dt}{(t+1)^2}.$$

Оскільки

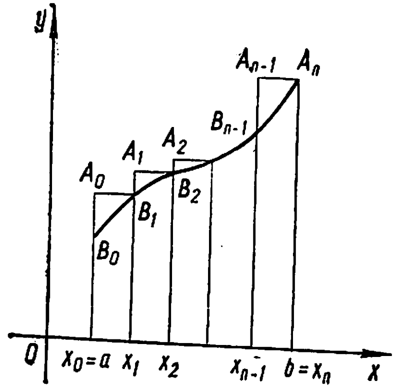
$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x,\ \int_1^x \frac{4dt}{(t+1)^2} = -\frac{4}{t+1}\Big|_1^x = -\frac{4}{x+1} + 2 = 2\frac{x-1}{x+1},$$

то $\ln x \geqslant 2\frac{x-1}{x+1}$, $x \geqslant 1$.

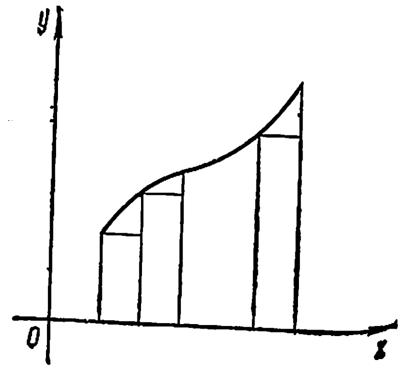
Відомо, що $\int_a^b f(x)\,dx$ ($f(x) \geqslant 0$ при $a \leqslant x \leqslant b$) дорівнює площі криволінійної трапеції, утвореної графіком функції $f(x)$, відрізком $[a; b]$ осі Ox і перпендикулярами до осі Ox у точках a і b.

Нехай функція $f(x)$ додатна, неперервна й зростаюча на $[a; b]$. Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ на n частин точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$



Мал. 1



Мал. 2

Сума

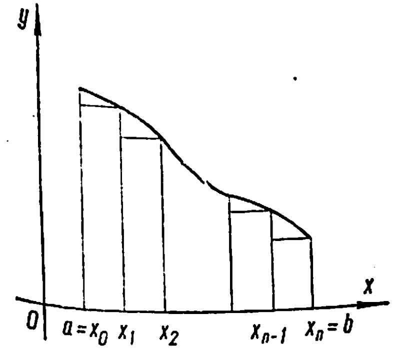
$$f(x_1)(x_1-x_0)+f(x_2)(x_2-x_1)+\dots+f(x_n)(x_n-x_{n-1})=$$
$$=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k-x_{k-1})$$

дорівнює сумі площ прямокутників, побудованих на відрізках $[x_{k-1}, x_k]$ як на основах, з висотами $f(x_{k-1})$, тобто дорівнює площі ступінчастої фігури $aA_0B_1A_1B_2A_2 \dots B_{n-1}A_{n-1}A_nb$ (мал. 1). Оскільки функція $f(x)$ зростаюча, то ця площа менша за площу криволінійної трапеції aB_0A_nb. Звідси

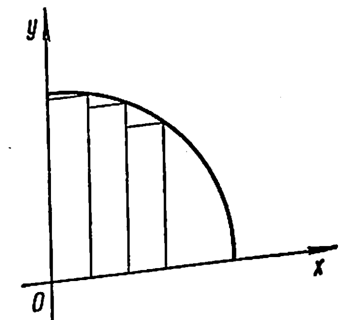
$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k-x_{k-1}) > \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (4)$$

Аналогічно (мал. 2)

$$\int_a^b f(x)\,dx > \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k-x_{k-1}). \qquad (5)$$



Мал. 3



Мал. 4

Якщо функція $f(x)$ додатна, неперервна й спадна на $[a; b]$ (мал. 3), то

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k-x_{k-1}) < \int_a^b f(x)\,dx < \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k-x_{k-1}). \qquad (6)$$

3. Довести, що для кожного $n \in N$:

$$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{n^3}<\frac{3}{2}.$$

Розв'язання. Для $n=1$ нерівність очевидна. Для $n>1$ покладемо в (6) $f(x)=\frac{1}{x^3}$, $a=1$, $b=n$, $x_k=k$ ($k=1, \dots, n$). При $x>0$ функція $f(x)$ додатна, неперервна й спадна, тому

$$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{n^3}=1+\frac{1}{2^3}(2-1)+\frac{1}{3^3}(3-2)+\dots+$$
$$+\frac{1}{n^3}(n-(n-1))=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^3}(k-(k-1))<1+$$

$$+\int_1^n \frac{dx}{x^3} = 1 + \frac{1}{-2x^2}\Big|_1^n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2} < \frac{3}{2}.$$

4. Позначимо $S_n = \frac{1}{n}\left(\cos\frac{\pi}{2n} + \cos\frac{2\pi}{2n} + \cdots + \cos\frac{\pi(n-1)}{2n}\right)$. Довести, що для кожного $n \in N$

$$\frac{2}{\pi} - \frac{1}{n} < S_n < \frac{2}{\pi}.$$

Розв'язання. Очевидно, що

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\cos\frac{\pi}{2n} + \cos\frac{2\pi}{2n} + \cdots + \cos\frac{\pi(n-1)}{2n} + \cos\frac{\pi n}{2n}\right).$$

Розглянемо функцію $f(x) = \cos x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Вона неперервна, додатна й спадна. Скористаємося нерівністю (6) при $x_0 = 0$, $x_k = \frac{k\pi}{2n}$ $(k = 1, \ldots, n)$. Точки x_k розбили проміжок $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ на рівні частини довжиною $\frac{\pi}{2n}$ (мал. 4). Маємо:

$$\frac{\pi}{2n}\left(\cos\frac{\pi}{2n} + \cos\frac{2\pi}{2n} + \cdots + \cos\frac{(n-1)\pi}{2n} + \cos\frac{n\pi}{2n}\right) <$$

$$< \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 1,$$

звідки $\frac{\pi}{2} \cdot S_n < 1$, $S_n < \frac{2}{\pi}$.

А оскільки

$$\frac{\pi}{2n}\left(\cos 0 + \cos\frac{\pi}{2n} + \cos\frac{2\pi}{2n} + \cdots + \cos\frac{(n-1)\pi}{2n}\right) >$$

$$> \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 1,$$

то

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{n} + S_n\right) > 1, \quad S_n > \frac{2}{\pi} - \frac{1}{n}.$$

5. Нехай послідовність $\{a_n\}$ дійсних чисел задовольняє умову: $1 = a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n$.

Довести, що

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt[m]{a_k}} < m.$$

Розв'язання. Легко побачити, що

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt[m]{a_k}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k\sqrt[m]{a_k}}(a_k - a_{k-1}).$$

Поклавши в (6)

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt[m]{x}}, \quad x > 0, \quad a = a_0 = 1, \quad b = a_n,$$

дістанемо:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k\sqrt[m]{a_k}}(a_k - a_{k-1}) < \int_{a_0}^{a_n}\frac{dx}{x\sqrt[m]{x}} = \int_1^{a_n} x^{-1-\frac{1}{m}}\, dx =$$

$$= -m x^{-\frac{1}{m}}\Big|_1^{a_n} = m\left(1 - \frac{1}{\sqrt[m]{a_n}}\right) < m.$$

Звичайно, треба враховувати, що функція $f(x)$ на $[1; a_n]$ невід'ємна, спадна, неперервна.

Зазначимо, що задачу 5 можна розв'язати, не застосовуючи інтеграла. Справді,

$$\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt[m]{a_k}} = \frac{a_k - a_{k-1}}{a_k\sqrt[m]{a_k}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt[m]{a_k} - \sqrt[m]{a_{k-1}}\right)\left(\sqrt[m]{a_k^{m-1}} + \sqrt[m]{a_{k-1}a_k^{m-2}} + \dots + \sqrt[m]{a_{k-1}^{m-1}}\right)}{a_k\sqrt[m]{a_k}} \leqslant$$

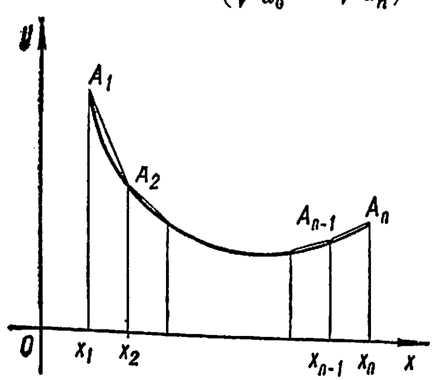
$$\leqslant \frac{\left(\sqrt[m]{a_k} - \sqrt[m]{a_{k-1}}\right) m \sqrt[m]{a_k^{m-1}}}{a_k\sqrt[m]{a_k}} = \frac{\left(\sqrt[m]{a_k} - \sqrt[m]{a_{k-1}}\right) m}{\sqrt[m]{a_k}\sqrt[m]{a_k}} \leqslant$$

$$\leqslant m\frac{\sqrt[m]{a_k}-\sqrt[m]{a_{k-1}}}{\sqrt[m]{a_{k-1}a_k}} = m\left(\frac{1}{\sqrt[m]{a_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt[m]{a_k}}\right);$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt[m]{a_k}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} m\left(\frac{1}{\sqrt[m]{a_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt[m]{a_k}}\right) =$$

$$= m\left(\frac{1}{\sqrt[m]{a_0}} - \frac{1}{\sqrt[m]{a_1}} + \frac{1}{\sqrt[m]{a_1}} - \frac{1}{\sqrt[m]{a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[m]{a_{n-1}}} - \frac{1}{\sqrt[m]{a_n}}\right) =$$

$$= m\left(\frac{1}{\sqrt[m]{a_0}} - \frac{1}{\sqrt[m]{a_n}}\right) = m\left(1 - \frac{1}{\sqrt[m]{a_n}}\right) < m.$$



Мал. 5

Очевидно це розв'язання значно громіздкіше.

У задачах 3—5 ми фактично скористалися наближенням площі криволінійної трапеції за допомогою суми площ прямокутників. Значно краще наближення дістанемо, якщо розглядатимемо суму площ трапецій так, як це показано на мал. 5. Щоб наближення було застосовним до доведення

нерівностей, функція має бути опуклою чи угнутою. (Див.: Ушаков Р. П., Хацет Б. І. Опуклі функції та нерівності.— У кн.: У світі математики. К., Рад. шк., 1974, вип. 5, с. 81—98).

Джерелом багатьох нерівностей може бути так звана нерівність Коші—Буняковського:

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx. \qquad (7)$$

Доведемо її.

Для довільного дійсного α виконується очевидна нерівність

$$\int_a^b (f(x) - \alpha g(x))^2\,dx \geqslant 0,$$

звідси

$$\int_a^b f^2(x)\,dx - 2\alpha\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx + \alpha^2\int_a^b g^2(x)\,dx \geqslant 0.$$

Ліва частина цієї нерівності — квадратний тричлен відносно α. Він набирає невід'ємного значення для довільних α тоді і тільки тоді, коли дискримінант його недодатний. Отже,

$$4\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 - 4\int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx \leqslant 0.$$

Таким чином, нерівність (7) доведено.

6. Довести, що для довільного $c \in R$

$$4\sin^2 c - c\sin 2c \leqslant 2c^2.$$

Розв'язання. Легко бачити, що нерівність достатньо довести для $c \geqslant 0$. Покладемо в (7) $f(x) = 1$, $g(x) = \cos x$, $a = 0$, $b = c$.

Маємо:

$$\left(\int_0^c \cos x\,dx\right)^2 \leqslant \int_0^c 1\cdot dx \cdot \int_0^c \cos^2 x\,dx, \tag{8}$$

$$\int_0^c \cos x\,dx = \sin c,\quad \int_0^c \cos^2 x\,dx = \int_0^c \frac{1}{2}\,(1+\cos 2x)\,dx =$$

$$= \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^c = \frac{c}{2} + \frac{1}{4}\sin 2c.$$

З (8) дістанемо:

$$\sin^2 c \leqslant c\left(\frac{c}{2} + \frac{1}{4}\sin 2c\right),$$

або:

$$4\sin^2 c - c\sin 2c \leqslant 2c^2.$$

Границі

Відомо, що $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ визначається як границя послідовності інтегральних сум $\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x$ при $n\to\infty$ $\left(\Delta x = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}\right)$. При обчисленні границь деяких послідовностей іноді вдається їх загальний член виразити у вигляді інтегральної суми. Тоді границя послідовності дорівнює відповідному інтегралу.

Задачі.

1. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \dots + \sin\frac{\pi(n-1)}{n}\right)$.

Р о з в ' я з а н н я. Розглянемо функцію $y=\sin x$, $x\in[0;\pi]$. Розіб'ємо відрізок $[0;\pi]$ точками $0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{(n-1)\pi}{n}$,

$\frac{n\pi}{n}$ на частини довжиною $\frac{\pi}{n}$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \dots + \sin\frac{\pi(n-1)}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \dots + \sin\frac{\pi(n-1)}{n} + \sin\frac{\pi n}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin x\,dx = \frac{2}{\pi}$.

Будуючи інтегральні суми, довжину відрізка $[x_{k-1}; x_k]$ домножували на значення функції $f(x)$ в точці x_k. Інтегральні суми можна будувати і множенням довжини відрізка $[x_{k-1}; x_k]$ на значення функції в довільній його точці x_i. Очевидно, що інтегральна сума залежить як від характеру розбиття відрізку $[a; b]$, так і від вибору точок x_k. Але границя цих сум, якщо вона існує, одна й та сама. Вона дорівнює $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Цей факт використовується під час розв'язування такої задачі.

2. Знайти:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\cos^2\frac{2\pi}{2n+1} + \cos^2\frac{4\pi}{2n+1} + \dots + \cos^2\frac{2n\pi}{2n+1}\right).$$

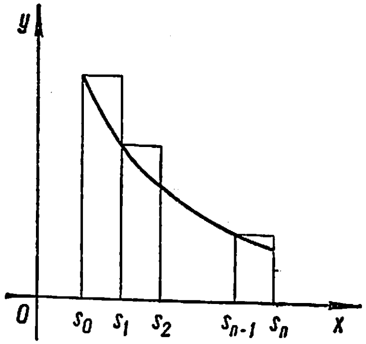
Р о з в ' я з а н н я. Вираз, який стоїть у дужках, є сумою значень функції $y=\cos^2 x$, $x\in[0;\pi]$ у точках $\frac{i2\pi}{2n+1}$, $i=1,\dots,n$. Якщо відрізок $[0;\pi]$ розбити точками $0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{\pi(n-1)}{n}, \pi$ на частини довжини $\frac{\pi}{n}$, то точка $\frac{i2\pi}{2n+1}$ належатиме відрізку $\left[\frac{(i-1)\pi}{n}; \frac{i\pi}{n}\right]$, $i=1,\dots,n$. Справді, $\frac{(i-1)\pi}{n} < \frac{i2\pi}{2n+1} < \frac{i\pi}{n}$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\cos^2\frac{2\pi}{2n+1} + \dots + \cos^2\frac{2n\pi}{2n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \left(\cos^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \dots + \cos^2 \frac{2n\pi}{2n+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 x \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^\pi = \frac{1}{2}.$$



Мал. 6

3. Нехай послідовність $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$, де $a_i > 0$, при $n \to \infty$ прямує до ∞. Довести, що послідовність $S_n = \frac{a_1}{\sqrt{s_0}} + \frac{a_2}{\sqrt{s_1}} + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{s_{n-1}}}$ також прямує до ∞ при $n \to \infty$.

Розв'язання. Відрізок $[s_0; s_n]$ розіб'ємо точками $s_0 = a_0$, $s_1 = a_0 + a_1$, $s_2 = a_0 + a_1 + a_2$, ..., $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ на n частин. Їх довжина, відповідно, дорівнює $s_1 - s_0 = a_1$, $s_2 - s_1 = a_2$, ..., $s_n - s_{n-1} = a_n$. Тоді S_n є сума площ прямокутників з основами $s_i - s_{i-1}$ і висотами $\frac{1}{\sqrt{s_{i-1}}}$, $i = 1, \dots, n$ (мал. 6). Оскільки функція $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ додатна, неперервна й спадна при $x > 0$, то, виходячи з нерівності (6), маємо:

$$S_n > \int_{s_0}^{s_n} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_{s_0}^{s_n} = 2(\sqrt{s_n} - \sqrt{s_0}).$$

Послідовність s_n, а отже, і $2(\sqrt{s_n} - \sqrt{s_0})$ прямує до нескінченності, тому і S_n прямує до нескінченності.

Обчислення сум

Задачі.

1. Знайти суму: $S_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$.

Розв'язання. Якщо розв'язувати цю задачу елементарними методами, доводиться шукати раціональне перегрупування доданків виразу $S_n(x)$. Але неважко помітити, що загальний член nx^{n-1} є похідною від функції x^n. А це підказує простий метод розв'язання. Для функції $S_n(x)$ знаходимо одну із первісних функцій $F(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$. Звідки $F(x) = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1}$, якщо $x \neq 1$.

Тоді $S_n(x) = F'(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$, $x \neq 1$.

Безпосередньо знаходимо, що

$$S_n(1) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Обчислити:

$$S_n(x) = \cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \dots + n\cos nx.$$

Розв'язання. Застосуємо метод, використаний при розв'язуванні попередньої задачі. Первісна функція для $S_n(x)$ має вигляд:

$F(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx$, звідки

$$F(x) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \left(2\sin\frac{x}{2}\sin x + 2\sin\frac{x}{2}\sin 2x + 2\sin\frac{x}{2}\sin 3x + \dots + 2\sin\frac{x}{2}\sin nx \right) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2} + \cos\frac{5x}{2} - \cos\frac{7x}{2} + \dots + \cos\frac{2n-1}{2}x - \cos\frac{2n+1}{2}x \right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x \right), \quad x \neq 2k\pi, \ k \in Z.$$

Отже,

$$S_n(x)=F'(x)=\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\left(\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}+\frac{2n+1}{2}\sin\frac{2n+1}{2}x\right)\sin\frac{x}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x\right)\right)=\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}\Big((2n+$$

$$+1)\sin\frac{2n+1}{2}x\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{2n-1}{2}x\cos\frac{x}{2}-1\Big)=$$

$$=\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}\left(\cos nx+2n\sin\frac{2n-1}{2}x\sin\frac{x}{2}-1\right)=$$

$$=\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}(\cos nx+n(\cos nx-\cos(n+1)x)-1)=$$

$$=\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}((n+1)\cos nx-n\cos(n+1)x-1)\quad(x\neq 2k\pi,\ k\in Z).$$

Якщо $x=2k\pi$, $k\in Z$, то $S_n(x)=1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Тотожності й рівняння

Під час розв'язування двох попередніх задач було доцільно знайти первісну функцію, перетворити її, а потім диференціюванням повернутися до даної функції. Іноді корисно спочатку розглянути похідну, спростити її, а потім, знайшовши первісну, дістати розв'язок задачі.

Задачі.

1. Довести тотожність:

$$2(\sin^6x+\cos^6x)-3(\sin^4x+\cos^4x)+1=0.$$

Розв'язання. Розглянемо функцію:

$$F(x)=2(\sin^6x+\cos^6x)-3(\sin^4x+\cos^4x)+1.$$

Її похідна:

$$f(x)=F'(x)=2(6\sin^5x\cos x-6\cos^5x\sin x)-$$

$$-3(4\sin^3x\cos x-4\cos^3x\sin x)=12\sin x\cos x(\sin^4x-$$

$$-\cos^4x-\sin^2x+\cos^2x)=12\sin x\cos x(\sin^2x-$$

$$-\cos^2x)(\cos^2x+\sin^2x-1)=0.$$

Таким чином, $f(x)=0$. Але тоді $F(x)$ дорівнює деякій сталій c. Знайдемо її: $c=F(0)=0$. Тотожність доведено.

2. Знайти всі значення a, при яких многочлен $f(x)=10ax^4-4ax^3+a^2x^2+6x-2$ має принаймні один корінь у проміжку $[0;1]$.

Розв'язання. Припустимо, що на $[0;1]$ многочлен $f(x)$ не має жодного кореня. Враховуючи, що $f(0)=-2$ і функція $f(x)$ неперервна при довільних x, дістанемо: $f(x)<0$ при $x\in[0;1]$. Цей факт випливає з такої властивості функцій:

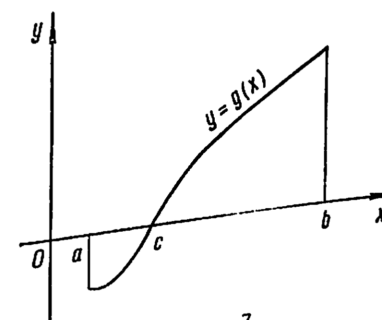
Якщо функція $g(x)$ визначена й неперервна на проміжку $[a;b]$, набуває на його кінцях значень різних знаків, то між a і b існує точка c, у якій $g(c)=0$.

Не подаючи доведення цього твердження, зауважимо, що воно має просту геометричну інтерпретацію: графік неперервної функції (суцільна лінія), одна з точок якого лежить нижче від осі абсцис, а друга — вище, обов'язково перетинає цю вісь (мал. 7).

Отже, з того, що $f(x)<0$ при $x\in[0;1]$, випливає:

$$\int_0^1 f(x)\,dx<0.$$

Водночас $\int_0^1(10ax^4-4ax^3+a^2x^2+6x-2)\,dx=\frac{a^2}{3}+a+1$ — додатне число при довільних $a\in R$.



Мал. 7

8 4-996

Суперечність, яку дістали, доводить, що при довільних $a \in R$ даний многочлен має принаймні один корінь на проміжку [0; 1].

Зауваження. Безпосереднє застосування згаданої властивості неперервних функцій не дає повного розв'язку задачі. Справді, $f(0) < 0$, $f(1) = a^2 + 6a + 4$, але останній тричлен додатний не при всіх значеннях a.

Вправи.

1. Довести, що для довільних $x > 0$ $\sin x < x$,

$$1 - \cos x < \frac{x^2}{2}, \quad x - \sin x < \frac{x^3}{3!}.$$

2. Довести, що $\ln \frac{b}{a} < \frac{b^2 - a^2}{2ab}$ при $0 < a < b$.

3. Довести, що для довільних натуральних n

$$1 - \frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < 1.$$

4. Нехай послідовність $\{a_n\}$ задовольняє умову $1 = a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_n$. Довести, що $\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{a_k^m} < \frac{1}{m}$.

5. Нехай послідовність $\{a_n\}$ задовольняє умову $0 = a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_n$. Довести, що $\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) e^{-a_k} \leqslant 1$.

6. Довести, що для всіх $a \in]0; \infty[$

$$a(a^2 - 12)\sin 2a + 6(a^2 - 1)\cos 2a \leqslant 2(a^4 - 3a^2 - 3).$$

7. Обчислити:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{1 - \frac{1}{n}}\right).$$

8. Обчислити:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(\sqrt{n^2 - 1} + \sqrt{n^2 - 2^2} + \dots + \sqrt{n^2 + (n-1)^2}\right).$$

9. Обчислити:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\cos\frac{\pi}{2n} + \cos^2\frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos\frac{\pi(n-1)}{2n}\right).$$

10. Обчислити:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{2}}\right).$$

11. Обчислити:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\sin\frac{\pi}{2(2n+1)} + \sin\frac{3\pi}{2(2n+1)} + \dots + \sin\frac{(2n-1)\pi}{2(2n+1)}\right).$$

12. Нехай послідовність $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$, де $a_i > 0$ при $n \to \infty$ прямує до ∞. Довести, що послідовність $S_n = \frac{a_1}{s_0} + \frac{a_2}{s_1} + \dots + \frac{a_n}{s_{n-1}}$ також прямує до ∞ при $n \to \infty$.

13. Довести тотожність:

$$\sin 3x \cos^3 x + \cos 3x \sin^3 x = \frac{3}{4}\sin 4x.$$

14. Обчислити:

$$\sin x + 2\sin 2x + \dots + n \sin nx.$$

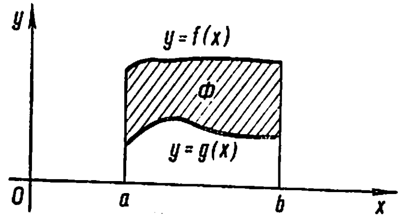
15. Довести, що при $a \in]-\infty; -1] \cup [0; \infty[$ многочлен $f(x) = 10ax^4 - 4ax^3 + 3a^2x^3 + 4x - 2$ має хоча б один корінь в інтервалі [0; 1].

В. К. ГРИГОРЕНКО, С. С. ЛЕВІЩЕНКО

ЗАСТОСУВАННЯ ОБЕРНЕНИХ ФУНКЦІЙ ДО ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Основні теоретичні відомості

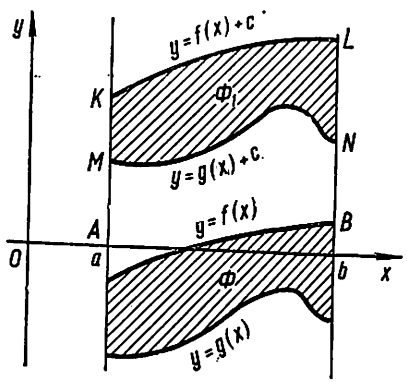
Як відомо з шкільного курсу алгебри і початків аналізу, *криволінійною трапецією* називають фігуру, обмежену графіком функції $f(x)$, заданої й неперервної на відрізку $[a; b]$ і такої, що не змінює на ньому знака, відрізком $[a; b]$ осі абсцис і прямими $x = a$, $x = b$.



Мал. 1

Можна довести, що площа S криволінійної трапеції для будь-якої (не обов'язково невід'ємної функції $f(x)$) виражається формулою

$$S=\int_a^b f(x)\,dx, \qquad (1)$$



Мал. 2

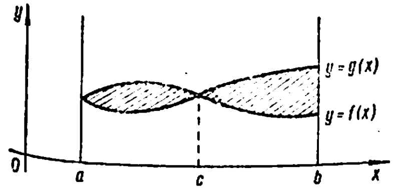
причому якщо $f(x)<0$, то обчислення площі даної фігури замінюється обчисленням площі фігури, якій дорівнює й обмежена віссю абсцис, прямими $x=a$, $x=b$ та графіком функції $y=-f(x)$. До застосування формули (1) зводиться обчислення площі і в тому випадку, коли задана фігура лежить між прямими $x=a$, $x=b$ та між графіками функцій $f(x)$ і $g(x)$, таких, що при будь-якому $x\in[a;\, b]$ виконується нерівність $f(x)\geqslant g(x)$. У цьому випадку маємо:

$$S=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx=\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx. \qquad (2)$$

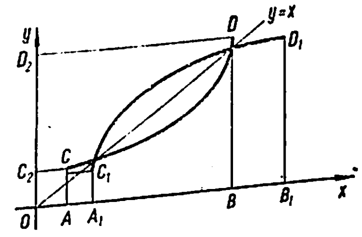
Справді, якщо криволінійна трапеція має такий вигляд, як на мал. 1, то формула (2) очевидна.

Доведемо тепер формулу(2) для випадку, коли криволінійна трапеція має такий вигляд, як на мал. 2.

Візьмемо таке число $c>0$, що для будь-якого $x\in[a;\, b]$ виконується нерівність $g(x)+c\geqslant 0$ (існування такого числа



Мал. 3



Мал. 4

c випливає з обмеженості неперервної функції $g(x)$) , і замість площі фігури Φ обчислимо площу фігури Φ_1, яку дістаємо з Φ паралельним перенесенням $(0;\, c)$. Оскільки площа Φ_1 дорівнює різниці площ криволінійних трапецій $AKLB$ і $AMNB$, то й шукана площа дорівнює

$$S=\int_a^b (f(x)+c)\,dx-\int_a^b (g(x\;+c)\,dx=\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx.$$

Якщо ж, нарешті, криволінійна трапеція має такий вигляд, як на мал. 3, то

$$S=\int_a^c (f(x)-g(x))\,dx+\int_c^b (g(x)-f(x))\,dx. \qquad (3)$$

Зауважимо, що методами, які вивчаються в курсі математики середньої школи, не завжди можна знайти первісну функцію для функції $f(x)$, проте досить часто в таких випадках первісну легко знайти для функції, оберненої до $f(x)$. Доведемо відповідну теорему.

Теорема. ***Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a;\, b]$ задовольняє такі умови: 1) неперервна; 2) монотонно зростає; 3) набуває додатних значень, то***

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,dx=bf(b)-af(a), \qquad (4)$$

де $g(x)$ — функція, обернена до функції $f(x)$.

Доведення. Нехай спочатку $a \geqslant 0$. Число, яке стоїть зліва у формулі (4), дорівнює сумі площ трапецій $ACDB$ і $A_1C_1D_1B_1$ (мал. 4), або, що те саме, сумі площ трапецій $ACDB$ і C_2CDD_2. Але дві останні трапеції утворюють прямокутник $OBDD_2$ без прямокутника $OACC_2$ і тому сума площ їх дорівнює різниці площ цих прямокутників, тобто $bf(b) - af(a)$.

Нехай тепер $a < 0$. Розглянемо функцію $h(x) = f(x + 2a)$, визначену на відрізку $[-a; b - 2a]$. Ця функція монотонно зростає і набуває додатних значень, а оберненою до неї є функція $k(x) = g(x) - 2a$. Справді,

$$h(k(x)) = f(k(x) + 2a) = f(g(x)) = x.$$

За доведеним вище,

$$\int_{-a}^{b-2a} h(x)\,dx + \int_{h(-a)}^{h(b-2a)} k(x)\,dx = (b - 2a)h(b - 2a) +$$

$$+ a \cdot h(-a) = (b - 2a) \cdot f(b) + af(a). \tag{5}$$

Зробивши в першому інтегралі лівої частини формули (5) заміну $t = x + 2a$, дістанемо:

$$\int_{-a}^{b-2a} h(x)\,dx = \int_{-a}^{b-2a} f(x + 2a)\,dx = \int_{a}^{b} f(t)\,dt. \tag{6}$$

Очевидно також, що

$$\int_{h(-a)}^{h(b-2a)} k(x)\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} (g(x) - 2a)\,dx =$$

$$= \int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,dx - 2a(f(b) - f(a)). \tag{7}$$

З рівностей (5) — (7) маємо:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,dx - 2a(f(b) - f(a)) =$$

$$= (b - 2a\, f(b) + af(a),$$

звідки випливає рівність (4), яку потрібно було довести.

Перепишемо формулу (4) у такому вигляді:

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,dx = bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)\,dx, \tag{8}$$

або

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)\,dx = xf(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\,dx, \tag{9}$$

де межі a і b знаходимо відповідно з рівнянь $f(x) = f(a)$ і $f(x) = f(b)$.

Приклади.

1. Обчислити

$$\int_0^1 \ln(x + \sqrt{1 + x^2})\,dx.$$

Розв'язання. Похідна підінтегральної функції

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

дорівнює, як неважко переконатися, $\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$. Отже, функція $f(x)$ — зростаюча і тому має обернену функцію, яку в явному вигляді можна дістати з рівняння

$$x = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}) \tag{10}$$

зі змінною y і параметром x. Розв'язуючи це рівняння, послідовно будемо мати

$$e^x - y = \sqrt{1+y^2},$$
$$e^{2x} - 2e^x y = 1, \; e^x - y \geqslant 0,$$

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \text{ оскільки } \frac{e^x - e^{-x}}{2} < e^x.$$

Крім того, функція $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ неперервна на $[0; 1]$, монотонно зростає і набуває додатних значень. Отже, для обчислення цього інтеграла можна скористатися формулою (9). Маємо:

$$\int_0^1 \ln(x + \sqrt{1+x^2})\,dx = x\frac{e^x - e^{-x}}{2}\Bigg|_0^{\ln(1+\sqrt{2})} -$$

$$- \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,dx = \ln(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\Bigg|_0^{\ln(1+\sqrt{2})} =$$

$$= \ln(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{2}\left(e^{\ln(1+\sqrt{2})} + e^{\ln\frac{1}{1+\sqrt{2}}}\right) + 1 =$$

$$= \ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1.$$

Зауважимо, що можна не обчислювати похідну підінтегральної функції і не доводити існування оберненої до неї функції, оскільки з рівняння (10) випливає: при кожному значенні параметра відповідне значення змінної визначається однозначно, тобто обернена функція існує.

2. Обчислити

$$\int_1^e \ln x\,dx.$$

Р о з в'я з а н н я. Функція $f(x) = \ln(x)$ — зростаюча і має обернену функцію e^x. Крім того, функція $f(x) = \ln x$ неперервна на $[1; e]$, набуває на $[1; e]$ додатних значень. Отже,

$$\int_1^e \ln x\,dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - e^x\Big|_0^1 = e - e + 1 = 1.$$

3. Обчислити

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x\,dx.$$

Р о з в'я з а н н я. Функція $f(x) = \arcsin x$ — неперервна, монотонна, зростаюча і має обернену функцію $f^{-1}(x) = \sin x$. Отже,

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x\,dx = x \cdot \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + 1 =$$

$$= \frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{2} + 1\right).$$

4. Обчислити

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx.$$

Р о з в'я з а н н я. Функція $f(x) = \operatorname{arctg} x$ — неперервна на $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, монотонно зростає і має обернену функцію $f^{-1}(x) = \operatorname{tg} x$. Отже,

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x = x \cdot \operatorname{tg} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \, dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \frac{\pi}{4} + \ln \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

5. Обчислити

$$\int_0^1 \ln(1 + \sqrt{1+x}) \, dx.$$

Розв'язання. Функція $f(x) = \ln(1 + \sqrt{1+x})$ монотонно зростає, неперервна, набуває додатних значень на відрізку $[0, 1]$ і має обернену функцію $f^{-1}(x) = e^{2x} - 2e^x$. Отже,

$$\int_0^1 \ln(1 + \sqrt{1+x}) \, dx = x(e^{2x} - 2e^x) \Big|_{\ln 2}^{\ln(1+\sqrt{2})} - \int_{\ln 2}^{\ln(1+\sqrt{2})} (e^{2x} - 2e^x) \, dx = \ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} - \frac{3}{2}.$$

6. Обчислити

$$\int_0^2 \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2} dx.$$

Розв'язання. Підінтегральна функція $f^{-1}(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}$ — неперервна на відрізку $[0; 2]$, монотонно

зростає, набуває додатних значень і має обернену функцію $f(x) = x - \frac{1}{x}$. Отже, за формулою (9)

$$\int_0^2 \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2} dx = x \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right) \Big|_1^{1+\sqrt{2}} - \int_1^{1+\sqrt{2}} \left(x - \frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= 2(1 + \sqrt{2}) - \left(\frac{x^2}{2} - \ln x\right) \Big|_1^{1+\sqrt{2}} = 2(1 + \sqrt{2}) -$$

$$- \left(\frac{1 + 2\sqrt{2} + 2}{2} - \frac{1}{2} - \ln(1 + \sqrt{2})\right) = 1 + \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}).$$

Вправи.

Обчислити:

1. $\int_8^{27} \ln(\sqrt[3]{x} - 1) \, dx.$
2. $\int_1^3 \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx.$
3. $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \arcsin \sqrt{x} \, dx.$
4. $\int_1^{10} \lg \frac{x}{10} dx.$
5. $\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} \arcsin \frac{1}{x} dx.$
6. $\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{1 + \sqrt{1 - 4y^2}}{2y} dy.$

М. В. КАРТАШОВ, П. К. ХОБЗЕЙ

XXXIX КИЇВСЬКА МІСЬКА ОЛІМПІАДА ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ

Міська математична олімпіада 1984 року була присвячена 150-річчю Київського державного університету імені Т. Г. Шевченка. І це не випадково: адже з перших років олімпіада проводиться силами викладачів та студентів університету, а її переможці щороку поповнюють студентські лави факультетів КДУ. Серед них немало провідних вчених, професорів та викладачів університету.

Пропонуємо всім, хто любить розв'язувати цікаві математичні задачі, випробувати свої сили.

VI клас

1. На дошці записано числа 19 і 18. Дозволяється дописувати до вже отриманих на дошці чисел суму будь-яких двох з них. Довести, що таким чином можна на деякому кроці дістати число 1984.

2. Чи може квадрат натурального числа закінчуватися на 66?

3. Дано п'ять точок на координатній площині: $(-1/2; 9)$, $(0; 2)$, $(2; 1/2)$, $(3; 1)$, $(4; 4/5)$. Яка найбільша кількість точок даної сукупності належить графіку однієї й тієї самої функції виду $y = 1/(ax + b)$?

4. Маємо 4 предмети і терези з двома шальками без важків. Як за допомогою 5 зважувань розмістити предмети в порядку зростання маси?

VII клас

1. Визначити останню цифру числа 777^{777}.

2. Кожна діагональ чотирикутника ділить його на трикутники однакової площі. Довести, що цей чотирикутник — паралелограм.

3. Числа x, y задовольняють нерівності $xy \geqslant 2$. Довести, що

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 \geqslant 8.$$

4. На продовженні найбільшої сторони AC в трикутнику ABC відклали відрізок CM, такий, що $CM = BC$. Довести, що кут ABM — тупий або прямий.

5. Натуральні числа 1,2,..., 100 розбито на дві групи. Довести, що хоча б в одній з цих груп знайдуться три числа, одне з яких є середнім арифметичним двох інших.

VIII клас

1. Див. задачу 1 для VI класу.

2. Усередині опуклого чотирикутника $ABCD$ лежить точка M. Відобразимо її симетрично відносно середин сторін чотирикутника і сполучимо отримані точки так, щоб вони утворювали опуклий чотирикутник. Довести, що площа цього чотирикутника не залежить від вибору точки M.

3. Див. задачу 3 для VII класу.

4. Побудувати прямокутний трикутник за довжинами m_a, m_b відрізків медіан, опущених на його катети.

5. Довести, що не існує простих чисел A, B, C, таких, що

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = A \cdot B \cdot C \cdot D + 4.$$

IX клас

1. Дано 125 різних натуральних чисел, що не перевищують 1984. Довести, що серед їх попарних різниць знайдуться принаймні 5 однакових.

2. Многокутник P, вирізаний з паперу, перегинають по деякій прямій і обидві половини склеюють. Чи може периметр отриманого при склеюванні многокутника Q бути більшим за периметр многокутника P?

3. Відомо, що в десятковому запису числа 1/99..92 (в знаменнику 1984 цифри) зустрічається 20 шісток, записаних одна за одною. Довести, що така ж послідовність шісток знайдеться і в десятковому запису числа 1/1249..9 (1984 цифри в знаменнику).

4. На дошці записано в деякому порядку всі можливі попарні суми $S_1, S_2, \ldots, S_m$ чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $n > 2$. Чи можна множину $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ однозначно відновити за множиною $\{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$?

5. За допомогою лінійки довжиною 20 см та циркуля з максимальним розхилом 10 см сполучити відрізком дані дві точки, що лежать на відстані 1 м.

X клас

1. Обчислити різницю $\sin 54° - \sin 18°$ з точністю до 20 знаків.

2. Дано додатну монотонну послідовність $\{b_n\}$. Довести, що

$$\lim_{n\to\infty} (b_{n+1} - b_n)/(1 + b_n) \cdot (1 + b_{n+1}) = 0.$$

3. Усередині опуклого 397-кутника M дано 398 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Ці точки та вершини сполучають відрізками так, що жодні два з цих відрізків не перетинаються (але, можливо, мають спільні кінці), доти, поки це можливо. Чи можна в результаті отримати 1984 відрізки? 1985 відрізків?

4. Див. задачу 3 для IX класу.

5. Вершини правильного шестикутника $A_1, A_2, \ldots, A_6$ лежать відповідно на сторонах B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, B_4B_5, B_5B_6, B_6B_1 опуклого шестикутника $B_1B_2 \ldots B_6$.

Довести, що

$$S_{B_1B_2 \ldots B_6} \leqslant \frac{3}{2} S_{A_1A_2 \ldots A_6}.$$

Розв'язання

VI клас

1. Нехай m, n — довільні натуральні числа. Записавши суму чисел 18, 19, дістанемо $18 + 19 = 37$. Послідовно $n - 1$ раз додаючи до отриманого на попередньому кроці числа число 18, запишемо на дошці послідовність $18 + 19$, $18 + 19 + 18$, $18 + 19 + 18 + 18$, ..., $+ 18 + 19 + 18\,(n - 1) = 19 + 18n$. Проробивши таку саму процедуру $m - 1$ раз з числом 19, дістанемо $19m + 18n$. Отже, щоб довести потрібне твердження, досить знайти натуральні m, n, такі, що $19m + 18n = 1984$. Нехай $k = m - n$, тоді $m = k + n$ і $19k + 37n = 1984$, тобто

$$k = \frac{1984 - 37n}{19} = 104 - 2n + \frac{8 + n}{19}.$$

Звідси випливає, що $n + 8$ має ділитися на 19. Візьмемо, наприклад, $n = 11$. Тоді $k = 104 - 22 + 1 = 83$, $m = 94$ і $18 \times 11 + 19 \times 94 = 1984$. Отже, на деякому кроці (а саме, на $m + n - 1 = 104$-му) ми отримаємо число 1984.

2. Не може. Число, яке закінчується на 66, ділиться на 2 і не ділиться на 4.

3. Очевидно, що точка з координатами (x, y) належить графіку функції $y = 1/(ax + b)$ тоді і тільки тоді, коли точка $(x, 1/y)$ лежить на прямій $y = ax + b$. Тому для розв'язання задачі досить знайти найбільшу кількість точок, що належать сукупності $A_1 = (-1/2; 1/8)$, $A_2 = (0; 1/2)$, $A_3 = (2; 2)$, $A_4 = (3; 1)$; $A_5 = (4; 5/4)$ і лежать на одній прямій. Побудувавши ці точки на координатній площині, неважко переконатись, що точки A_1, A_4, A_5 лежать на одній прямій $y = 1/4 + x/4$, а A_2 A_3 не лежать на ній. Залишається зауважити, що жодні чотири точки з даної сукупності не лежать на одній прямій (адже у цьому випадку вона мала б збігатися з прямою $y = 1/4 + x/4$). Отже, тільки три точки з наведеної в умові сукупності належать одному графіку функції $y = 1/(ax + b)$, а жодні чотири такої властивості не мають. Шукана найбільша кількість точок рівнює 3.

4. За допомогою трьох зважувань розмістимо за величиною маси три перших предмети (зважуючи кожну пару), потім покладемо на одну шальку терезів останній (четвертий) предмет, а на другу — той з трьох перших, який має середню масу. П'ятим зважуванням порівняємо масу четвертого предмета або з найважчим, або з найлегшим з трьох.

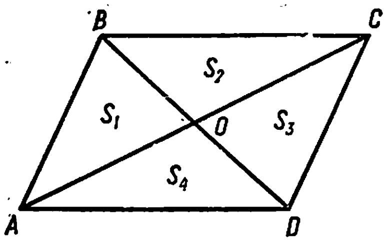
VII клас

1. Якщо підносити число 7 послідовно до степеня 1, 2, 3, ..., то можна помітити, що остання цифра результату повторюється з періодом 4. Оскільки $777 = 194 \times 4 + 1$, то остання цифра даного числа збігається з останньою цифрою числа $7^1 = 7$, тобто дорівнює 7.

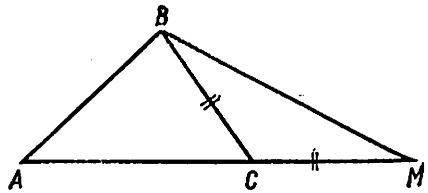
2. З умови задачі випливає, що справджуються такі рівності (мал. 1):

$$S_1 + S_2 = S_4 + S_3,$$
$$S_1 + S_4 = S_2 + S_3,$$

звідки $S_1 = S_3$, $S_2 = S_4$, це S_i — площа відповідного трикутника.



Мал. 1



Мал. 2

Зауважимо, що

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{AO}{OC} \text{ і } \frac{S_3}{S_4}=\frac{OC}{AO}.$$

Крім того, відповідні висоти трикутників BOC, COD і AOB, AOD рівні, тобто їх площі відносяться, як довжини основ. Як показано вище, $S_1 = S_3$ і $S_2 = S_4$. Тому

$$\frac{AO}{OC}=\frac{OC}{AO}, \text{ тобто } AO=OC.$$

Аналогічно показуємо, що $BO = OD$. Отже, діагоналі чотирикутника діляться точкою перетину пополам, а це означає, що $ABCD$ — паралелограм.

3. Зауважимо, що

$$(x-2)^2+(y+2)^2=x^2-2x+y^2+2y+8=x^2-2xy+y^2-$$
$$-2(y-x)+2xy+8=(y-x)^2+2(y-x)+4+2xy+4=(y-$$
$$-x+2)^2+2xy+8\geqslant 2xy+4\geqslant 2\cdot 2+4=8,$$

оскільки $xy \geqslant 2$ за умовою, а квадрат довільного числа невід'ємний.

Порівнявши праву і ліву частини записаної вище нерівності, дістанемо шукану нерівність.

4. Кут ABC лежить проти найбільшої сторони (мал. 2), тому $\angle ABC \geqslant \angle A$. З трикутника ABM маємо:

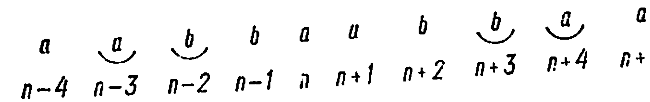
$$\angle A+\angle ABC+\angle CBM+\angle M=180°.$$

Трикутник CBM — рівнобедрений, отже, $\angle M=\angle CBM$, звідки

$$180° \leqslant \angle ABC+\angle ABC+\angle CBM+\angle CBM=2\,(\angle ABC+\angle CBM)=$$
$$=2\angle ABM,$$

тобто $\angle ABM \geqslant 90°$.

5. Проведемо доведення від супротивного. Припустимо, що задані умовою групи існують. В одній з них знайдуться два сусідніх числа, тобто числа, які відрізняються між собою на одиницю, бо чергуватися числа з різних груп не можуть. Позначатимемо першу групу через A, а другу — через B. Нехай вибрані сусідні числа n і $n+1$ належать групі A (мал. 3). Тоді числа $n-1$ і $n+2$ належать групі



Мал. 3

B. Розглядаючи пару $n-1$ і $n+2$ з B, робимо висновок, що $n-4$ і $n+5$ належать групі A. Тоді $n-2$ і $n+3$ належать групі B, бо існування трійок $n-4$, $n-2$, n і $n+1$, $n+3$, $n+5$ суперечило б умові задачі. Зрозуміло, що три підряд числа з однієї групи стояти не можуть, тому $n-3$ і $n+4$ належать A. Отже, існування трійки $n-3$, $n+1$, $n+5$ суперечить умові задачі. Що й треба було довести.

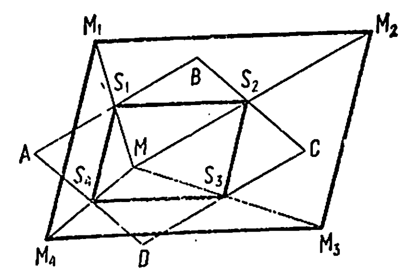
VIII клас

1. Позначимо через S_1, S_2, S_3, S_4 середини сторін чотирикутника $ABCD$ (мал.4). Покажемо, що площа чотирикутника $M_1M_2M_3M_4$ дорівнює чотирьом площам чотирикутника $S_1S_2S_3S_4$ і тому не залежить від вибору точки M. Справді, трикутники MM_1M_2 і MS_1S_2 подібні, бо за теоремою Фалеса $M_1M_2 \parallel S_1S_2$. Коефіцієнт подібності дорівнює 2. Отже,

$4S_{\Delta S_1MS_2}=S_{\Delta M_1MM_2}$. Аналогічно $4S_{\Delta S_2MS_3}=S_{\Delta M_2MM_3}$, $4S_{\Delta S_3MS_4}=$ $=S_{\Delta M_3MM_4}$, $4S_{\Delta S_4MS_1}=S_{\Delta M_4MM_1}$,

звідки $4S_{S_1S_2S_3S_4}=S_{M_1M_2M_3M_4}$

Що й треба було довести.



Мал. 4

4. Продовживши медіани m_a та m_b на відрізки, що дорівнюють, відповідно, їх довжинам, побудуємо два паралелограми. Позначимо гіпотенузу прямокутного трикутника через c. Запишемо співвідношення між

сторонами і діагоналями в паралелограмі та теорему Піфагора:

$$\begin{cases} a^2 + 4m_a^2 = 2(b^2 + c^2), \\ b^2 + 4m_b^2 = 2(a^2 + c^2), \\ a^2 + b^2 = c^2. \end{cases}$$

Звідси визначимо a і b через m_a і m_b:

$$a \cdot \sqrt{15} = \sqrt{16m_b^2 - 4m_a^2} \text{ і } b \cdot \sqrt{15} = \sqrt{16m_a^2 - 4m_b^2}.$$

Легко побудувати відрізок завдовжки $\sqrt{16m_b^2 - 4m_a^2}$. Це катет прямокутного трикутника з гіпотенузою $4m_b$, і другим катетом є $2m_a$. Аналогічно будуємо відрізок завдовжки $\sqrt{15} = \sqrt{4^2 - 1^2}$.

Зовсім просто поділити відрізок довжиною $\sqrt{16m_b^2 - 4m_a^2}$ на $\sqrt{15}$. Аналогічно знаходимо b, а шуканий трикутник будуємо за катетами a, b.

5. Розглянемо рівність

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = A \cdot B \cdot C \cdot D + 4.$$

Зауважимо, що єдине парне просте число — це 2. Усі числа A, B, C, D непарними бути не можуть, бо права частина записаної рівності була б непарною, а ліва — парна. Нехай $A = 2$. Тоді маємо: $B^2 + C^2 + D^2 = 2B \cdot C \cdot D$. Знову одне з чисел B, C і D дорівнює 2, бо праворуч парне число. Нехай $B = 2$. Отримаємо $C^2 + D^2 = 4(CD - 1)$. C і D однієї парності, а непарними не можуть бути, оскільки при діленні на 4 квадрат непарного числа дає в остачі 1, а тому $C^2 + D^2$ не буде ділитися на 4. Отже, $C = D = 2$, але й тоді рівність не виконується $(4 \cdot 2^3 \neq 2^4 + 4)$. Тому задані умовою прості числа A, B, C, D не існують.

СТОРІНКИ ПОЕЗІЇ

... Математика — один з містків, що об'єднують гуманітарне і природничо-наукове мислення.

М. М. Моисеев

П. ШУБИН
ПОЛМИГА

Нет,
Не до седин,
Не до славы
Я век свой хотел бы продлить,—
Мне б только
До той вон канавы
Полмига,
Полшага прожить;
Прижаться к земле
И в лазури
Июльского ясного дня
Увидеть оскал амбразуры
И острые вспышки огня.
Мне б только
Вот эту гранату,
Злорадно поставив на взвод...
Всадить ее,
Врезать, как надо,
В четырежды проклятый дзот.
Чтобы стало в нем пусто и тихо,
Чтоб пылью осел он в траву!
... Прожить бы мне эти полмига,
А там я всю жизнь проживу!

1943 г.

Неделя, 23—29 апр. 1984 г., с. 20.

П. Антокольский

Баллада растущих чисел

Кто мы? Сколько нас?
Может быть, десять,
Может, меньше еще десяти.
Оккупанты хотят нас повесить,
Пусть попробуют раньше найти.

Мчимся в рейде мы кавалерийском
По тылам, по немецким следам,
Подружившись с тревогой и риском,
Из-под пепла встаем тут и там.

И вползаем по глинистым кручам
Прямо к передовым их постам,
Поджигаем составы с горючим,
Эшелоны взрываем к чертям.

Кто мы? Сколько нас?
Может быть, двадцать,
Может, сотня, а может, пятьсот.
Не сдаваться, друзья, не сдаваться,
Не спускаться с дозорных высот!

От Мазурских болот до Марселя,
От Афин до норвежского льда
Не сгибается наше веселье,
Улыбается наша беда.

Где в пролетах мостов, как чернила,
Блещет рек европейских вода,
Ночь листовку о нас сочинила,
И листовка берет города!

Кто мы? Сколько нас?
Может быть, к тыщам
Наших сверстников нить повела.
Может, всюду своих мы отыщем
И узнаем, что их — без числа.

Там, в сырых казематах гестапо,
Лестью, плетью — ничем не помочь.
Там не выдадут нашего штаба,
Сколько в ступе воды не толочь.

Зря старается шут переводчик:
«Кто послал вас сюда? Чья вы дочь?»
Много наших сыночков и дочек,
Сжавши зубы, молчат в эту ночь.

Кто мы? Сколько нас?
Мы не считали
Волн морских и крупинок песка.
О, какие холодные дали,
О, какая в них грусть и тоска!

Сколько муки еще, сколько крови
На сожженной прольется земле.
Только пристальней, тверже, суровей
Присмотрись к этой огненной мгле.

Присмотрись к очертаньям пожарищ,
К человечьим останкам в золе.
Человечество с нами, товарищ,
С нами правда и труд на земле!

Кто мы? Сколько нас?..

Избранное: В 2-х т. М., 1966, с. 583

Б. Олійник

ЖИВИМ — ОД ПОЛЕГЛИХ...

Смертію смерть здолавши,
Ми говорити хочем:
— Ви не
не забули
наші,
Спалені порохом
ночі?

Ви,
що родились в мирі,
Після останніх залпів?
Наші шинелі сірі
Сушаться десь на Альпах.

В наших сірих пілотках
Носять сини каштани,
Наші цупкі обмотки
Вточені в меридіани.

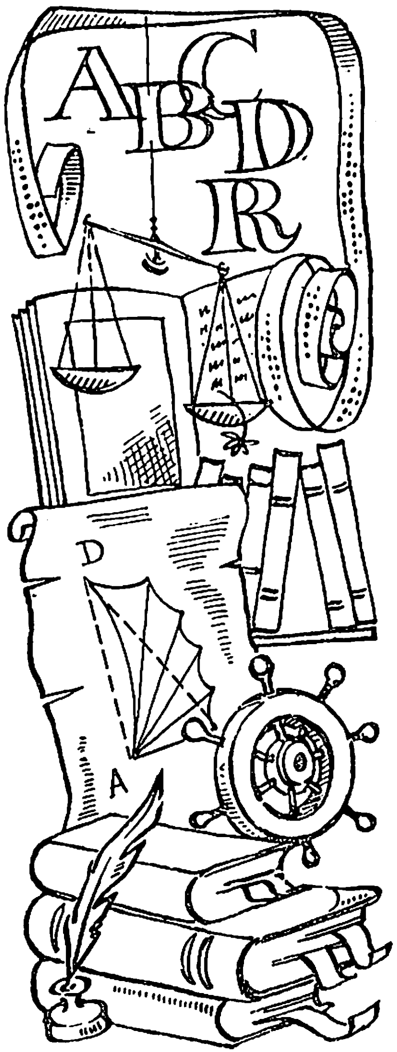
Нас не діждались сині,
Нас не діждались карі...
В ночі терпкі осінні
Ми залітаєм з марень

Листом із осокорів
В думи дівчат красивих...
Тільки чому ж так скоро
Стали ви зовсім сивими?

А—а, ми й забули.
Стійте,
Як же це ми забули,
Що не дійшли до стрічі
Рівно на відстань дула!

Не доповзли на ліктях...
Трохи...
Останні...
дюйми...
Ви ж не забудьте тільки:
Рівно на відстань дула.

Істина. К., 1976, с. 161—162



КНИЖКИ ЮНИМ МАТЕМАТИКАМ

НОВИНКИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

У наш час за книжку ніби й нема потреби агітувати. Але не завадить нагадати, що «це найбільше чудо усіх чудес» (М. Горький), перш ніж відкрити свої таємниці й принади, потребує не тільки любові, поваги й захоплення, а й наполегливої праці. В одному старовинному рукопису збереглися слова невідомого мудреця: «Как быстрокрылая птица не может сразу высоко взлететь, так и острый разум человека, не познав книги, не может подняться до совершенного мышления». Багато й інших чудових слів сказано про книжку. Їх зосереджено у виданнях, які по праву можна назвати гімнами книжці: Вечные спутники. Советские писатели о книгах, чтении, библиофильстве. М., Книга, 1983. 222 с.; Корабли мысли. Зарубежные писатели о книге, чтении, библиофилах. М., Книга, 1980. 334 с.; Листая вечные страницы. Писатели мира о книге, чтении и библиофильстве. М., Книга, 1983. 27 с.; Очарованные книгой. Русские писатели о книгах, чтении, библиофилах. М., Книга, 1982. 287 с.; Человек читающий. *Homo Legens.* Писатели XX в. о роли книги в жизни человека и общества. М., Прогресс, 1983. 454 с.

Про те, як працювати з книжкою, радимо прочитати в посібнику: Гецов Г. Работа с книгой: рациональные приемы. 2-е изд., доп. М., Книга, 1984. 120 с. В пропонованому огляді вміщено інформацію про книжки, які вийшли в світ до 1 червня 1984 року. Про математичну літературу попередніх років -видань можна довідатися з бібліографічних оглядів, опублікованих в випусках 1—15 нашого збірника.

Про книжки, які щойно виходять з друку, радимо довідуватися з бібліографічних оглядів газет «Книжное обозрение», «Друг читача» та журналів «Математика в школе» і «Квант».

Про книжки найближчого майбутнього читайте в тематичних планах видавництв «Радянська школа», «Вища школа», «Наука», «Мир», «Просвещение», «Молодая гвардия», «Молодь», «Детская литература», «Веселка». Літературу, яка вас зацікавить, замовляйте в відділах «Книга—поштою» облкниготоргів, облспоживспілок або через спеціалізований магазин «Книга — поштою». Його адреса: 252117, Київ-117, вул. Попудренка, 26.

Юним бібліофілам бажаємо ні з чим не зрівнянної радості відкриття чуда на ім'я *КНИГА*.

ЦІКАВА МАТЕМАТИКА

Александрова Э., Левшин В. Стол находок утерянных чисел: Матем. детектив. М., Дет. лит., 1983. 63 с.

Барр С. Россыпи головоломок. 2-е изд. М., Мир, 1984. 354 с.

Игнатьев Е. И. В царстве смекалки. 4-е изд. М., Наука, 1984. 189 с.

Лойд С. Математическая мозаика. 2-е изд. М., Мир, 1984. 312 с.

Математический цветник. Сб. статей и задач. М., Мир, 1983. 493 с.

АРИФМЕТИКА І ТЕОРІЯ ЧИСЕЛ

Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. 5-е изд. М., Наука, 1984. 141 с.

Гельфонд А. О. Решение уравнений в целых числах. 4-е изд. М., Наука, 1983. 63 с.

Коврижеико Г. А. Системы счисления и двоичная арифметика. От счета на пальцах до ЭВМ. К., Рад. шк., 1984. 79 с.

Алгебра і початки аналізу

Данилов Ю. А. Многочлены Чебышова. Минск, Высш. шк., 1984. 157 с.

Коровкин П. П. Неравенства. 5-е изд., стереотип. М., Наука, 1983. 71 с.

Хренов Л. С. Визиров Ю. В. Логарифмическая линейка. 2-е изд., доп. М., Высш. шк., 1983. 95 с.

Геометрія

Бескин Л. Н., Бескин В. Л. Многогранники. К., Вища шк., 1984. 86 с.

Горелик Г. Е. Размерность пространства: Ист.-методол. анализ. М., Изд-во МГУ, 1983. 212 с.

Кадомцев С. Б. Геометрия Лобачевского и физика. М., Знание, 1984. 64 с.

Костовский А. Н. Геометрические построения одним циркулем. 2-е изд., перераб. М., Наука, 1984. 75 с.

Шарыгин И. Ф. Задачи по геометрии. Стереометрия. М., Наука, 1984. 159 с.

Широков П. А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского. 2-е изд. М., Наука, 1983. 77 с.

Кібернетика, ЕОМ

Белый Ю. А. Считающая электроника. М., Наука, 1983. 120 с.

Бусленко В. Н. Наш коллега — робот. М., Мол. гвардия, 1984. 222 с.

Громко Н. И. Введение в страну ЭВМ. Минск, Высш. шк., 1984. 205 с.

Джордж Ф. Основы кибернетики. М., Радио и связь, 1984. 274 с.

Кибернетика: Дела практические / Сост. В. Д. Пекелис. М., Наука, 1984. 176 с.

Кодряну И. Г. ЭВМ и математика: Гносеол. и методол. проблемы. Кишинев. Штиинца. 1984. 167 с.
Королев Л. Н. Развитие ЭВМ и их математического обеспечения. М., Знание, 1984. 64 с.
Левинсон А. З., Лозенцвак Д. Л., Хасанов Р.Р. Клавишные вычислительные машины и программирование. М., Финансы и статистика, 1984. 36 с.
Ломов Б. Ф. Человек и автоматы. М., Педагогика, 1984. 127 с.
Микрокалькуляторы. Техн. и конструктивные характеристики / Кузнецов Е. Ю. и др. М., Радио и связь. 1984. 128 с.
Моисеев Н. Люди и кибернетика. М., Мол. гвардия, 1984. 224 с.
Орлов И. А., Корнюшко В. Ф. Основы вычислительной техники и организация вычислительных работ: Учебник для техникумов. 3-е изд., перераб. и доп. М., Энергатомиздат, 1984. 336 с.
Попов Е. П., Ющенко А. С. Роботы и человек. М., Наука, 1984. 112 с.
Стрыгин В. В., Шарев Л. С. Основы вычислительной техники и программирования: Учебн. пособие для техникумов. М., Высш. шк., 1983. 359 с.

Загальні питання математики

Арнольд В. И. Теория катастроф. 2-е изд., М., Изд-во МГУ, 1983. 80 с.
Виленкин Н. Я. В поисках бесконечности. М., Наука, 1983. 161 с.
Дромашко С. Е., Романовский Ю. М. Эволюция математических моделей генетики. М., Знание, 1984. 64 с.
Коба В. І. Бінарні відношення. К., Рад. шк., 1983. 103 с.
Конфорович А. Г. Математичні софізми і парадокси. К., Рад. шк., 1983. 207 с.
Криницкий Н. А. Алгоритмы вокруг нас. 2-е изд. М., Наука, 1983. 223 с.
Кужель А. В. Математические импровизации. К., Вища шк., 1983. 96 с.
Лютикас В. С. Школьнику о теории вероятностей. 2-е изд., доп. М., Просвещение, 1983. 126 с.
Математика сегодня. Научн. сб./ Под. ред. А. Я. Дороговцева. К., Вища шк. 1983. 191 с.
Любарский Г. Я. Математика в эксперименте. М., Знание, 1983. 62 с. Знание, 1983. 64 с.
Садовничий В. А., Любишкин В. А. Геометрия гильбертова пространства и три принципа фунционального анализа. М., Знание, 1983. 64 с.

Сухотин А. Ритмы и алгоритмы. М., Мол. гвардия, 1983, 224 с.
Тихонов А. Н., Дмитриев В. И., Гласко В. Б. Математические методы в разведке полезных ископаемых. М., Знание, 1983. 64 с.
Успенский В. А. Нестандартный или неархимедов анализ. М., Знание, 1983. 62.
Число и мысль. М., Знание, 1983. Вып. 6. 190 с.
Число и мысль. М., Знание, 1984. Вып. 7. 160 с.

Історія і методологія математики

Біографії вчених

Ал-Хорезми. Математические трактаты. Ташкент, Фан, 1983. 306 с.
Башмакова И. Г., Славутин Е. И. История диофантова анализа от Диофанта до Ферма. М., Наука, 1984. 256 с.
Боголюбов А. Н. Математики. Механики: Биогр. справочник. К., Наук. думка, 1983. 639 с.
Булгаков П. Г., Розенфельд Б. А., Ахмедов А. А. Мухаммад ал-Хорезми. М., Наука, 1983. 239 с.
Вирченко Н. А. Математика в афоризмах, цитатах, высказываниях. К., Вища шк., 1983. 278 с.
Гнеденко Б. В. Математика и научное познание. М., Знание, 1983. 64 с.
Іваничук Р. Четвертий вимір: Роман. К., Рад. письменник, 1984. 207 с.
Историко-математические исследования. Сборник статей. Вып. 27. М., Наука, 1983. 340 с.
Канунов Н. Ф. Федор Эдуардович Молин. 1861—1941. М., Наука, 1983. 110 с.
Карпунин В. А. Формальное и интуитивное в математическом познании. Л., Изд-во ЛГУ, 1983. 151 с.
Климишин І. А. Календар природи і людини. 2-е вид., перероб. і доп. Львів, Вища шк. Вид-во при Львів. ун-ті, 1983. 175 с.
Конфорович А. Г. Математика і формування діалектико-матеріалістичного світогляду. К., Знання, 1984. 47 с.
Крылов А. Н. Мои воспоминания. Л., Судостроение, 1984. 477 с.
Липилин В. Алексей Николаевич Крылов. М., Мол. гвардия, 1983. 223 с. /ЖЗЛ/.
Митропольский Ю. А., Боголюбов А. Н. Роль математики в развитии техники. К., Знание УССР, 1984. 48 с.
Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми. К 1200-летию со дня рождения/ Под. ред. А. П. Юшкевича. М., Наука, 1984. 264 с.

Никифоровский В. А. Великие математики Бернулли. М., 1984. 176 с.
Николай Николаевич Лузин. Сб. статей / Сост. П. И. Кузнецов. М., Знание, 1983. 64 с.
Очерки развития математики в СССР / Под. ред. И. З. Штокало, К., Наук. думка, 1983. 763 с.
Полищук Е. М. Софус Ли. 1842—1899. Л., Наука, 1983. 213 с.
Пуанкаре А. О науке. М., Наука, 1983. 560 с.
Рвачов В. Л., Рвачов В. О. Експериментальна математика: методологія, проблеми, практика. К., Знання, 1983. 31 с.
Рузавин Г. И. Математизация научного знания. М., Мысль, 1984. 207 с.
Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики. 4-е изд. М., Наука, 1984. 284 с.
Тиле Р. Леонард Эйлер. К., Вища шк., 1983. 191 с.
Хайруллаев М. М. Ал-Хорезми и его научное наследие. М., Знание, 1983. 46 с.
Яковлев А. Я. Леонард Эйлер. М., Просвещение, 1983. 79 с.

Збірники олімпіадних задач та задач підвищеної складності, довідники з математики

Радость познания: попул. энциклопедия. В 4-х т. М., Мир, 1983, Т. I. Наука и Вселенная. М., Мир, 1983. 292 с.
Цыпкин А. Г., Пинский А. И. Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы. М., Наука, 1983. 416 с.
Цыпкин А. Г. Справочник по математике для средних учебных заведений. 3-е изд., перераб. М., Наука, 1983. 416 с.

Посібники для слухачів підготовчих відділень вузів і абітурієнтів

Гусев В. А., Мордкович А. Г. Математика: Пособие для поступающих в техникумы. М., Высш. шк. 1984. 351 с.
Кондратьева Л. А., Соломоник В. С. Сборник вопросов и задач по математике для поступающих в техникумы. М., Высш. шк., 1983. 223 с.
Математика: Пособие для подготовительных отделений / Под ред. А. И. Бородина. 2-е изд., перераб. и доп. К., Вища шк., 1984. 287 с.
Сборник конкурсных задач по математике с методическими указаниями и решениями: Для вузов / В. М. Говоров, П. Т. Дыбов, Н. В. Миронов, С. Ф. Смирнов. М., Наука, 1983. 383 с.

А. Г. Конфорович

ЗМІСТ

Минуле і сучасне математики

Задачі і розв'язування задач

Сторінки поезії

Книжки юним математикам

СОДЕРЖАНИЕ

К 40-летию Победы советского народа в Великой Отечественной войне

О математике и математиках

Горизонты математики

Учащимся VII—VIII классов

Учащимся IX—X классов

Прошлое и настоящее математики

Задачи и решения задач

Страницы поэзии

Книги юным математикам

В мире математики

Сборник научно-популярных статей. Вып. 16

Издается с 1968 года

Под редакцией доктора физико-математических наук профессора М. И. Ядренко

(на украинском языке)

Киев, «Радянська школа».

Зав. редакцією математики *О. П. Бондаренко.* Редактор *Л. П. Слабошпицька.* Літредактор *Л. П. Фалінська.* Художній редактор *П. В. Кузь.* Обкладинка художника *В. Т. Косенка.* Технічний редактор *А. Г. Фрідман.* Коректори *Т. А. Соколова, І. М. Ситниченко*

Здано до набору 20.11.84. Підписано до друку 26.06.85. БФ 04619. Формат 84×108/32. Папір друк. № 1. Гарнітура літературна. Спосіб друку висок. Умовн. арк. 10,5. Умовн. фарб.-відб. 11,04. Обл.-видавн. арк. 10,02. Тираж 17 000 пр. Видавн. № 29548. Зам. № 4-996. Ціна 45 к.

Видавництво «Радянська школа», 252053. Київ, Ю. Коцюбинського, 5.

Книжкова фабрика імені М. В. Фрунзе, 310057, Харків-57, вул. Донець-Захаржевського, 6/8.