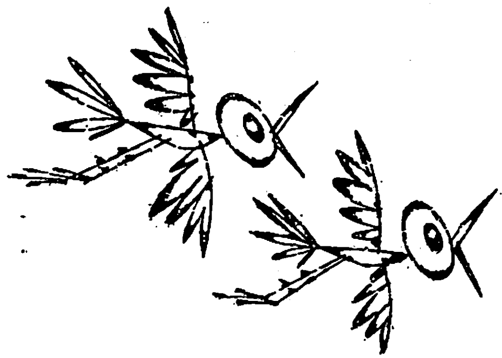
Івасикові
від Яринки і Наді
Щербініних
1994р.

Київ
«ВЕСЕЛКА»
1981

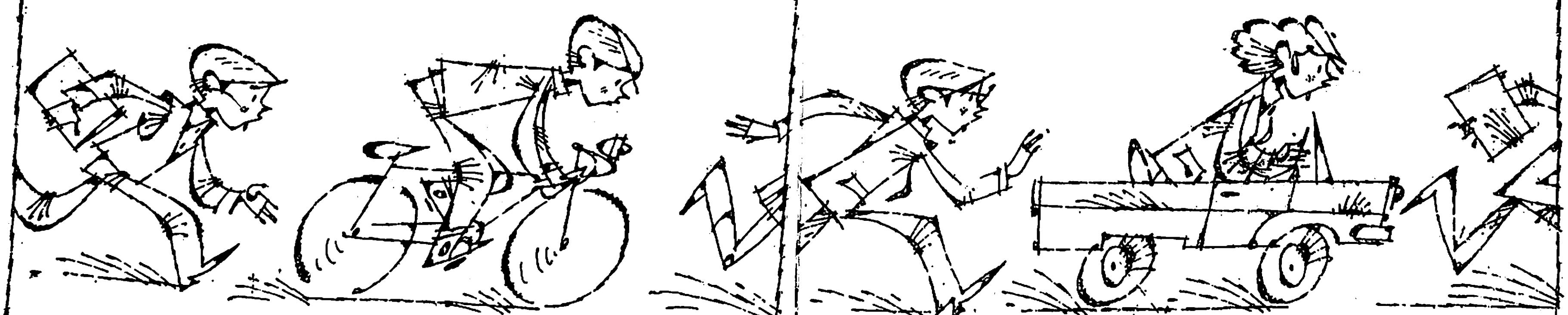


ВОЛОДИМИР АБЧУК

СЕКРЕТ ВЕЛИКИХ ПОЛКОВОДЦІВ

НАРИСИ

Для середнього та старшого
шкільного віку



Можно ли развить в себе такие способности, чтобы уметь предвидеть результаты заранее, еще до того, как сделан первый шаг в ответственном деле? «Можно»,— отвечает автор этой веселой, занимательной и вместе с тем серьезной книжки. Для этого надо только очень подружиться с математикой, в которой заключается секрет великих полководцев.

Переклад з російської
Тараса Кінька

Художнє оформлення
Юрія Жолудєва

Перекладено за виданням:
В. Абчук. Секрет великих полководцев.
Ленинград, «Детская литература», 1975

А $\frac{70803-049}{М206(04)-81}$ 167.81. 4803010102.

ПЕРЕДМОВА

Якось на телевізійній студії я став свідком незвичайної передачі. Вона називалась «Математики жартують». Молодий, підтягнутий, схожий чимось на теніcиста доктор наук доводив, що старій з пушкінської казки про рибака й рибку бракувало... математичної освіти. На його думку, їй слід було б угамувати свої запити, діставши титул знатної дворянки. Коли інші учасники передачі почали заперечувати, вчений схопив олівець і заходився креслити графік. Він малював, щось підраховував, і раптом усім стало ясно — його правда. Стара була неписьменна, межа її можливостей визначалася шляхом простого множення!

Ми реготали; певен, реготали й глядачі.

Думки про велич математики люди дійшли ще в сиву давнину.

Господарство Єгипту за часів фараонів цілком залежало від повеней Нілу. Каламутні води великої річки, розливаючись, виповнювали складну мережу каналів і рівчаків, що тяглися на десятки кілометрів у глиб пустелі. Без води не було врожаю.

Єгипетські жерці, збагнувши зв'язок між часом повені і положенням Сонця серед зірок, шляхом нехитрих обчислень передбачали, коли річка вийде з берегів, коли в країні має початися сезон польових робіт.

Прості люди з побожністю спостерігали за таїнством. Передбачення завжди збувалися.

Справжнім тріумфом обчислень було відкриття у XIX столітті восьмої планети Сонячної системи.

Дуже довго люди знали лише шість планет, які можна стостерігати неозброєним оком чи з допомогою простої оптики: Меркурій, Венеру, Землю, Марс, Юпітер, Сатурн. Згодом до них долучився ще й Уран. І от астроном Левер'є, вивчаючи рух Урана, виявив, що орбіта його викривлена. А що, коли причина викривлення криється у притяганні з боку ще однієї планети, розташованої за Ураном?

Левер'є засів обчислювати. Кінчиком пера він «дістав з чорнильниці» цю таємничу незнайомку, визначив її масу і шлях руху. Про своє відкриття ученні сповістив увесь світ. Десятки потужних телескопів було спрямовано в те місце, де, за його розрахунками, мала перебувати планета. І справді, у точці, передбаченій Левер'є, засвітилася крихітна кулька! Восьму планету назвали Плутоном.

У наш час до математики за порадою вдаються всі.

Скільки риби можна виловити наступного року в Каспійському морі? Колись такі запитання ставили самим іхтіологам. Зараз поруч із фахівцем з осетрів та білуг до столу сідає й математик. Тільки на їхню спільну відповідь зможуть опиратися рибалки.

Що чекає через багато століть на Африку та Аравійський півострів? Геологи з допомогою математиків подали розрахунки: Африканський материк і Аравійський півострів «роз'їдуться» в різні боки. Червоне море збільшиться в розмірах, і з часом на його місці утвориться новий океан.

Перед нами книжка з інтригуючою назвою «Секрет великих полководців». Це несподівана книжка. На уроках математики школярі дивуються рідко. А от тут можна дивуватися на кожній сторінці. Книжка написана цікаво і водночас це серйозна книжка. В ній висвітлено питання, які лише протягом останнього тридцятиліття увійшли до кола загальних знань.

Математика неосяжна.

Ця книжка — про її часточку. Про те, як треба, спираючись на обчислення, приймати важливі рішення.

Безсонну ніч провів Наполеон перед битвою під Ватерлоо. Треба було продумати, коли і в яку мить повинні з'явитися на полі бою частини, які робитимуть обхідний маневр.

До того, щоб перепливти Атлантичний океан на гумовому човні, Ален Бомбар готувався цілий рік. Він намагався передбачити кожну дрібницю. Він рахував: чи вистачить організмові білків і вуглеводів, якщо харчуватися усі три місяці самим планктоном та сирою рибою? В яку пору року краще пливти? Яким маршрутом? Він шукав найкращих рішень.

Ох, як важко часом дійти їх!

Наполеон битву програв.

Бомбар ледве не загинув від виснаження вже наприкінці плавання.

І нарешті, хіба розважливо вчинила пушкінська стара, вимагаючи в золотої рибки раз по раз нових дарунків?

Від п'ятирічного плану до жартівливого розслідування дуелі Онєгіна з Ленським — все можна зустріти в цій книжці. Читаючи її, одразу бачиш: писала людина, що знає свою справу. І до того ж — весела, яка, певно, змогла б перевірити алгеброю гармонію пушкінської казки

«Секрет великих полководців» повинні прочитати усі школярі. Ті, хто збирається стати робітниками, офіцерами, господарниками, вченими. Уміння строго науково приймати рішення необхідне для того, щоб складати правильні плани, підраховувати оленів у тундрі, командувати на містку бойового корабля.

Святослав Сахарнов

ПОЧАТОК,

у якому автор зав'язує розмову з читачем і ставить кілька запитань, які поки що лишаються без відповіді

Багато хто з дітей і навіть деякі дорослі мріють стати великими полководцями. Проте, як показує досвід, це вдається далеко не кожному. Надто вже непросто — перемагати. І все-таки приклади є.

Олександр Васильович Суворов провів шістдесят битв і здобув шістдесят перемог. Та річ не тільки в цих дивовижних цифрах. Важко збагнути інше: лише в трьох битвах із шістдесяти Суворов мав кількісну перевагу над супротивником; у п'ятдесяти семи він переміг ворога, який у багато разів переважав його силою. Ще й як переміг! У битві під Римником проти двадцяти п'яти тисяч суворовців стояла стотисячна турецька армія. Війська Суворова втратили тисячу чоловік, а турки самими лише полеглими — десять тисяч. Усього ж турки втратили близько вісімдесяти п'яти тисяч чоловік.

Є немало й інших імен великих полководців, що, так само як Суворов, уміли перемагати дужчого супротивника. Знає історія також і полководців-невдах, яких били, хоч вони й мали предосить сили для того, щоб здобути перемогу.

Тут є над чим замислитись. У чому ж секрет успіху великих полководців?

Величезне значення, звичайно, має високий моральний дух воїнів, усвідомлення, що правда на боці справи, за яку вони воюють, патріотизм, відвага, мужність. Та не тільки це.

Далеко не останню роль відіграє уміння полководця орієнтуватися у складній обстановці й обирати негайні і правильні рішення.

Великі полководці всіх часів відрізнялися від своїх пересічних колег тим, що вміли розважливо, швидко й правильно діяти.

Перехід Суворова через Альпи, рішення Фрунзе прорватися у Крим через Сиваш — це і є зразки розважливих і вмілих дій.

Уміння швидко орієнтуватися в складних ситуаціях, обирати правильні рішення і перемагати потрібне не лише військовому. Хіба не кажуть про лікаря, що він веде боротьбу за життя хворого? Агроном керує битвою за врожай, робітник та інженер воюють із браком, учені штурмують бастіони природи... Всі вони — полководці «великої армії трударів». І кожен із них бореться до переможного кінця.

Щоправда, поле бою і зброя в них різні: робітник воює за верстатом, агроном — у полі, вчений — у лабораторії. Для цього передусім кожен повинен знати свою справу. Та є в їхніх зусиллях і дещо спільне: всім їм доводиться обирати найкращий спосіб дій з усіх можливих. Агроном мусить вирішувати, коли найкраще збирати врожай; лікар — чи є сенс ризикувати хірургічною операцією; робітник — як виготовити більше деталей найкращої якості.

Обирати рішення людям доводиться не тільки на роботі. Повсякденно, власне, на кожному кроці ми вирішуємо, як краще вчинити, який обрати спосіб дій.

От ми зібрались на прогулянку. Дощу зараз нема, та щось наче густішають хмари. Треба вирішити, одягти плаща чи ні.

Ми хочемо поїхати на протилежний кінець міста. Туди ведуть десятки різних маршрутів; можна їхати трамваєм, автобусом, тролейбусом. Як зручніше й швидше доїхати? Знову необхідно обрати рішення.

І навіть просто переходячи вулицю, людина вирішує, як це зробити безпечно й швидко.

Кожен із власного досвіду знає, що обрати найкраще рішення не просто. Тут потрібен розрахунок. Тому люди придумали спеціальну науку про розрахунки правильних рішень. Називається вона «дослідження операцій». Саме про цю науку й піде у нас розмова.

Наука «дослідження операцій» народилася під час другої світової війни і призначалася спершу тільки для воєнних потреб: з її допомогою обгрунтовували бойові рішення. Коли війна закінчилась, методи дослідження операцій стали дедалі ширше застосовуватись у мирному житті: в економіці, на транспорті, в управлінні виробництвом, у торгівлі. У цих галузях народного господарства з допомогою дослідження операцій розробляються способи вироблення найкращих рішень.

Дослідження операцій — наука молода. Багато чого в неї, як то кажуть, ще попереду. Це дало привід одному серйозному вченому для такого похмурого визначення: «Дослідження операцій являє собою мистецтво давати погані відповіді на ті практичні питання, на які в інший спосіб даються ще гірші відповіді».

Часом, проте, можна почути й оптимістичнішу оцінку нової науки: «Дослідження операцій — це згусток здорового глузду».

Для того щоб обирати найкращі рішення, дослідження операцій покликало на допомогу математику: алгебру, геометрію, тригонометрію.

Математика — мова, якою сьогодні говорить будь-яка точна наука. Сучасна фізика, хімія, астрономія немислимі без математики.

У наші дні математика міцно увійшла і в такі науки, як біологія, медицина, мовознавство.

Ряд найвизначніших наукових відкриттів останнього часу стали можливі саме завдяки успіхам математики. Кібернетика, закони спадковості, електронно-обчислювальні машини з'явилися завдяки математиці.

Збуваються слова основоположника наукового комунізму Карла Маркса: «Наука аж тоді досягає досконалості, коли їй вдається користуватися математикою».

Математика лежить і в основі науки про правильні рішення — дослідження операцій.

Адже перед тим, як вирішувати, необхідно зробити розрахунок. Це, звичайно, не просто, і я боюся, що вже на цьому місці в книжці лави наших читачів помітно порідшають. Зате ті з них, які не злякаються труднощів, одержать відповіді на такі різні, але чимось пов'язані між собою питання:

— Чим відрізняється переслідування злочинця від переслідування зайця?

— Чому бутерброд падає маслом униз?

— Як прочитати шифрованого листа?

— Скільки треба мати лотерейних білетів, щоб виграти?

— Як бомба могла влучити в єдиного на весь Ленінград слона?

— Чому ми переконані, що план буде неодмінно виконано?

— Як викроїти зайвий автомобіль?

— Що робити, коли здається, що забув вимкнути телевізор?

— Як слабкому перемогти сильного?

І нарешті:

— У чому головний секрет великих полководців?

Не розкриваючи поки всіх цих секретів, спробуємо збагнути, що в них спільне. Об'єднує ці дуже різні запитання те, що всі вони містять складне завдання, змушують шукати вихід із складного становища, вимагають обрати правильний спосіб дій.

Над подібними запитаннями сушать голову не лише полководці, а й люди найрізноманітніших професій, кожен, хто має вирішувати.

Це дає нам право називати великими полководцями не тільки воєначальників, а й усіх, хто вміє обирати правильні рішення, рішення, що ведуть до перемоги.

Отже, вперед! На нас чекає дорога, яка вимагає розуму й терпіння, обережності й сміливості, шлях, сповнений складних загадок і несподіваних рішень, одне слово — перед нами шлях, гідний великих полководців.

Розділ 1

АЗБУКА ВЕЛИКИХ ПОЛКОВОДЦІВ,

у якому герої переходять вулицю, перевозять годинники, женуться за зайцем, ловлять злочинця, навіть миють посуд і аж після цього дістають відповідь на одне важливе запитання

ПРАВИЛЬНЕ РІШЕННЯ — ЩО ЦЕ ТАКЕ?

Усі ми змалку звикли розв'язувати різні задачі: спочатку з арифметики, потім з алгебри й геометрії, фізики й хімії. Ми вміємо розраховувати, скільки треба часу, щоб проїхати на велосипеді з пункту А до пункту В, чому дорівнює площа ділянки у формі прямокутника, яка сила й напруга електричного струму.

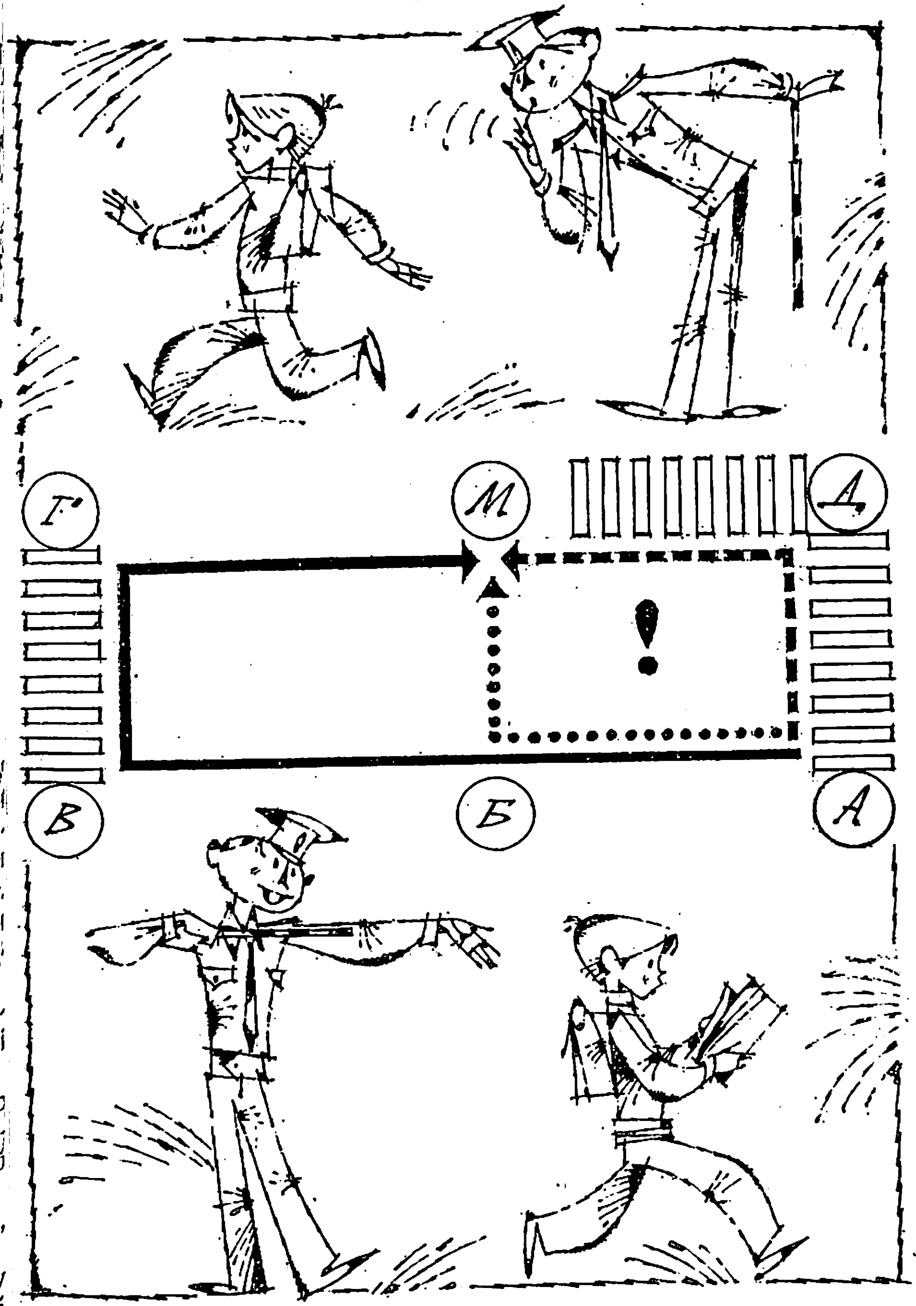
У житті, проте, на кожному кроці доводиться розв'язувати задачі, які не завжди вкладаються у звичайну шкільну премудрість. Почнемо з найпростішої.

Ми збираємося зайти до магазину, який на малюнку позначено літерою М. Наше місце — у точці А на протилежному боці вулиці.

До магазину ведуть дві дороги: одну зображено суцільною лінією, другу — уривчастою. Виникає, щоправда, і спокуса скоротити шлях загальновідомим способом — по прямій, але, щоб її позбутися, поставимо на перехресті міліціонера.

Отже, дві дороги. Слід вибрати, яка з них краща. Цей вибір, напевне, і буде нашим рішенням.

Чи можна, проте, одразу розв'язати цю, здавалося б, просту задачу? На жаль, поки що не можна. Адже вимагається, щоб ми вибрали саме к р а щ у дорогу. А що таке кращу? Як ми



зараз переконаємося, слово «кращий» можна розуміти по-різному.

Наприклад, «найкраща дорога — найкоротша». Так багато хто вважає. Міліціонери й дружинники ледве встигають стримувати тих пішоходів, для яких найголовніше при переході вулиці — швидкість. А втім, у нашій задачі можна швидко потрапити в магазин, уникнувши конфлікту з охоронцями порядку — просто піти переривчастою лінією. Вона удвічі коротша за суцільну.

Здавалося б, задачу розв'язано. Але...

«Найкраща дорога — найбезпечніша». Так міркують ті, кому притаманне одвічне почуття самозбереження. А наша дорога по переривчастій лінії, на жаль, удвічі небезпечніша, ніж по суцільній: кількість переходів через вулицю виросла вдвічі.

То яке ж розв'язання з двох правильне?

Певно, читач уже здогадався. Правильного рішення на всі випадки життя не буває. Найкраще рішення — те, яке відповідає обраній меті:

мета: швидкість — рішення йти уривчастою лінією;

мета: безпека — іти суцільною.

Недарма в пісні співають: «Чим сміліше йдемо до мети ми, тим скоріше до неї прийдем». Тільки-но з'являється ясна мета, одразу ж виникає і певне рішення.

Щоправда, мета не завжди така проста, як у нашому прикладі. Адже може виникнути потреба не тільки безпечно пройти до магазину, а й щонайшвидше. Як бути в цьому випадку?

Ідеальним рішенням було б перейти дорогу по лінії з кружалець: це водночас і найкоротший, і найнебезпечніший шлях. Він удвічі коротший за шлях по суцільній лінії і ще й удвічі безпечніший від неї. До того ж, обравши це ідеальне рішення, ми, власне, нічим не ризикуємо: порівняно з дорогою по переривчастій лінії безпека зросла вдвоє, а шлях анітрохи не збільшився.

Та, як ми бачимо, переходу тут поки що немає, і ідеальне рішення зависає в повітрі. Отже, в майбутньому слід зробити додатковий перехід у цьому найзручнішому місці — по кружальцях. А поки що поєднати вимоги безпеки й швидкості неможливо, доведеться вибирати те з двох можливих рішень, яке відповідає головній меті. Наприклад, якщо найбільше важить безпека, часом можна знехтувати і йти довшою дорогою.

Отак і полководець, обираючи рішення в бою, бачить перед собою головну мету — перемогу над ворогом. Заради цієї мети багато чим можна пожертвувати. Лікар-хірург, зважуючись на складну операцію, перш за все дбає про здоров'я хворого. Найголовніша вимога до результатів праці інженера чи робітника — якість продукції.

І при розв'язуванні звичайної шкільної задачі, скажімо, з алгебри, теж можна прагнути до певної мети, ставити різні вимоги. Якщо задачу задано додому, то суть не в тому, як швидко її розв'язано. Головне — зробити це правильно, адже часу завжди досить. Інша річ — розв'язувати задачу коло дошки. Тут важлива швидкість — не можна ж думати над однією задачею цілий урок. Навіть якщо десь трохи й помилишся — вчитель поправить. А от на контрольній роботі і швидкість, і правильність однаково важливі: часу обмаль і поправити нема кому.

Отож, перш ніж щось вирішувати, треба визначити мету, знайти ту головну вимогу, від якої залежить успіх. І тоді правильне рішення забезпечене.

Мета — передусім. А що потім? Про це ви дізнаєтеся з наступної розповіді.

ДАЛІ — ДЕШЕВШЕ ЧИ БЛИЖЧЕ — ДОРОЖЧЕ?

Цього разу піде мова про перевезення важких вантажів — партії годинників із пункту А — заводу, на якому годинники виготовляють, у пункт В — місто, де годинники потрібні людям.

Годинники можна перевозити трьома шляхами — залізницею, річкою і повітрям.

Найдальший шлях — річкою — 1000 кілометрів; він забере чотири доби. Трохи коротший шлях залізницею — 700 кілометрів — 12 годин. Найкоротший шлях — повітряний — 500 кілометрів — одна година.

Необхідно вирішити, який шлях обрати.

На перший погляд найкраще транспортувати годинники літаком: через годину вантаж буде на місці.

Час, за який дійдуть годинники, вирішального значення не має, адже це не той вантаж, що швидко псується.

Важливо зробити так, щоб перевезення обійшлося дешевше, тоді й вартість вантажу стане меншою. Це головне.

Отже, головна мета нашого рішення — доправити вантаж якнайдешевше.

Поцікавимося, скільки коштує перевезення вантажу різними видами тронспорту. Виявляється, при перевезенні партії годинників річкою кожні 10 кілометрів обходяться у 80 копійок, залізницею — карбованець, а повітрям — 2 карбованці. Найдешевший шлях — водою.

Отже, повеземо водою? Не будемо поспішати з рішенням.

Згадаймо про мету. Адже вона полягає не в тому, щоб обрати найдешевший вид транспорту. Головне — зробити дешевим перевезення на всьому шляху від заводу до міста. А загальна вартість такого перевезення залежить не тільки від виду транспорту, а й од відстані. Саме ця загальна вартість і слугуватиме нам мірилом вибору найкращого рішення.

З допомогою такого мірила легко підрахувати, чого будуть варті перевезення різними шляхами:

водою: 1000 км×80 коп/км=800 крб.
залізницею: 700 км×1 крб/км=700 крб.
повітрям: 500 км×2 крб/км=1000 крб.

Досить порівняти результати, як зникнуть останні сумніви, який шлях, яке рішення краще. Везти залізницею!

Корисно повернутися до самого початку розмови про перевезення годинників і простежити, як дійшли такого очевидного рішення. Для цього нам, виявляється, потрібні були лише три кроки.

Перший крок. Визначено мету рішення — зробити перевезення якомога дешевшим.

Другий крок. Здійснено оцінку, розрахунок усіх можливих рішень, які ведуть до мети.

Третій крок. Порівняння оцінок дало змогу обрати найкраще рішення.

Третього кроку, до речі, може й не бути, якщо умова задачі допускає лише одне-єдине рішення. Тоді це рішення приймається без усякого вибору.

Такий наш шлях до рішення. Чи гарний він?

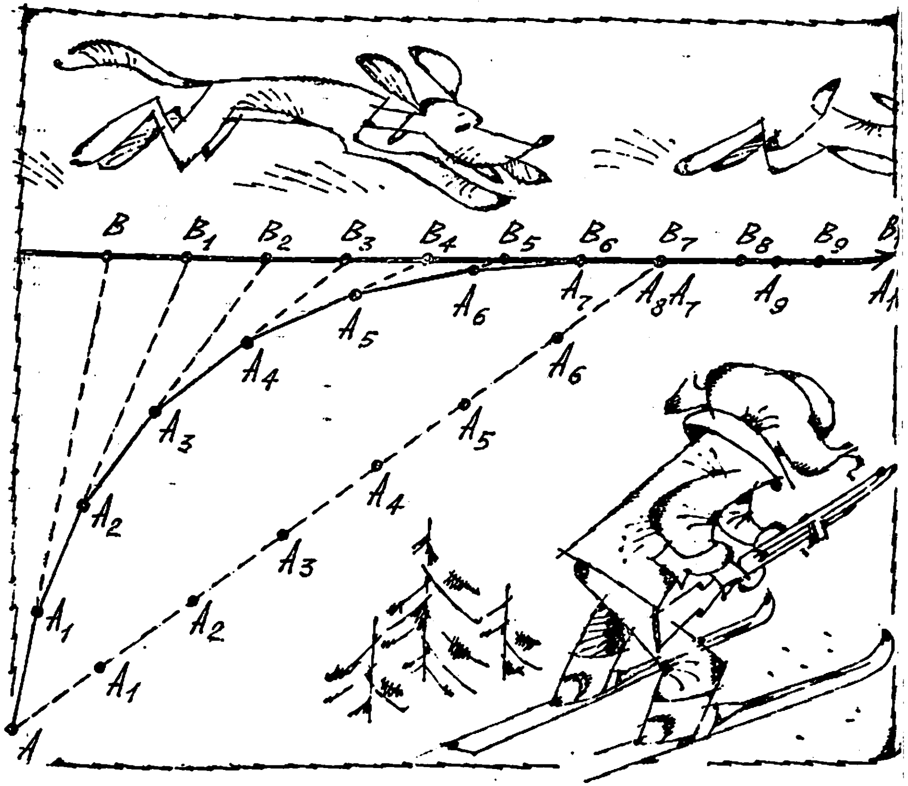
Для того, щоб з'ясувати це, згадаймо, кому ще, крім людини, доводиться розв'язувати складні задачі.

ЧИМ ВІДРІЗНЯЄТЬСЯ ЛЮДИНА ВІД БДЖОЛИ?

Якось учені-архітектори вирішили розрахувати ідеальний склад. Треба було знайти таку конструкцію, яка при найменших затратах будівельних матеріалів мала б найбільші з усіх можливих показники міцності й місткості.

Коли цей складний розрахунок було виконано, з'ясувалося, що вчених випередили... бджоли. Побудовані ними без усяких креслень стільники з найбільшою точністю відтворювали розміри ідеальної споруди, розрахованої за всіма правилами науки.

Виконувати складні завдання, знаходити вихід із скрутного становища можуть так само, як бджоли, й інші живі істоти. Інстинкт — природжена здатність виконувати необхідні дії —



ось що дає змогу боброві будувати чудову загату, а голубові — знаходити дорогу додому. Інстинкти певною мірою притаманні й людині. То чи варто обмірковувати рішення? Чи не є інстинктивне рішення найкращим?

...Полем біжить заєць. За ним навздогін собака.

Вважатимемо, що шлях зайця — пряма лінія. Собака завжди прагне інстинктивно бігти просто на зайця. Через те на початку гонів, коли собака у точці A, його шлях скеровано на точку B, у якій в цю мить перебуває заєць. Собака в точці A_1 — його шлях скеровано у точку B_1 і так увесь час, аж доки поблизу точки (A_{10}, B_{10}) настане фатальна для зайця зустріч.

Якщо простежити увесь шлях собаки від початку до кінця, то видно, що він біжить по кривій лінії. Ця лінія так і називається: крива гонів чи просто — собача крива.

Собача крива — не найкоротший шлях, що веде собаку до здобичі. На малюнку добре видно, що коли б собака біг по прямій, перебуваючи у відповідні моменти в точках A_1 і A_2 і так

далі, то зустріч могла б відбутися значно раніше, уже в точці (A_7, B_7). Пряма завжди коротша за ламану.

Проте таке найкраще рішення «не по зубах» собаці. Адже для правильного маневру треба зробити розрахунок, а наш пес, з усіма своїми собачими інстинктами, в розрахунках, на жаль, слабкий. Собака, як і всяка тварина, не має розуму, він не здатний мислити.

Карл Маркс про це писав: «Павук виконує операції, які нагадують операції ткача, і бджола побудовою своїх воскових стільників присоромлює деяких людей — архітекторів. Та навіть найгірший архітектор від найкращої бджоли з самого початку відрізняється тим, що перш ніж будувати чарунку з воску, він уже побудував її в своїй голові».

Отже, головне, що відрізняє людину, яка приймає рішення, від істоти, що живе інстинктами, це розум, здатність мислити і творити без шпаргалки.

Як же організує переслідування людина, яке рішення в даному разі обере вона?

МОДЕЛЬ «ЗЛОЧИНЕЦЬ НА ШОСЕ»

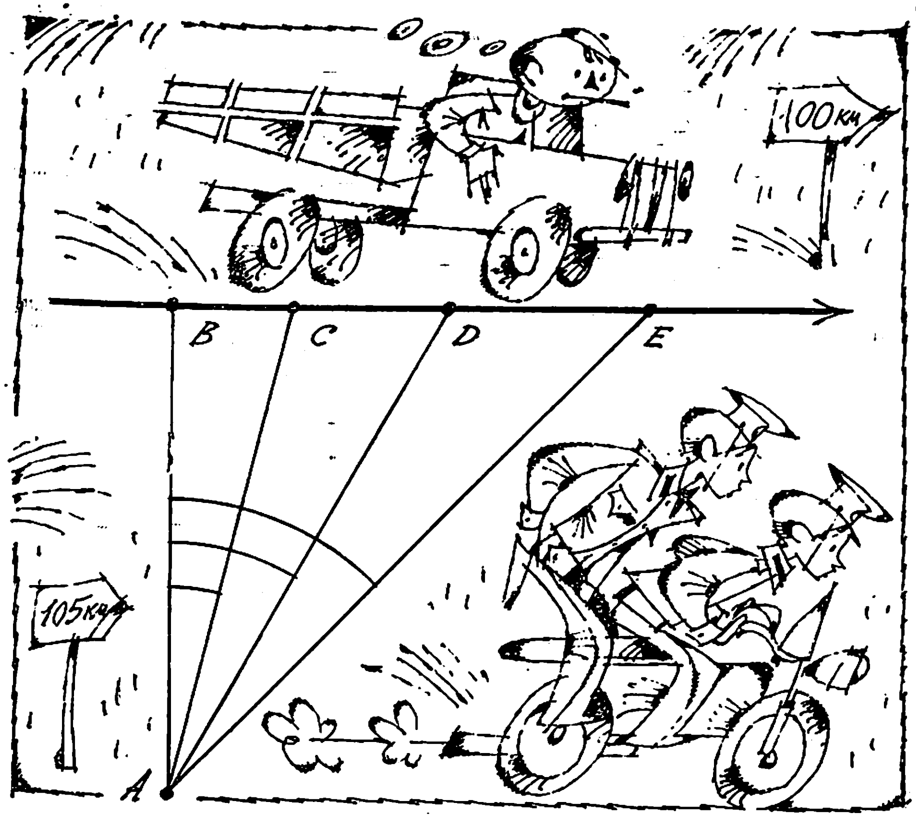
Цього разу переслідування ведуть міліціонери — співробітники карного розшуку. В ролі зайця тут виступає небезпечний злочинець. Міліціонери з мотоциклом чекають бандита в засідці на перетині лісових доріг у точці A.

Надійшло повідомлення по радіо: «Злочинець за кермом самоскида. Він мчить по шосе із швидкістю приблизно 60 кілометрів на годину».

Тієї ж миті в кінці лісової дороги № 1 на шосе з'явився самоскид (точка B). Мерщій на мотоциклі перехопити бандита! Та по якій дорозі? Адже треба вискочити на шосе в тому ж місці, де в ту хвилину опиниться й злочинець. Тільки в цьому випадку вдасться захопити його зненацька. Швидкість мотоцикла близько 120 кілометрів на годину.

Зрозуміло, що дорогою № 1 їхати нема сенсу. Поки мотоцикл дістанеться до шосе, злочинець буде вже далеко. Яку ж з інших трьох доріг обрати? Доведеться пригадати геометрію.

Мабуть, слід обрати таку дорогу, щоб відстань по ній була вдвічі більша за ту, яку подолає злочинець до перехрестя з цією дорогою,— адже мотоцикл рухається удвічі швидше за самоскид. Зазначимо, що дороги під номерами 2, 3, 4 прокладено до дороги № 1 під різними кутами. Один із цих кутів — 30°. У прямокутному трикутнику ABD катет BD, що лежить навпроти цього кута, дорівнює, як відомо, половині гіпотенузи AD.



Отже, скерувавши мотоцикл по дорозі № 3, міліціонери опиняться на шосе у точці B одночасно із злочинцем, і дітися йому не буде куди. Тим часом, обравши дорогу № 2 і № 4, міліціонери дісталися б до шосе не водночас із бандитом, і він мав би час відірватися від погоні.

Кут між напрямками доріг № 1 і № 3, який приводить міліціонерів у точку зустрічі із злочинцем, називається кутом випередження. В даному разі він дорівнює 30°. З попередньої розповіді ми вже знаємо, що собака знайти кута випередження не може і змушена бігти довшою кривою лінією.

Собака, доганяючи зайця, так само як і бджоли, будуючи стільники, розв'язує свою задачу інстинктивно, користується готовими правилами, успадкованими від своїх пращурів.

Людина ж поставила собі на службу розум. Переслідуючи злочинця, співробітники карного розшуку спочатку продумали план дій. Для цього довелося уявити хід майбутньої операції, ніби побудувати її модель.

Така модель — план операції — і показана на малюнку 4. І так само, як модель бамбукового літака допомагає зрозуміти конструкцію справжнього аероплана, модель переслідування показує, як краще спіймати злочинця: дорога № 3 приводить міліціонерів у точку зустрічі з бандитом. Адже і на моделі, і на місцевості шлях мотоцикла цією дорогою вдвічі довший, ніж шлях самоскида по шосе.

План переходу через вулицю, схема перевезення годинників — усе це моделі майбутніх дій, що допомагають обрати правильне рішення.

Створення моделей — суто людський спосіб такого вибору. Модель майбутніх дій не обов'язково малювати на папері. Її можна «побудувати» і в уяві. На зразок не особливо складних арифметичних задач, які ми розв'язуємо усно.

Розгляньмо, який вигляд має таке усне розв'язання в житті, на практиці.

ОСТАННЯ ЧЕРГА В ЛІСІ

Все це сталося в піонерському поході. Щойно закінчився обід, і діти — кілька сотень хлопчиків і дівчаток — повинні були помити посуд, кожен свій. Добре, що посуду було небагато — по одному казанку й ложці.

Чергові нагріли чотири великі баки з водою: у двох посуд треба мити, в двох інших — полоскати.

І одразу ж біля перших двох баків виросли черги. Спочатку невеликі, а далі більші й більші: піонери не встигали мити посуд.

Туди, де піонери вели нерівний бій з посудом, надійшов старший вожатий. Якийсь час він мовчки спостерігав за полем бою, поглядаючи на годинник, а потім щось скомандував.

Чудо сталося просто на очах: черга швидко почала танути, і незабаром черговий рапортував вожатому, що посуд вимито.

Це був предметний урок того, як обирати швидке й правильне рішення. Як же все це відбувалося? Яку команду подав вожатий?

Ми вже знаємо, які три кроки слід зробити, щоб дійти правильного рішення.

Спочатку визначити мету дій, потім оцінити ситуацію — можливі шляхи, які ведуть до мети і, зрештою, обрати найкраще рішення. Вожатий так і вчинив.

Передусім мета. Вона ясна: скоротити час миття посуду.

Потім оцінка ситуації. Вожатий недаремно стежив за часом. Годинник показав, що на миття казанка й ложки йде, в середньому, чотири з половиною хвилини. А от на виполіскування посуду йшло лише півтори хвилини. Тепер можна вибрати рішення.

Порівняємо здобуті результати. Для цього зробимо невеликий розрахунок. У скільки разів більше часу йде на миття, ніж на виполіскування?

$$\frac{4,5}{1,5} = 3 \text{ рази.}$$

Цей усний розрахунок і був тією уявною моделлю, що допомогла вожатому вибрати правильне рішення. Найкращим рішенням, напевне, буде таке, що дасть для миття посуду втричі більше можливостей, ніж для виполіскування. Пролунала команда: «Мити в трьох баках, виполіскувати в одному!»

Отже, спочатку оцінка ситуації, потім розрахунок, і в результаті — рішення.

Якби рішення виявилося неправильним (черга не зменшилась), то це означало б, що вожатий десь припустився помилки і рішення необхідно підправити з урахуванням набутого досвіду. Отже, знову оцінка ситуації, знову розрахунок — і нове, тепер уже, мабуть, цілком правильне рішення.

І хоч яке б рішення обиралося — від найпростішого до найскладнішого, усно чи з допомогою складних розрахунків,— порядок, чи, як то кажуть, процедура прийняття рішення, залишається такою самою.

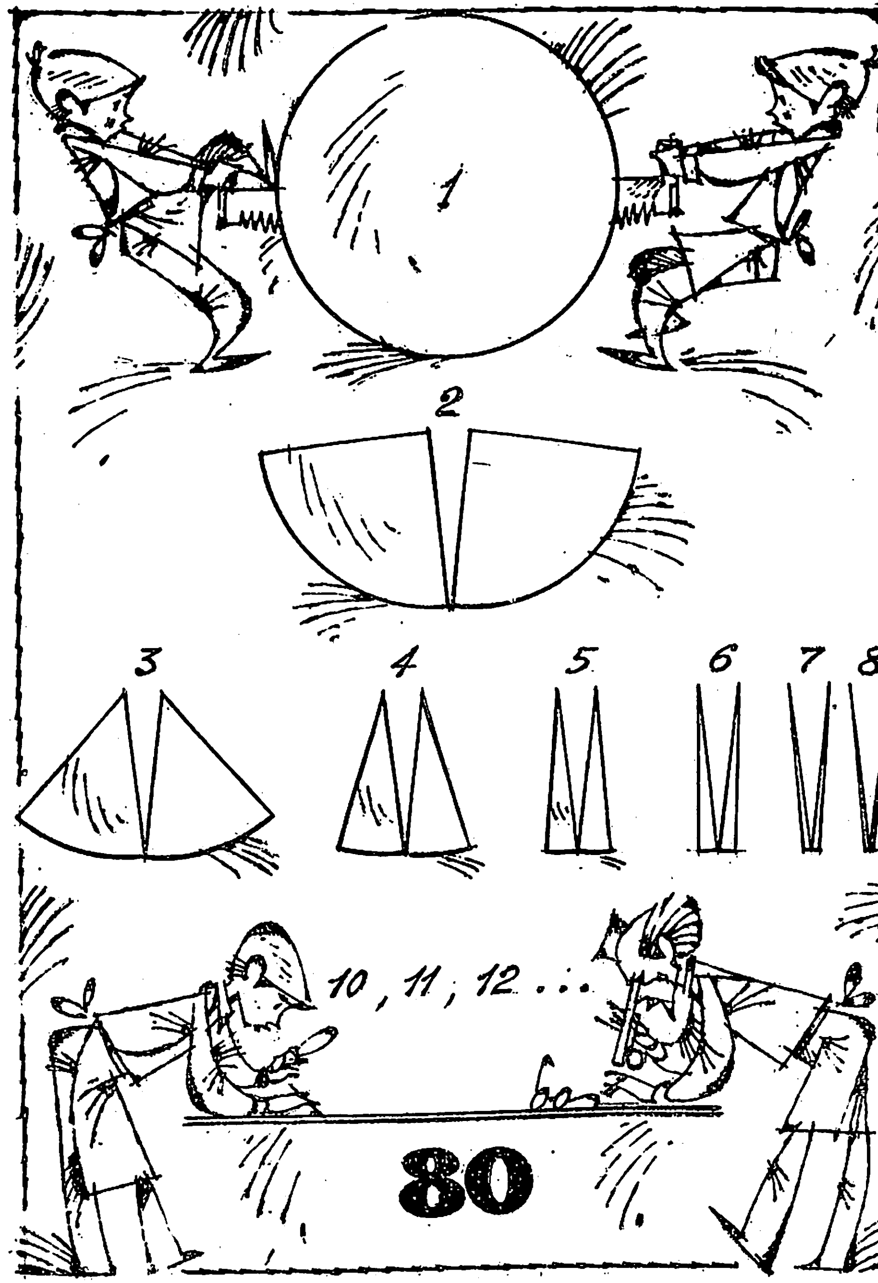
Лікар, зважуючись на ризиковану операцію; слідчий, розплутуючи складну справу; агроном, встановлюючи строки жнив; сталевар, визначаючи, чи можна розливати метал,— всі вони спочатку оцінюють ситуацію, потім обдумують, як краще вчинити, вдаються до необхідних розрахунків і нарешті приймають рішення — що робити. Рішення перевіряється на практиці, і, коли треба, підправляється.

Як ми бачимо, обрати рішення, особливо в складних життєвих ситуаціях, річ далеко не проста. Це дає підстави говорити про те, що вміння вирішувати — особливе мистецтво. Одразу ж виникає побоювання, чи не є мистецтво приймати правильне рішення справою обраних, чимось на зразок віртуозної гри на скрипці чи складання гарних віршів.

Чи можна навчитися обирати правильні рішення?

ЧИ МОЖНА ВИВЧИТИСЬ НА ВЕЛИКОГО ПОЛКОВОДЦЯ?

Обирати рішення люди почали дуже давно, в незапам'ятні часи. Оточена хижаками, не дуже сильна фізично, людина стала непереможною завдяки тому, що в процесі праці навчилася розв'язувати складні життєві задачі. Адже ніхто, крім людини, на



землі не вмів цього робити, не вмів працювати. Інстинкт тварини, як ми бачили на прикладі собачих гонів, далеко не завжди дає бажаний результат. А осмислене людське рішення переважно приводить до перемоги.

Умінням обирати і втілювати в життя необхідне рішення, чи, як заведено казати, рішучістю, відзначався багато хто з видатних людей: славетні вчені, політичні діячі, винахідники. Всім цим людям обирати правильне рішення допомагала інтуїція — особлива здатність знаходити потрібну лінію поведінки в складних обставинах.

Інтуїція де в чому нагадує інстинкт. Вона дає людям можливість розв'язувати складні задачі правильно й швидко, без будь-яких розрахунків, так би мовити, «на око». Інтуїція грунтується на досвіді, знаннях, залежить вона й від природжених якостей людини.

Великі полководці всіх часів і народів відрізнялися від усіх своїх менш обдарованих супротивників тим, що мали високо розвинену інтуїцію. Вони «відчували», коли, де і як завдати удару по ворогові, уміли миттєво оцінити ситуацію й обрати правильне рішення.

Ми теж часто покладаємося на власну інтуїцію. Так, навряд чи ми станемо довго розмірковувати і вести якісь розрахунки з приводу того, чи вдягати плаща, виходячи з дому, чи ні. Рішення народжується в цьому випадку інтуїтивно, випливає з досвіду: хмарно — вдягаю плащ, ясна погода — плащ залишаю вдома.

Без особливих роздумів і розрахунків ми розв'язуємо й інші подібні задачі. І, як правило, вдало. Та спробуйте лишень інтуїтивно вирішити, як наздогнати злочинця чи вивести ракету в потрібну точку простору. Інтуїція напевно підведе. Тут треба розрахувати.

В яких же випадках інтуїція нам зраджує?

Розв'яжімо таку задачу.

На скільки частин треба розрізати кавун вагою чотири кілограми так, щоб у кожній частині було по півкілограма? Думаю, всі дадуть правильну й швидку відповідь — на вісім частин.

А ось тепер ще одна схожа задача.

Розділіть в уяві земну кулю навпіл, одну половину відкиньте, а ту, що лишилася, знову розділіть навпіл, знову відкиньте половину і так далі. Необхідно визначити, скільки разів доведеться так ділити, щоб останні половинки були завбільшки як атом.

Мені доводилося часто задавати цю задачу, і переважно у відповідь я чув: сотні тисяч разів, мільйони, мільярди разів, і майже ніхто не розв'язав задачі правильно — 80 разів.

Причина загальної помилки полягає в тому, що задача ця для нас — незвична, в її розв'язанні ми не маємо аніякісінького досвіду. У шкільних підручниках подібної задачі нема, а в житті навряд чи хто з нею стикався. І інтуїція нас серйозно підводить.

Правда, завжди були люди, здатні інтуїтивно розв'язувати куди складніші задачі. Але такий талант зустрічається порівняно рідко. Більшості ж людей доводилося шукати правильне рішення навпомацки: «Сім раз відміряй, а раз відріж». Цей шлях, безумовно, не кращий, на ньому можна легко вскочити в халепу, наробити грубих, невиправних помилок.

Щоб уникнути цих помилок, необхідно, як ми бачимо, знати певні правила, способи й розрахунки правильних рішень.

Звичайно, той, хто приймає рішення, не обмежується самими розрахунками, якими його постачає наука. Сьогодні, як і колись, досвід та інтуїція грають величезну роль. У цьому розумінні обрання рішень є мистецтвом, що вимагає здібностей і таланту. Не обійтися тут і без вольових якостей: рішучості, сміливості, наполегливості.

Зараз, проте, на відміну від минулого, кожен, кому це необхідно, може покликати на допомогу науку про рішення. Вона дасть потрібні знання. Мистецтвом великого полководця можна оволодіти.

Ми щойно побували у школі великих полководців, у її найпершому класі. Як і слід у школі, спочатку ми засвоїли азбуку. Тепер можна переходити й до читання. Але що читати? На чому спинитися?

Щоб розібратися в цьому, необхідно з'ясувати, які задачі доводиться розв'язувати великим полководцям.

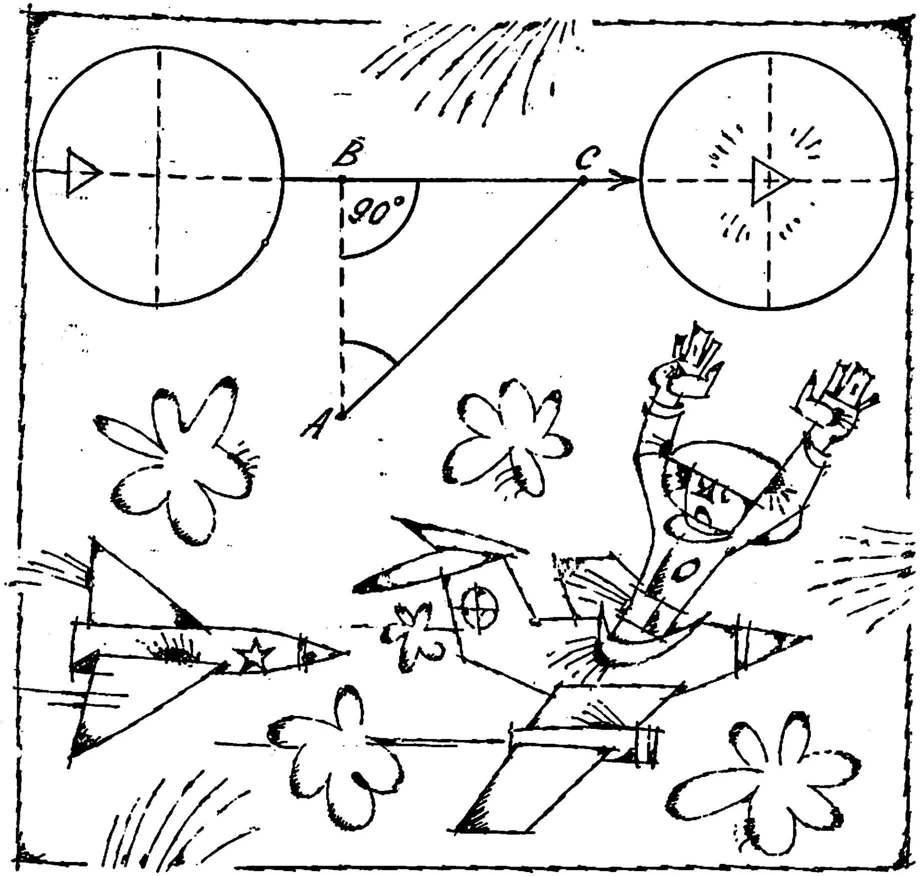
Розділ 2

РАКЕТА, ТОМ СОЙЄР ТА ІНШІ,

в якому ведеться стрільба ракетою по літаку, перевозиться руда, Том Сойєр шукає кульку, а водій «Запорожця», подібно до героя прадавньої казки, опиняється на роздоріжжі

РАКЕТОЮ ПО ЛІТАКУ

Бомбардувальник на великій швидкості — близько 700 км на годину — наближається до важливого об'єкту супротивника. Ще мить — і полетять бомби. Але там не дрімають. Напоготові



зенітна ракета. Необхідно негайно послати її в повітря. Куди скерувати ракету? Який при цьому має бути кут випередження (згадаймо переслідування злочинця)?

Позначимо початкове місце літака літерою B, початкове місце ракети — літерою A, а точку зустрічі — літерою C.

Неважко збагнути, що коли літак пролітає повз ракетну установку і кут ABC — прямий, то в прямокутному трикутнику ABC:

$$\sin\angle BAC=\frac{BC}{AC}$$

або

$$\sin \text{ кута випередження}=\frac{\text{шлях літака}}{\text{шлях ракети}}.$$

З шкільного курсу фізики ми знаємо, що відстань дорівнює добуткові швидкості на час руху:

$$\sin \text{ кута випередження}=\frac{\text{швидкість літака}\times\text{час польоту до зустрічі}}{\text{швидкість ракети}\times\text{час польоту до зустрічі}}.$$

Оскільки час польоту літака й ракети до їхньої зустрічі має бути однаковим — інакше зустріч просто не відбудеться — і вважаючи, що швидкість ракети дорівнює 1000 кілометрів на годину, можемо написати:

$$\sin \text{ кута випередження}=\frac{\text{швидкість літака}}{\text{швидкість ракети}}=\frac{707}{1000}=0{,}707.$$

А сам кут випередження, як запевняє таблиця синусів, дорівнює при цьому 45°.

Зроблений нами обрахунок за лічені секунди виконує спеціальна обчислювальна машина — автомат стрільби.

Варто навести тепер ракету по обчисленому куту, і літаку вже буде непереливки.

Чи не здається вам, що ви з чимось схожим уже зустрічалися? Справді, все тут дуже нагадує ту задачу, над якою довелося поморочитися міліціонерам, доганяючи злочинця: і там і тут йшлося про правильний рух — маневр.

Особливість подібних рішень полягає в тому, що їх одержують з допомогою звичайної геометрії чи тригонометрії. Розв'язання таких задач, як правило, приводить до єдино можливого результату. Тут нема з чим порівнювати, нема з чого вибирати. І шлях міліціонера по дорозі № 3, і шлях ракети на перехоплення бомбардувальника — це єдино можливі розв'язання поставлених задач. Решта шляхів ні до чого не приводять.

Не завжди, проте, вирішувати доводиться у такий спосіб: можливих шляхів може бути кілька, і треба вміти вибирати кращий.

ШЛЯХИ, ЯКІ МИ ВИБИРАЄМО

Шахтарі, залізничники, металурги зіткнулися з нелегкою задачею.

На шахтах, розташованих у різних районах нашої країни, видобувається руда, яку залізницею перевозять на кілька металургійних комбінатів, щоб виплавляти з неї метал. Відстані від шахт до кожного комбінату різні, різна тому й вартість перевезення руди. Необхідно так спланувати доставку руди на комбінати, щоб загальна вартість перевезень була якомога меншою.

Ця задача чимось схожа на історію з перевезенням годинників, з якою ми ознайомилися раніше. І там і тут мова йшла про вибір найкращого рішення з ряду можливих. Та справа тут значно складніша: перевезення руди, на відміну від перевезення годинників, здійснюється з кількох пунктів відправки в різні пункти призначення. І треба визначити, скільки руди по кожному з цих маршрутів відправити.

Можна було б спробувати перебрати всі можливі варіанти перевезень у різних напрямках, оцінити їхню вартість і зупинитись порівняльним шляхом на найдешевшому. Здавалося б, так найпростіше. Але тут виникає цілком несподівана перешкода — час. Не той час, що необхідний для перевезення руди, а час на розрахунки усіх варіантів. З допомогою спеціальних математичних формул можна підрахувати, що кількість таких варіантів може сягати сотень мільйонів, а час на розрахунки — десятків років. Навіть якщо лічити не на рахівниці, а з допомогою сучасної обчислювальної техніки.

Мабуть, одразу відповіді на цю задачу нам не одержати. Тут простою арифметикою з геометрією нічого не досягнеш. Доведеться до певного часу відкласти рішення.

Не допоможе звичайна математика розв'язати й наступної багатьом відомої задачі.

БРАТЕ, ПІДИ ЗНАЙДИ БРАТА

«Він повернувся до свого тайника і став на те саме місце, з якого щойно кинув кульку, потім витяг з кишені другу й кинув її в тому ж напрямку:

— Брате, піди знайди брата!

Він помітив, де зупинилася кулька, і заходився шукати там, але не знайшов. Певно, друга кулька або не докотилася, або залетіла надто далеко. Він спробував ще раз, удруге, втретє, і нарешті досяг успіху: обидві кульки лежали за фут одна від одної».

Том Сойєр, про якого йшлося, звичайно не знав теорії дослідження операцій, але діяв як досвідчений спеціаліст.

Том збагнув, що шукати слід не як заманеться, а за певними правилами. Як же вивести їх?

Мабуть, правила ці повинні бути ті самі для всіх кульок однакового розміру й ваги. Друга кулька потрібна була Томові для того, щоб з'ясувати правила пошуку.

Чому Томові Сойєру довелося не раз кидати кульку?

Річ у тім, що закони пошуку проявляються не обов'язково щоразу (тоді б кулька умить знайшлася), а лише в якійсь частині випадків. Про такі події, які часом трапляються, а часом ні, кажуть, що вони залежать від випадку, мають випадковий характер. Те, що кульку було знайдено при пошуках, саме є такою випадковою подією.

З подібними задачами доводиться стикатися не тільки Томові Сойєру. Життя сповнене випадковостей. Випадковою виявляється погода: неможливо заздалегідь з цілковитою точністю передбачити, якою вона буде не те що завтра, а й за півгодини. Від випадку залежить і процент браку на заводі, урожай фруктів наступного року, кількість півників та курочок на птахофабриці.

Чи можна знайти правильне рішення там, де багато що залежить від випадку? Виявляється, можна. Про це з часом у нас піде окрема розмова.

А поки що ознайомимося ще з однією життєвою задачею, не схожою на ті, з якими ми досі мали справу.

«ЗАПОРОЖЕЦЬ» НА РОЗДОРІЖЖІ

Цю історію розповів мені один з моїх друзів, завзятий автолюбитель.

«Після довгої дороги я спинив свій укритий курявою «Запорожець» на перехресті доріг. Тут шосе розгалужувалося, і я вирішив спитати в когось, як їхати далі, до мети моєї подорожі. Мені пощастило. Поряд було троє робітників-шляховиків.

— Поїдеш прямо,— впевнено сказав один.— Дорога хороша, за годину будеш на місці.

— Прямо не можна,— заперечив другий.— Дорогу розмило, їхати нею годин п'ять доведеться.

— Таке скажеш,— не погодився перший.— Розмити розмило, а давно відремонтували. Тепер вона як новенька. Тримай прямо, не пожалкуєш. Година — і там.

— Дорога, звичайно, розмита,— втрутився у розмову третій,— але є об'їзд. Це забере години чотири.

Думки різко розійшлися.

Щодо мене, то я в цю мить дуже скидався на героя прадавньої казки, якого російський живописець Віктор Михайлович Васнецов зобразив на картині «Витязь на роздоріжжі».

Мене, як і витязя, мучила проблема: «Куди податися?» З одного боку — більшість голосів за те, що пряму дорогу розмито, з другого — надто вже довго об'їжджати.

Чи не ризикнути все-таки і поїхати напрямки?

Задача була не легка: обрати одне з двох можливих рішень у непевній ситуації майже наосліп.

І я зважився — не стовбичити ж мені на перехресті. Змірку-

вав я дуже просто: оскільки більшість за те, що основну доро[
розмило, отже — об'їзд. Чи правильне моє рішення?»

Облишмо поки що запитання нашого автовитязя без відп[
віді. Адже ми самі ще не навчилися приймати рішення за н[
певних обставин.

Рішення за непевних обставин, або, як кажуть, за умов н[
визначеності, в житті доводиться приймати досить часто. Ку[
частіше, ніж здається. Невизначеність виникає щоразу, ко[
доводиться діяти, не знаючи, до яких результатів це мож[
призвести.

Необхідність у таких рішеннях з'являється звичайно в т[
випадках, коли нашим діям хтось чи щось перешкоджає, ст[
на заваді; до того ж, ми напевно не знаємо, чого від цієї пер[
шкоди слід чекати. За таких умов доводиться ризикувати.

Люди змушені це робити, приймаючи важливі рішення, са[
в тих випадках, коли не мають певних даних про обстанов[
а просто сидіти й вичікувати не можна. Якби їм усе було яс[
від початку, ніякої непевності не було б і потреба ризикува[
відпала б сама по собі.

От, виявляється, куди веде нас прадавня казка про витяз[
на роздоріжжі. Казка, якої, нагадую, не закінчено. І ми нео[
мінно до неї ще повернемося.

Остання обставина дає нам можливість зробити невелик[
зупинку, не побоюючись, що читачі розбіжаться.

Зупинка необхідна нам для того, щоб розібратися у всіх з[
дачах, з якими ми щойно ознайомилися, зрозуміти, яку рол[
відіграють вони у житті і намітити план, як діяти далі.

НАУКА ПЕРЕМАГАТИ

У житті доводиться розв'язувати найрізноманітніші зада[
Ми щойно в цьому переконалися.

Складність полягає в тому, що кожна з цих задач потреб[
свого особливого розв'язку. Те, що допомогло Томові Сойє[
знайти кульку, не допоможе ракеті знайти ціль. Вибір «іти чер[
перехрестя» дуже відрізняється від того вибору, який має зр[
бити водій «Запорожця».

Коли в школі задають математичну задачу, як правило, за[
жди відомо, з якого вона предмету: з алгебри, геометрії [
тригонометрії. Це, звичайно, полегшує справу. Кожний предм[
має свої способи розв'язань, свої правила.

Розв'язання задач, якими займається дослідження операц[
теж належать до кількох різних предметів. Їх, правда, у шко[
ще не вивчають.

«Кожний воїн повинен розуміти свій маневр»,— писав великий російський полководець Олександр Васильович Суворов у своїй славетній книзі «Наука перемагати».

Розуміння маневру, як ми переконалися, допомогло співробітникам карного розшуку впіймати злочинця, а ракетникам — збити ворожий літак.

Уміння маневрувати необхідне також капітанам і пілотам, розвідникам і космонавтам. Одне слово, усім тим, кому доводиться мати справу з пересуванням різних об'єктів «на землі, в небесах і на морі».

Про те, як дослідження операцій розв'язує подібні задачі, йтиметься в третьому розділі цієї книжки.

Трудівники нашої країни виробляють і перевозять величезні матеріальні цінності: паливо й метал, верстати й машини, продукти харчування, одяг і взуття. (Пригадуєте розділ «Шляхи, які ми вибираємо»?) Як краще спланувати цю роботу? Адже від хорошого плану багато в чому залежить примноження народного багатства. Як найкраще спланувати виробництво, визначити найвигідніший спосіб перевезень? Як правильно й ощадливо розкроїти тканину чи метал?

Складання, вибір найкращого плану виробництва, перевезень, торгівлі, розкрою матеріалів у дослідженні операцій — коло питань математичного планування, з яким ми ознайомимося в четвертому розділі.

Агрономи, інженери, біологи і навіть мовознавці мають справу з явищами, які залежать від випадковостей. Ніхто наперед не може точно сказати, яка буде погода під час жнив, які деталі і в якій кількості виявляться бракованими, хто вилупиться з яйця на колгоспній птахофермі: півник чи курочка.

Щоб давати раду в цих випадкових явищах, від яких залежить виконання наших планів, уміти обирати правильні рішення, не боячись ніяких несподіванок, слід оволодіти ще одним важливим предметом, що входить у дослідження операцій,— теорією ймовірностей. Ця таємнича й незвична теорія змусила автора написати аж три розділи — п'ятий, шостий і сьомий.

А от рибалкам, китобоям, розвідникам і прикордонникам часто доводиться вести пошук. Як краще й швидше шукати китів і морські міни, як правильно вести спостереження на кордоні? На ці запитання відповідає восьмий розділ.

І нарешті, ще один предмет з дещо легковажним заголовком: теорія ігор. Насправді все тут надто серйозно. Лікарю часом буває неясно, як сприйме організм хворого нові ліки. Передбачаючи погоду, синоптик інколи не має всіх необхідних даних про стан атмосфери. Воєначальник, як правило, не має точних

відомостей про те, що замислив ворог. Усім їм, як і геро(
прадавньої казки — витязю на роздоріжжі, доводиться прийм
ти рішення за непевних обставин.

Теорія ігор саме й розв'язує такі задачі. Про неї — дев'ят
розділ.

Такий наш короткий путівник по молодій науці «досліджен
операцій», якій дуже пасує суворовська назва: «наука пер
магати».

За нашим путівником передусім ознайомимося з маневр
ванням.

Розділ 3

ПОЧНІМО МАНЕВРУВАННЯ,

в якому відбувається зустріч у космосі, уникнуто зіткнення в морі, ведеться розвідка і торпедний катер під вогнем ворога іде в атаку

ЗУСТРІЧ У КОСМОСІ

Командир космічного корабля одержав сигнал, якого чек
уже давно: наблизитись до орбітальної станції, провести стик
вання і перебратися на її борт для подальшої роботи.

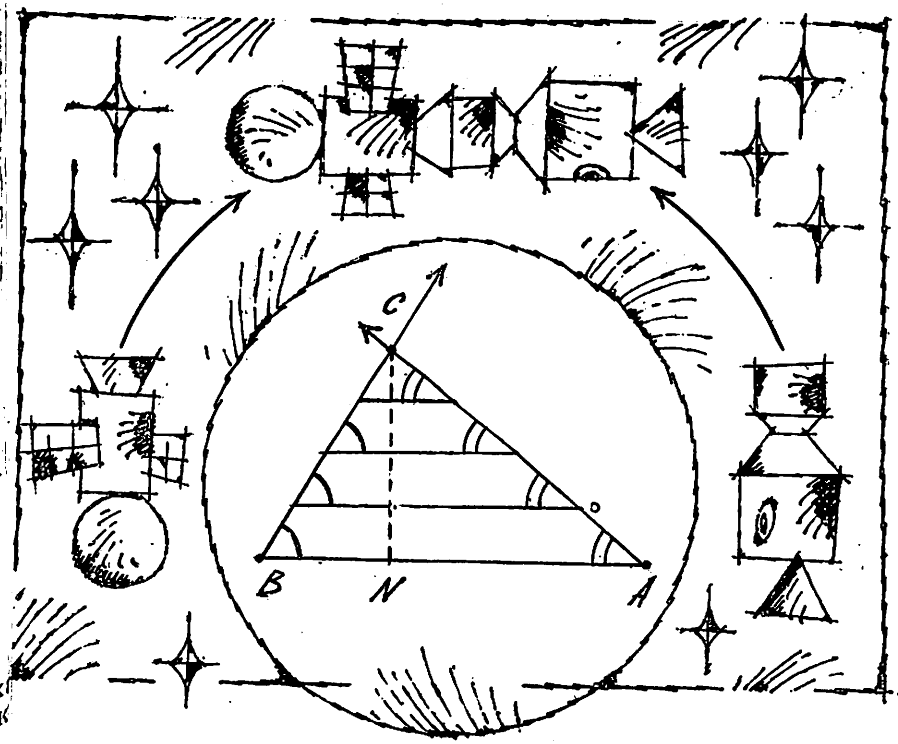
Орбітальна станція — справжній летючий острів — мчи
у навколоземному просторі з немислимою швидкістю — шіс
кілометрів на секунду. Іще стрімкіший політ космічного кора
ля, що може маневрувати із швидкістю до восьми кілометр
на секунду.

Перша задача, яку треба розв'язати космонавтам,— провес
так зване м'яке зближення. При цьому швидкість кораб
в міру скорочення відстані поступово вирівнюється із швидкіст
станції, з таким розрахунком, щоб у момент повного зближен
бути з нею однаковою. Саме тоді й відбувається стикуван
Адже коли корабель і станція рухаються поряд з однаков
швидкістю, то вони один щодо одного непорушні.

Космічні об'єкти, заодно й наш корабель і орбітальна ста
ція, рухаються по складних траєкторіях, за законами небесн
механіки.

Строгий розрахунок м'якого зближення складний і нам по
що не під силу.

Тому розглянемо лише грубу модель цієї цікавої задачі. Вв
жатимемо, що обидва наші об'єкти — корабель і станція



рухаються по прямих лініях з постійними швидкостями. Умовимося також, що командир космічного корабля розраховує спочатку повне зближення з орбітальною станцією на повній швидкості, а вже потім, десь на підході, гасить швидкість до необхідної величини.

Отже, треба провести маневр повного зближення (як то кажуть, зближення впритул) космічного корабля A (швидкість 8 кілометрів на секунду) з орбітальною станцією B (швидкість 6 кілометрів на секунду). Вважатимемо, що в початковий момент корабель перебуває під кутом 60° щодо курсу станції (цей кут називається курсовим кутом), на відстані від неї 1000 кілометрів.

Що означає розрахувати зближення впритул? Ми вже розв'язували подібні задачі спочатку разом з міліцією, а потім із зенітниками і знаємо, що передусім треба встановити напрямок, який веде до зближення. Для цього необхідно знати кут випередження.

Міліції й зенітникам пощастило: при розрахунках кута випередження вони мали справу з прямокутними трикутниками і задача розв'язувалася досить просто. А от командирові космічного корабля доведеться пошукати куди складніше розв'язання. Тут трикутник ABC не прямокутний, і треба виявити кмітливість.

Міркувати слід так. Уявімо, що зближення впритул уже відбулося, і наші космічні об'єкти зустрілися в точці C. Та це означає, що шлях космічного корабля до точки зустрічі (AC) дорівнює добуткові швидкості цього корабля на час зближення, а шлях орбітальної станції до точки зустрічі (BC) дорівнює добуткові швидкості орбітальної станції на час зближення.

Тепер згадаймо теорему синусів із тригонометрії: синуси кутів трикутника відносяться як протилежні до цих кутів сторони. У нашій задачі це означає, що

$$\frac{\sin \text{кута випередження}}{\sin \text{курсового кута}} = \frac{\text{швидкість орбітальної станції} \times \text{час зближення}}{\text{швидкість космічного корабля} \times \text{час зближення}}.$$

Час зближення, на щастя, взаємно скорочується, і ми одержуємо досить просту формулу для розрахунку кута випередження:

$$\sin \text{кута випередження} = \frac{\text{швидкість орбітальної станції}}{\text{швидкість космічного корабля}} \times \sin \text{курсового кута}.$$

Підставимо цифри і зробимо обчислення:

$$\sin \text{кута випередження} = \frac{6}{8} \sin 60° = \frac{6}{8} \times 0{,}866 = 0{,}650.$$

По таблицях синусів знайдемо: кут випередження дорівнює 40,5°.

Наша формула годиться для розв'язання будь-якого трикутника, а отже — і для будь-якого випадку зближення впритул.

Перевіримо тепер, чи правильно було розраховано кути випередження в задачах про переслідування бандита і стрільбу ракетою по ворожому літаку.

Спочатку визначимо кут випередження для того, щоб перестріти бандита на шосе:

$$\sin \text{кута випередження} = \frac{60}{120} \sin 90° = 0{,}5 \times 1{,}0 = 0{,}5,$$

а сам кут випередження дорівнює 30°.

А ось чому дорівнює згідно з нашою формулою кут випередження зенітної ракети:

$$\sin \text{кута випередження} = \frac{707}{1000} \sin 90° = 0{,}707 \times 1{,}0 = 0{,}707,$$

а сам кут випередження дорівнює 45°.

Отже, помилок не було.

Найцікавіше в усіх цих розрахунках те, що кут випередження зовсім не залежить од відстані між тими, хто зближується. А раз так, то, виходить, цей кут від початку до кінця маневру не змінюється. Тому, як показано на малюнку, напрям космічного корабля на орбітальну станцію весь час залишається постійним.

Окрім напрямку зближення, командирові космічного корабля доводиться розв'язувати ще одну задачу: скільки треба часу для того, щоб підійти до станції впритул? Або коротше — яка тривалість маневру?

Відповісти на це питання нам допоможуть два трикутники: BCN і ACN.

Сторони цих трикутників BN і NA в сумі дорівнюють початковій відстані BA:

$$\text{початкова відстань} = BN + NA.$$

BN шукаємо в трикутнику BCN:

$$BN = \text{швидкість орбітальної станції} \times \text{час зближення} \times \cos \text{курсового кута}.$$

AN виводимо з трикутника ACN:

$$AN = \text{швидкість космічного корабля} \times \text{час зближення} \times \cos \text{кута випередження}.$$

Тепер, знаючи, чому дорівнюють доданки, можна написати:

$$\text{початкова відстань} = BN + NA = \text{швидкість орбітальної станції} \times \text{час зближення} \times \cos \text{курсового кута} + \text{швидкість космічного корабля} \times \text{час зближення} \times \cos \text{кута випередження}.$$

З цього випливає, що час зближення, який нас цікавить, дорівнює:

$$\frac{\text{початкова відстань}}{\text{швидкість о.с.} \times \cos \text{курс. кута} + \text{швидкість к.к.} \times \cos \text{кута вип.}}.$$

Підставимо числа.

$$\text{Час зближення} = \frac{1000}{6 \cdot \cos 60° + 8 \cdot \cos 40{,}5°} = \frac{1000}{6 \cdot 0{,}5 + 8 \cdot 0{,}758} \doteq \frac{1000}{3{,}0 + 6{,}08} = \frac{1000}{9{,}08} = 110 \text{ сек.}$$

Отож приблизно через дві хвилини космічний корабель, подолавши колосальну, як на земні уявлення, відстань у 1000 кілометрів, підійде впритул до станції. Своєчасне гальмування, м'яке зближення, стикування — і от уже космонавтів зустрічають на борту орбітальної станції. Можна рапортувати на Землю про те, що завдання виконано.

З задачею зближення впритул, яку ми щойно засвоїли, нас чекає попереду ще одна зустріч. Цього разу — в тумані.

ПОЄДИНОК У ТУМАНІ

Лейтенант Карелін заступив на ходову вахту о 4.00. Есмінець ішов відкритим морем. Курс 90°, хід повний — 28 вузлів[1]. Видимість гарна. Штиль.

О 5.00 командир корабля зійшов у каюту відпочити. Його змінив старший помічник, який зручно вмостився у кріслі на правому крилі містка.

Спочатку Карелін не збагнув, що сталося. Ще кілька хвилин тому в світанковій імлі то зліва, то справа з'являлися й зникали вогні зустрічних суден. І от цих вогнів нема. Навкруги поспіль молочна завіса. Корабель увійшов у смугу густого туману.

Передусім — скинути швидкість. Обидві ручки машинного телеграфа переведено на малий хід. Швидкість по лагу впала до 14 вузлів. Команда сигнальникам: «Розпочати подачу сигналів туману». Наказ радіометристам: «Увімкнути навігаційний радіолокатор».

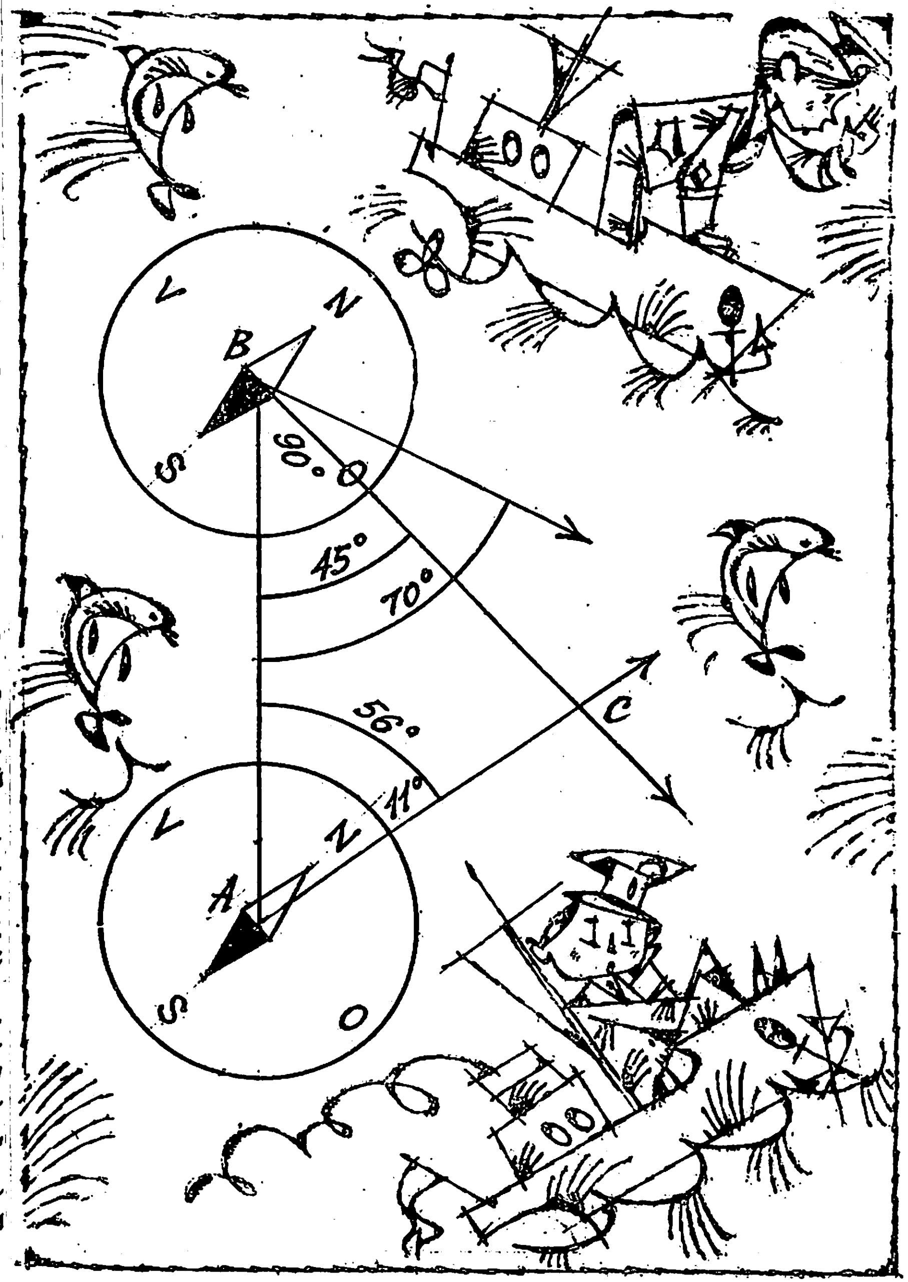
На затемненому екрані, схожому на екран телевізора, характерні рисочки — позначки від безлічі суден, що в різних напрямках ідуть у тумані своїми маршрутами. Можна спокійно пливти далі... Якби тільки не одна незначна на перший погляд обставина: напрямок на одну з рисочок залишається увесь час незмінним.

На щастя, Карелін добре знав, що віщує така незмінність. Це сигнал про те, що відбувається зближення впритул. Можливе зіткнення! Якесь судно, не зважаючи на сигнали туману (нині радіолокатори є на кожному кораблі), іде на вірну загибель. Ще кілька хвилин — і гострий ніс есмінця, як ніж у масло, вженеться в борт судна легковажного мореплавця.

А може?.. Карелін чував про те, що капіталісти-судновласники інколи умисно влаштовують зіткнення суден, аби одержати

---

[1] Вузол — міра швидкості суден. Дорівнює 1 милі (1,852 км) на годину.



за свою стару, проіржавілу посудину солідну страхову винагороду.

Лейтенант віддав кілька коротких команд. На постах корабля почалася швидка й чітка робота. Вже за хвилину після появи небезпечного об'єкта бойовий інформаційний пост доповів: «Курс цілі 11 градусів, швидкість 10 вузлів». Визначити ці цифри було досить просто. За даними радіолокатора місце судна наноситься на карту. Так дістають одну точку. Потім, через хвилину, так само — другу. Напрям з першої точки на другу і є курс судна.

Шлях судна між точками, поділений на час ходу від першої точки до другої, дає швидкість. У нашому випадку шлях судна за 1 хвилину дорівнював приблизно 310 метрам.

$$\text{Швидкість судна} = \frac{310}{1} = 310 \text{ метрів на хвилину} = 18{,}5 \text{ кілометра на годину (10 вузлів).}$$

Тим часом штурман малював на карті схему дій корабля й судна в тумані. Ось у верхній частині малюнка есмінець. Він іде курсом 90 градусів (бачите позначку курсу на шкалі компаса?). У нижній частині малюнка під курсовим кутом 45 градусів до курсу есмінця на відстані трьох кілометрів судно, що йде на зіткнення курсом 11 градусів. Видно, що напрям на нього увесь час залишається постійним.

Вахтовий офіцер розрахував кут випередження судна, який веде до зближення впритул, за тією ж формулою, що її свого часу використав командир космічного корабля:

$$\text{кут випередження} = \frac{\text{швидкість есмінця}}{\text{швидкість судна}} \times \sin \text{курсового кута} = \frac{14}{12} \sin 45° = 1{,}16 \times 0{,}71 = 0{,}825.$$

Кут випередження дорівнює 56 градусів.

Погляньте на шкалу компаса в судна. Між його курсом і напрямком на есмінець справді 56 градусів. Отож тривога лейтенанта не була марною. І часу залишилося обмаль. Ось знайома формула:

$$\text{Час зближення} = \frac{\text{початкова відстань}}{\text{швидкість есмінця} \cos \text{кур. кута} + \text{швидкість судна} \times \cos \text{кута виперед.}} = \frac{3}{26 \times 0{,}71 + 18{,}5 \times 0{,}56} = \frac{3}{18{,}5 + 10{,}4} = \frac{3}{28{,}9} = 0{,}1 \text{ години} = 6 \text{ хвилин.}$$

Це шість хвилин — і...

Лунає команда стерновому: «Ліво на борт, курс сімдесят градусів!»

Лейтенант Карелін вирішив так ось чому.

Йому необхідно було повернути корабель на безпечний курс. Цей курс має бути таким, щоб судно ні за яких обставин не могло зблизитися з есмінцем упритул. Можна, звичайно, просто повернутися до судна і, скориставшись перевагою в швидкості (14 вузлів проти 12), випередити. Та чи варто так відхилятися від власного курсу, адже не можна забувати й про завдання, яке виконує корабель. Чи нема кращого рішення?

І Карелін краще рішення знайшов. Спробуймо зробити це й ми. Придивімося до формули кута випередження:

$$\sin \text{кута випередження} = \frac{\text{швидкість есмінця}}{\text{швидкість судна}} \times \sin \text{курсового кута.}$$

А що, коли зробити цей кут випередження, який веде до зіткнення, неможливим? Знову пригадаймо тригонометрію. Синус досягає свого найбільш можливого значення, одиниці, при куті 90 градусів. І більшим ні за яких обставин стати не може. Поміркуймо, як зробити, щоб у першій частині формули з'явилася одиниця, а зліва — відповідний їй найбільший кут випередження 90 градусів. Для цього досить, щоб синус курсового кута дорівнював:

$$\sin \text{курсового кута} = \frac{\text{швидкість судна}}{\text{швидкість есмінця}}.$$

Тоді формула кута випередження стане такою, яка нам потрібна:

$$\sin \text{кута випередження} = \frac{\text{швидкість есмінця}}{\text{швидкість судна}} \times \frac{\text{швидкість судна}}{\text{швидкість есмінця}} = 1$$

і кут випередження дорівнює 90 градусів, тобто найбільшому можливому значенню.

Чому ж дорівнює той жаданий курсовий кут, при якому це відбувається? Формулу ми вже вивели, тепер підставимо цифри:

$$\sin \text{курсового кута} = \frac{\text{швидкість судна}}{\text{швидкість есмінця}} = \frac{12}{14} = 0{,}857,$$

а сам курсовий кут дорівнює 60 градусів.

Тепер, якщо есмінець збочить від судна так, що воно опиниться в нього на курсовому куті, більшому як 60 градусів, то подальше збільшення кута випередження стане неможливим і, отже, зближення впритул не буде, що б судно не робило. Ось звідки взявся курс есмінця 70 градусів. Адже при ньому курсовий кут=65°=60°+5°, тобто трохи більше розрахункової величини. Все це видно з малюнка. Вихід із критичного становища знайдено.

До речі, цей найбільший курсовий кут, при якому ще можливе зближення впритул, так і називається: критичний курсовий кут.

Весь епізод забрав не більше часу, ніж знадобилося читачеві, щоб дізнатися про нього.

«5.47. Збочили на курс 70°. Ухилилися від зближення впритул із невідомим судном»,— записав Карелін у вахтовий журнал.

Не завжди, проте, маневр потрібен лише для того, щоб зблизитися впритул або уникнути такого зближення.

МАНЕВР РОЗВІДНИКІВ

...Розвідники висунули голови з густих чагарів і приготували біноклі. На шосе з'явилася колона ворожої піхоти.

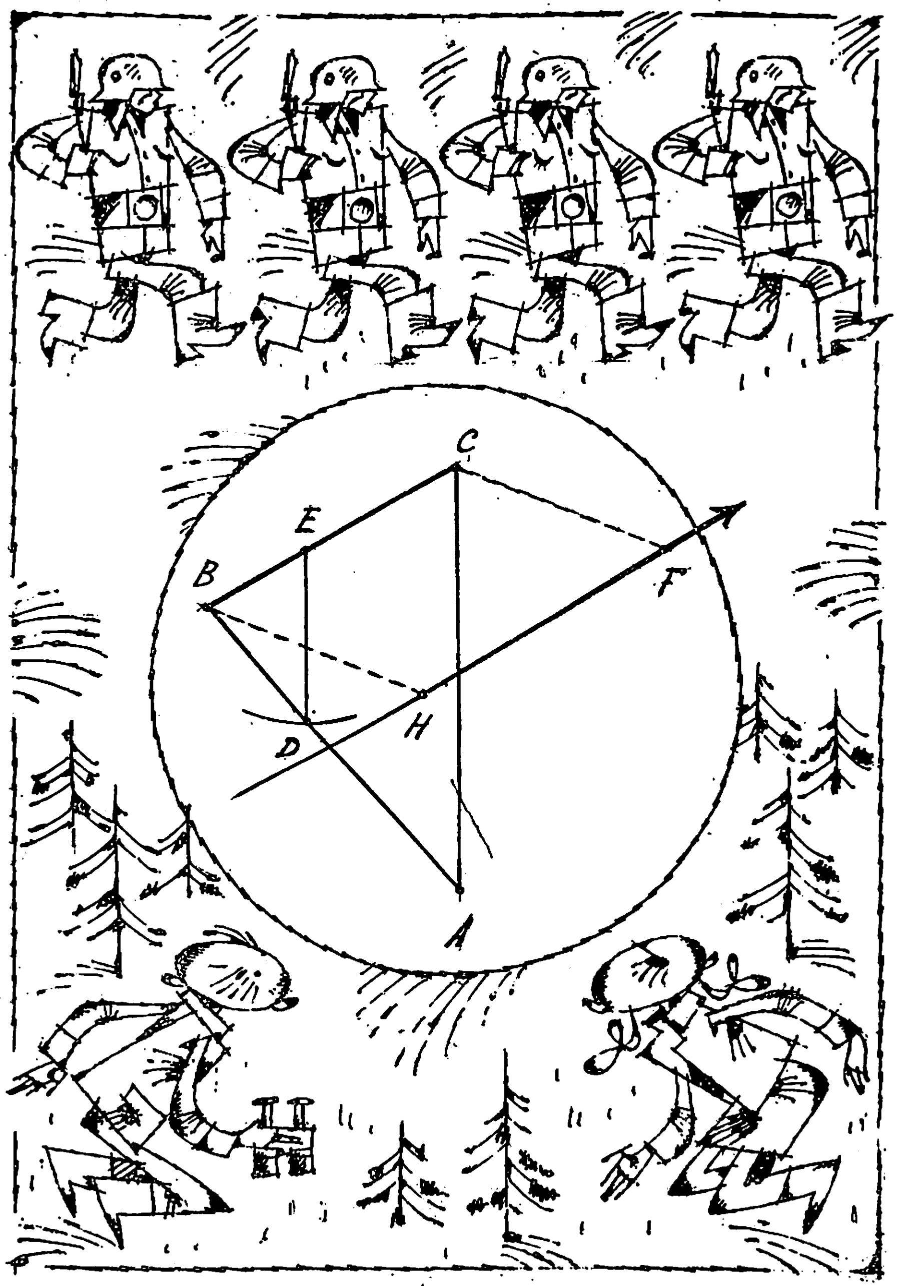
Та простежити за колоною, заради чого й велася розвідка, не вдалося. Перешкодило сонце, яке, наче навмисно, вийшло з-за хмар і світило прямо в вічі. Крім того, можна було в будь-яку хвилину чекати, що ворог помітить сонячні спалахи на лінзах біноклів, і тоді розвідці кінець.

— Без маневру не обійтися.— Командир розвідників розгорнув планшет. Розрахунок тривав кілька хвилин.

Спочатку командир визначив на карті положення розвідників (точка A) і колони (точка H) на момент її виявлення. Після цього він позначив позицію, яку слід було б обрати розвідникам, щоб сонце не било в очі (точка B). Ця позиція, очевидно, має бути по той бік шосе — тоді сонце опиниться за спиною у спостерігачів і не заважатиме їм.

На жаль, обране для позиції місце в точці B було б хорошим лише в тому разі, якби колона не рухалася. Але ж вона не стоїть на місці. Як діяти? Командир розвідників замислився. Хід його думок був приблизно такий. Позиція B найкраща для спостереження за колоною. Отже, можна вважати, що ця позиція (вона називається умовною) рухається разом з колоною паралельним до неї курсом. І швидкість умовної позиції повинна дорівнювати швидкості колони.

Відкладемо швидкість колони в будь-якому масштабі від точки B у напрямку її руху і одержимо точку E. Тепер з точки E, наче з центра, проведемо дугу кола радіусом, що дорівнює



швидкості руху розвідників, взятому в тому ж масштабі, що й швидкість колони. Там, де дуга перетне лінію AB, позначимо точку D. Напрям DE і дасть потрібний курс: розвідники повинні йти по AC паралельно до DE.

У точці C, на продовженні BE, можна починати спостереження. Це і є та позиція, яка потрібна розвідникам. Справді, колона на цей час буде уже в новому місці — у точці F, і розвідники опиняться щодо неї в зручному для спостереження положенні.

Тепер можна перевірити себе, чи не припустилися ми помилки. Трикутники ABC і DBE подібні. Адже лінія AC проведена паралельно до DE. А в подібних трикутниках сторони повинні бути пропорційними. Чи так це? Перевіримо.

Повинно бути:

$$\frac{AC}{DE} = \frac{BC}{BE}.$$

Підставимо всі значення. Завважимо, що AC — швидкість розвідників, помножена на час маневру; $BCFH$ — паралелограм.

Тому $BC = FH =$ швидкість колони, помножена на час маневру.

Щодо DE і BE, то вони дорівнюють швидкостям розвідників (DE) й колони (BE).

Підставимо всі ці значення в пропорцію й одержимо:

$$\frac{\text{швидкість розвідників} \times \text{час маневру}}{\text{швидкість розвідників}} = \frac{\text{швидкість колони} \times \text{час маневру}}{\text{швидкість колони}}.$$

Пропорція правильна, отже, правильний і її розрахунок.

Командир намітив шлях по компасу, поглянув на годинник і тихо скомандував: «Уперед!» Маневр почався.

Незабаром розвідники безшумно перетнули шосе. Ще кілька обережних перебіжок. Командир навперемінно поглядав то на компас, то на годинник, немов чаклував. Кілька разів він спинявся і, затуляючи долонею очі, дивився у бік сонця. Нарешті подав сигнал: «Ми в позиції. Почати спостереження».

Коли завдання було виконано і розвідники розташувалися на відпочинок перед зворотною дорогою, хтось спитав командира:

— А як ви визначили, що ми вже прийшли на потрібне місце? До чого тут годинник, компас і тим паче — сонце?

— Це було неважко зробити,— відповів командир.— Я виміряв по карті відстань AB, поділив її на нашу швидкість — це й був час маневру. Лишалося тільки стежити за годинником. Щоправда, про всяк випадок я перевірив себе ще й по сонцю.

Напрямок на нього по компасу виявився таким же, як було встановлено заздалегідь.

Метою маневру розвідників була зміна місця, позиції щодо ворога, який пересувається.

До такого маневрування часто вдаються на війні, щоб створити найкращі умови для спостереження за супротивником чи для застосування зброї.

Неперевершеними майстрами маневру були видатні російські полководці Суворов і Кутузов, уславлені флотоводці Ушаков і Нахімов, полководці ленінської школи Фрунзе і Чапаєв.

Військове маневрування не втратило свого значення і в наші дні.

Ознайомимося з однією сучасною задачею бойового маневрування.

АТАКА ПІД ВОГНЕМ

Торпедний катер наближався до цілі. Величезний, як гора, авіаносець, люто захлинаючись від залпів автоматичних гармат, ставив на його шляху білі стовпи вибухів.

Відстань до цілі швидко скорочувалась, і дедалі важче було стримувати коротке й грізне слово, що давно ладне було зірватися з язика.

«Залп!» прозвучало як «Ура!», як виклик велетенській, неповороткій сталевій туші, на яку посипалися смертоносні торпеди.

«Вправу закінчено. Ціль знищено». Ігорю Валуєву здалося, що ці слова інструктора, вимовлені буденним тоном, долинули з якогось іншого світу. Світу, де замість авіаносця й торпедного катера — макети, замість моря — голубий екран учбового приладу, а замість підступного ворога — інструктор Олексій Якович, який зовсім не підступний і аж ніяк, звичайно, не ворог.

— Курсант Валуєв, повідомте ваші розрахунки атаки. Тільки, будь ласка, без лірики.

Лірикою Олексій Якович називає усе, що безпосередньо не стосується стрільби торпедами.

— Доповідає командир торпедного катера номер тридцять п'ять курсант Валуєв. Атакував ворожий авіаносець торпедами. До точки залпу наближався повним ходом. Під час атаки авіаносець вів безперебійний вогонь по катеру. Діставшись до точки залпу...

— Товаришу Валуєв, не поспішайте. Поясніть, як ви розраховували маневр зближення з авіаносцем.

— Атака йшла під вогнем, тому головна мета маневру полягала в тому, щоб якнайшвидше підійти до авіаносця на відстань, з якої катер може успішно стріляти. Суть мого рішення ось у чому.— Ігор підійшов до дошки і взяв крейду.— Почнемо розв'язувати задачу з кінця. У момент залпу катер повинен піддійти до авіаносця на відстань, що дорівнює дальності залпу торпедами. Позначимо літерою A положення катера в момент залпу. Вийти на дальність залпу катер може з точки C різними курсами. Котрийсь із них найкоротший — його й треба визначити. Для цього опишемо з точки A дугу *ав* радіусом, що дорівнює дальності стрільби торпедами. Щоб зробити залп, катеру треба опинитися на цій дузі. На дугу *ав* можна потрапити з точки C кількома курсами, наприклад Cy, Cy_1, Cy_2.

На малюнку добре видно, що найкоротший з усіх можливих курсів буде курс Cy, який лежить у самісіньку точку A.

Отже, я вирішив іти найкоротшим шляхом — курсом Cy. Т[а] як його розрахувати? Адже ми почали розв'язувати задачу з кінця. В початковий момент авіаносець перебував зовсім не у точці A, а в точці H. Якби треба було обрати якусь позицію, я зробив би це без труднощів: спочатку знайшов би позицію умовну, а вже потім ту, яка потрібна. Як це зробити, я знав. І я подумав: а що, коли й тут знайти умовну позицію? Так я і вчинив. Я уявив собі, що катер не зупинився в точці y, а пі[шов] де далі, в точку A. На шлях із точки y в точку A потрібен час T, який легко розрахувати:

$$T = \frac{\text{дальність стрільби}}{\text{швидкість катера}}.$$

На момент приходу катера в точку A авіаносець устигне прийти в точку B, пройшовши відстань AB за той же час T.

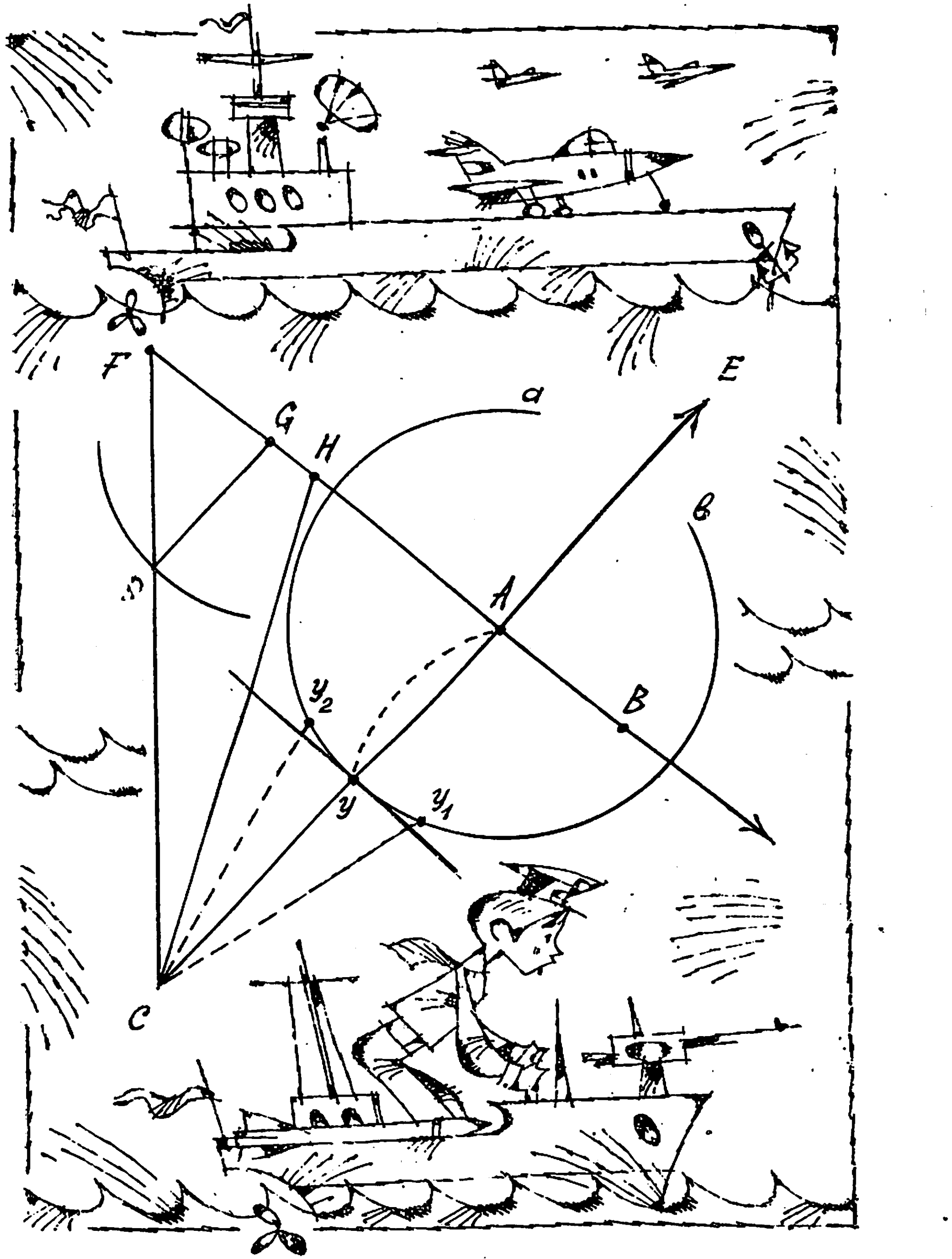
Відстань AB позначимо для зручності літерою x і поміркуємо, чому вона дорівнюватиме. Напевне:

$$x = \text{швидкість авіаносця} \times T.$$

Чому дорівнює T, ми вже знаємо, тому:

$$x = \text{швидкість авіаносця} \times \frac{\text{дальність стрільби}}{\text{швидкість катера}}.$$

І, нарешті, найважливіше. Якщо ми тепер намітимо позаду початкового положення авіаносця у відстані x умовну позицію і почнемо наближатися до неї впритул, то в кінці маневру катер повинен опинитися якраз у точці A, а авіаносець — у точці B. Іншими словами: так визначається потрібний курс атаки.



Ідучи цим курсом в атаку, катер, звичайно, не піде далі точки y — в ній він дасть залп по авіаносцю. Авіаносець, як ми знаємо, в момент залпу буде в точці A.

Отже, коротко порядок розрахунку.

1. З'єднати місце катера й авіаносця на початку атаки; одержимо лінію CH.

2. Відкласти від точки H назад по курсу авіаносця відстань x; одержимо умовну позицію — точку F.

3. Розрахувати зближення з умовною позицією впритул. Для цього спочатку відкласти від точки F стрілку FG — швидкість авіаносця по його курсу, а після цього з кінця стрілки швидкістю катера зробити засічку лінії CF. Одержимо точку D.

4. Провести з точки C лінію CE, паралельну до DG; одержимо точку A і курс атаки торпедного катера.

5. Відкласти з точки A по курсу атаки в напрямку на точку C дальність стрільби торпедами; одержимо точку залпу y.

Курсант Валуєв доповідати скінчив!

Олексій Якович і всі курсанти уважно слухали Ігоря. Коли він замовк, інструктор сказав:

— Розрахунки зроблені правильно. Рішення істинне. І що характерно, це найкраще рішення з усіх можливих.

Справді, як ми пригадуємо, Ігор вибрав із багатьох курсів, що вели до зближення з ціллю на дальність залпу, той єдиний курс, який дав змогу зробити це якнайшвидше.

Тим часом, як ми пригадуємо, в більшості задач на маневрування одержані рішення є єдино можливими. Визначені нами раніше шляхи міліції й ракети, космічного корабля і розвідників не давали ніякого вибору.

Інших шляхів, що ведуть до розв'язання цієї задачі, просто не було.

Розрахований Ігорем курс одержано внаслідок вибору одного з багатьох шляхів. Того, який привів торпедний катер на дальність залпу в найкоротший строк.

Подібні задачі, пов'язані з вибором найкращого плану дій з усіх можливих, доводиться розв'язувати, звичайно, не лише при бойовому маневруванні. Вони мають велике значення для складання найдоцільніших планів перевезень, виробництва, торгівлі.

Ці задачі, як ми вже знаємо, вивчає спеціальний предмет дослідження операцій — математичне планування.

Розділ 4

ЧУДЕСА РОЗУМНОГО ПЛАНУ,

з якого читач дізнається, що правильний вибір маршруту до кінотеатру може допомогти ще раз сходити в кіно, підказати, як збудувати ще одну школу, і навіть викроїти цілий автомобіль

ЯК ЩЕ РАЗ СХОДИТИ В КІНО?

Фільм був дуже цікавий, потрапити на нього було дуже важко. Та школярі все-таки змогли роздобути 100 квитків. Кепсько тільки, що квитки дісталися в різні кінотеатри: в «Родину» — 60 квитків і в «Максим» — 40.

Кому і в який кінотеатр їхати?

Жили школярі в різних районах міста: 50 — на Васильєвському острові, 30 — в Купчині і 20 — на Петроградській стороні.

Вирішили так: усі 50 васильєострівців поїдуть у «Родину», всі 30 купчинців — у «Максим», а петроградців розділили порівну — по 10 чоловік у кожний кінотеатр.

Подивилися кінофільм. Він усім сподобався.

Здавалося б, що в цій історії незвичайного?

А тим часом, правильно розподілити квитки далеко не так просто, як здається.

Хоч математика існує тисячоліття, опанували такі задачі люди зовсім недавно.

Подібні задачі саме й розв'язує математичне планування. Мета його — скласти план так, щоб результат був найкращим, а витрати — найменшими.

Найперше, що треба зробити, беручись складати план розподілу квитків з допомогою математичного планування,— це зобразити схему задачі. На схемі одразу видно, скільки школярів мешкає в кожному з трьох районів міста, а також скільки в них було квитків у той і другий кінотеатри. Видно також, як школярі розподілили квитки: райони міста і кінотеатри з'єднані прямими лініями — маршрутами. Цифри на лініях відповідають кількості школярів, що вирушили даним маршрутом.

Чи вдалий саме такий план розподілу квитків?

Подумаймо спершу, чого ж ми хочемо від цього плану, яку мету переслідує цей план. Нема сумніву, що комусь із школярів цей план був до вподоби, а комусь — ні.

Кожен мав свою мету: хтось хотів їхати ближче, хтось — далі. Декому кортіло в новий кінотеатр «Максим», а декому — в старий «Родину». Та всім, звичайно, хотілося потрапити в кіно.

А чи можна придумати такий план, щоб він годився для кожного, щоб усі визнали його правильним? Виявляється, можна.

Для цього, складаючи план, ми повинні керуватися єдиною спільною метою: скоротити витрати на дорогу до кінотеатру.

І, як ми побачимо, виявиться, що ці гроші можна було б і справді значно заощадити, якщо б школярі здогадалися правильно спланувати маршрути.

Складемо таблицю, з якої ми дізнаємося, скільки коштує проїзд на одного до кінотеатру й назад.

Район міста	Кінотеатр	
	«Родина»	«Максим»
Васильєвський острів	60 к.	12 к.
Купчино	10 к.	18 к.
Петроградська сторона	8 к.	6 к.

Користуючись таблицею і знаючи маршрути культпоходу, можна легко підрахувати, скільки коштував школярам проїзд. Для цього помножимо число школярів, які поїхали по кожному з маршрутів, на вартість проїзду в обидва кінці, а результати додамо.

Для маршруту Васильєвський острів — «Родина» витрати складуть 800 копійок (50 чоловік×16 копійок);

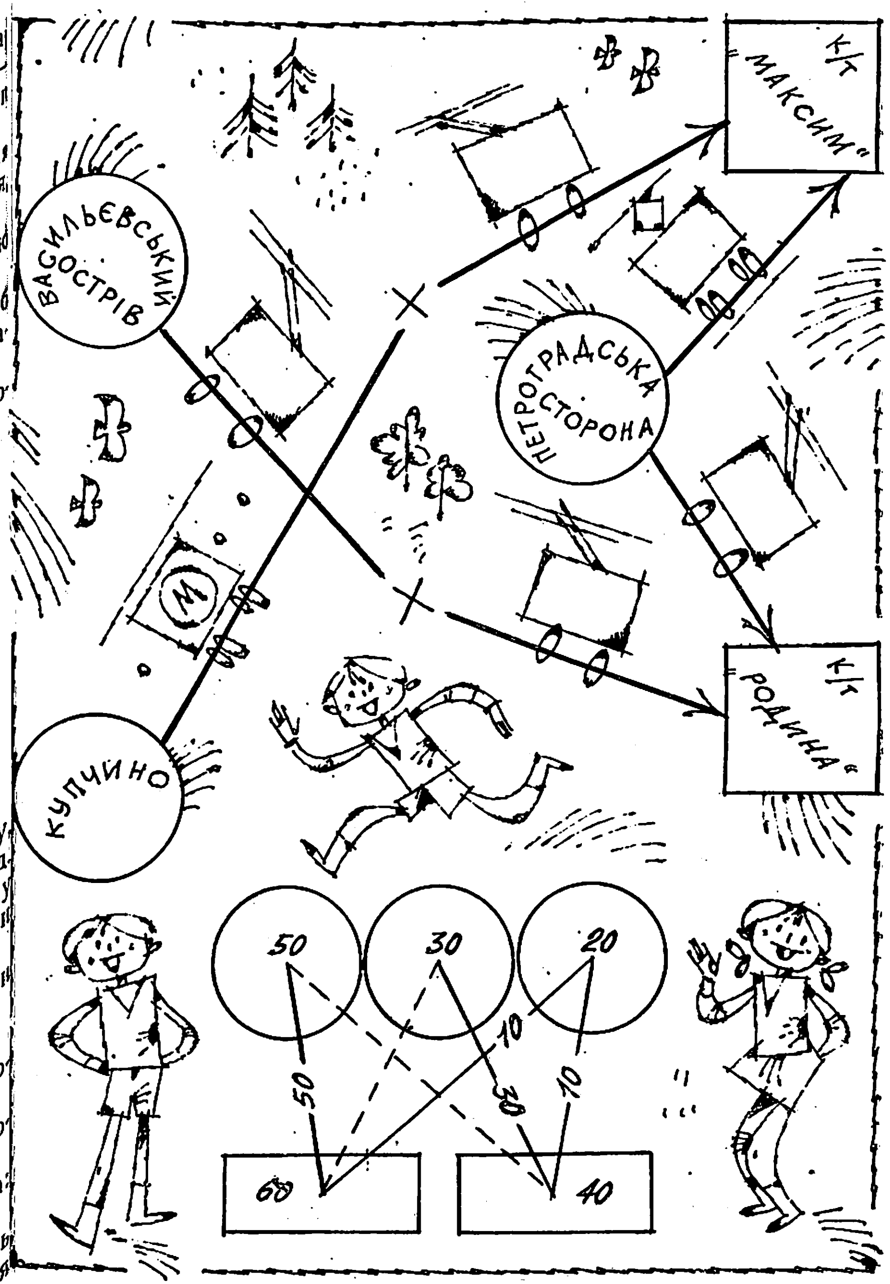
для маршруту Купчино — «Максим» 540 копійок;

для маршруту Петроградська сторона — «Родина» 80 копійок;

для маршруту Петроградська сторона — «Максим» 60 копійок.

Загальна витрата грошей на дорогу вийшла досить солідна: (80+540+80+60=1480 копійок=14 карбованців 80 копійок).

А чи не можна розробити якогось іншого плану, що дасть можливість усім побувати в кіно, але проїзд за ним обійдеться дешевше?



Переберемо навмання кілька різних маршрутів, підрахуєм витрати й зупинимося на плані, який ми умовно назвемо поліп шеним.

За цим планом 30 васильєострівців ідуть у «Родину» і 20 у «Максим», усі 30 купчинців — у «Родину», усі 20 петроград ців — у «Максим».

Підрахуємо дорожні витрати для поліпшеного плану:

для маршруту Васильєвський острів — «Родина» 480 коп йок;

для маршруту Васильєвський острів — «Максим» 240 коп йок;

для маршруту Купчино — «Родина» 300 копійок;

для маршруту Петроградська сторона — «Максим» 120 ко пійок.

Загальні видатки=480+240+300+120=1140 копійок=11 кар бованців 40 копійок.

Без особливих труднощів вдалося заощадити аж 3 карбован ці 40 копійок — майже четверту частину всіх грошей. Скільк ще разів можна сходити на них у кіно!

Найцікавіше, що цей поліпшений план, мабуть, не найліп ший з усіх можливих. Цілком імовірно, що є інші, куди кращ маршрути, і якщо знайти їх, план допоможе заощадити щ більше.

Тут є над чим поміркувати...

НА ДОПОМОГУ ПРИХОДИТЬ АЛГЕБРА

Запишемо умову нашої задачі мовою алгебри. Для цього по значимо літерою X кількість школярів, що їдуть якимось марш рутом. Наприклад, X вр — це число школярів, які їдуть із Ва сильєвського острова до кінотеатру «Родина» (вр — перші літер пунктів відправлення й прибуття).

Тепер умова, що звичайною мовою звучить так: «З п'ятдесят васильєострівців якась частина може їхати в «Родину» а якась — у «Максим»,— мовою алгебри запишеться:

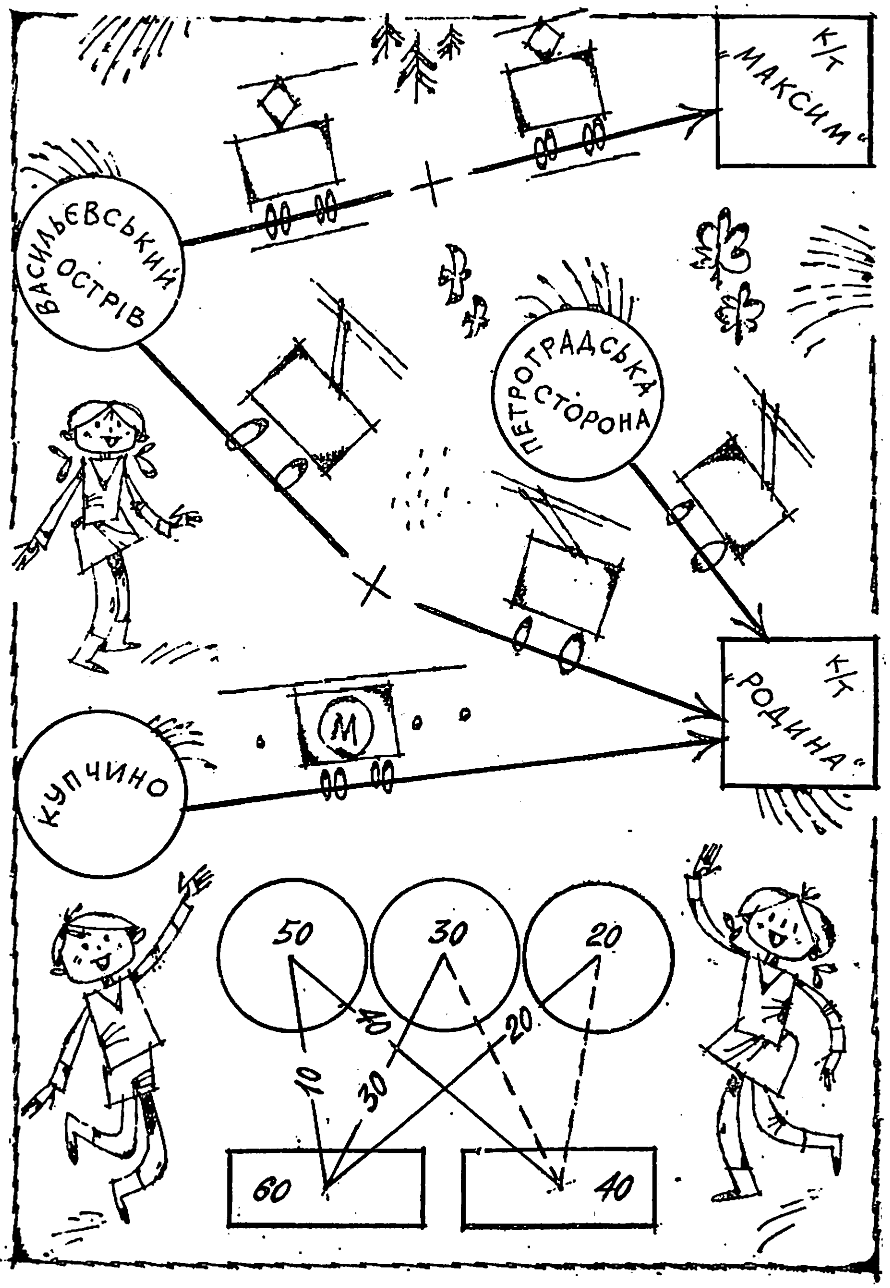
$$50=X\ \text{вр}+X\ \text{вм}. \ (1)$$

Те саме з купчинцями й петроградцями:

$$30=X\ \text{кр}+X\ \text{км} \ (2)$$
$$20=X\ \text{пр}+X\ \text{пм} \ (3)$$

А те, що в кінотеатр «Родина» має приїхати тільки 60 шко лярів, а в «Максим» — 40, матиме такий вигляд:

$$60=X\text{вр}+X\ \text{кр}+X\ \text{пр} \ (4)$$
$$40=X\ \text{вм}+X\ \text{км}+X\ \text{пм} \ (5)$$



Необхідно ще сформулювати математично і саму мету планування: видатки на дорогу мають бути якомога меншими.

Згадаймо, як ми обчислювали витрати на дорогу за першим і поліпшеним планами. Загалом, із застосуванням усіх наших іксів, це має бути так:

$$\text{Загальні видатки} = X_{\text{вр}}\times16+X_{\text{кв}}\times10+X_{\text{пр}}\times8+X_{\text{вм}}\times12+X_{\text{км}}\times18+X_{\text{пм}}\times6=\text{найменшим можливим.}$$

Отже, у нас набралося шість різних іксів:

$$X_{\text{вр}},\ X_{\text{кр}},\ X_{\text{пр}},\ X_{\text{вм}},\ X_{\text{км}},\ X_{\text{пм}}.$$

Для зручності розрахунків виразимо їх через які-небудь два ікси, наприклад, через $X_{\text{км}}$ і $X_{\text{пм}}$.

Почнемо з формули (2), з якої одразу можна знайти:

$$X_{\text{кр}}=30-X_{\text{км}}.$$

Із формули (3):

$$X_{\text{пр}}=20-X_{\text{пм}}.$$

Із формули (4):

$$X_{\text{вр}}=60-X_{\text{кр}}-X_{\text{пр}}=60-(30-X_{\text{км}})-(20-X_{\text{пм}})=10+X_{\text{км}}?\ X_{\text{пм}}.$$

Із формули (5):

$$X_{\text{вм}}=40-X_{\text{км}}-X_{\text{пм}}.$$

Із формули (6):

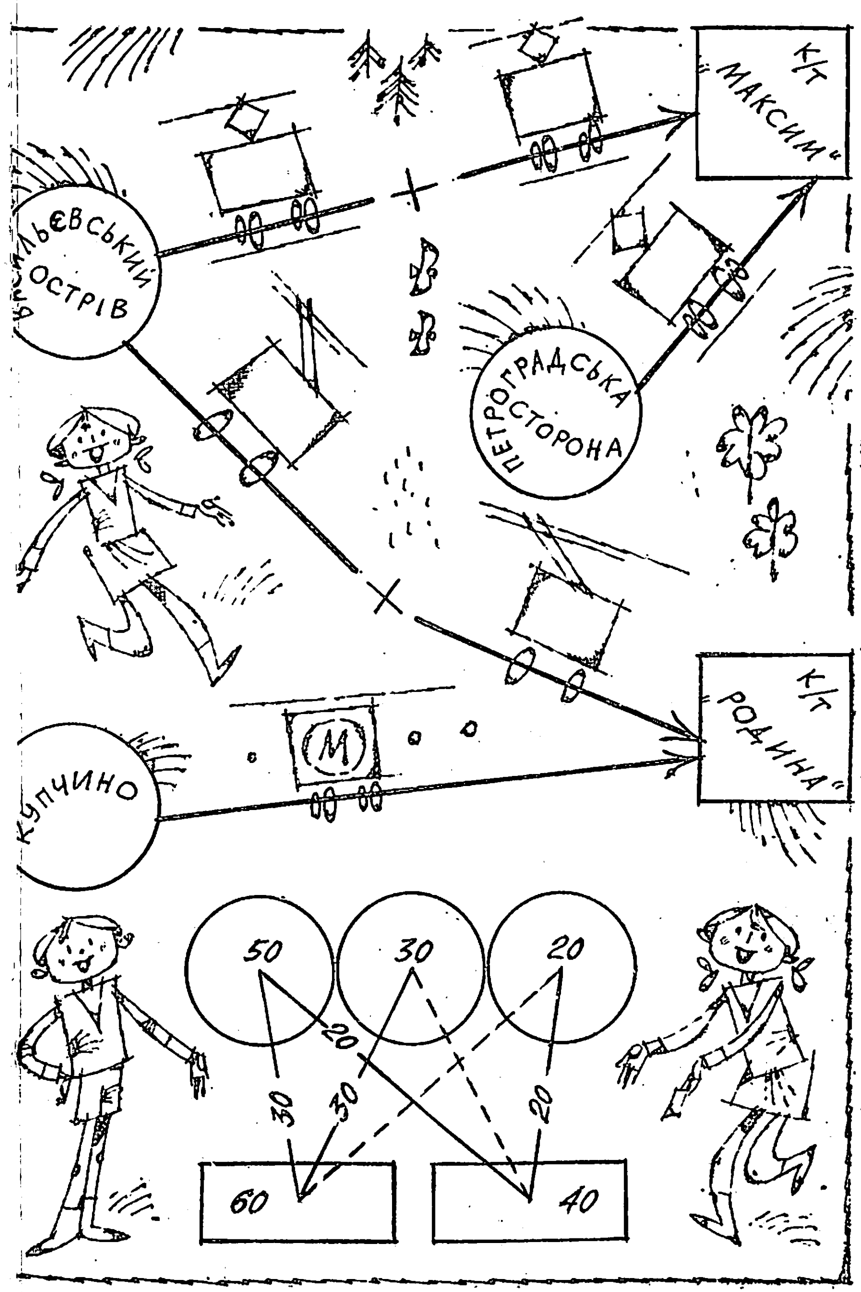
$$\text{Загальні видатки}=(10+X_{\text{км}}+X_{\text{пм}})\times16+(30-X_{\text{км}})\times10+(20-X_{\text{пм}})\times8+(40-X_{\text{км}}-X_{\text{пм}})\times12+X_{\text{км}}\times18+X_{\text{пм}}\times6=\text{найменшим можливим.}$$

Або після розкриття дужок і зведення подібних членів:

$$\text{Загальні видатки}=1100+12\times X_{\text{км}}+2\times X_{\text{пм}}=\text{найменшим можливим.}$$

Випишемо разом усі значення іксів, які ми щойно одержали:

$$X_{\text{вр}}=10+X_{\text{км}}+X_{\text{пм}};$$
$$X_{\text{кр}}=30-X_{\text{км}};$$
$$X_{\text{пр}}=20-X_{\text{пм}};$$
$$X_{\text{вм}}=40-X_{\text{км}}-X_{\text{пм}}.$$



Загальні видатки=
$1100+12\times X$ км$+2\times X$ пм=найменшим можливим.

Це і є найкращий план, виражений мовою алгебри. Він показує, як повинні розділитися школярі на маршрути, щоб усі відвідали кіно і якнайменше витратили на дорогу.

Запишемо цей план звичайною мовою.

Уважно розгляньмо формулу загальних видатків. Саме вона й таїть у собі розгадку найкращого плану. З цієї формули очевидно, що найменшими будуть витрати тоді, коли X км і X пм дорівнюватимуть нулю. Адже за цієї умови, як видно з формули, загальні видатки стануть найменшими з усіх можливих — 1100 копійок: 1100 копійок$=1100+12\times0+2+0$.

Та що це означає: X км і X пм дорівнюють нулю?

Літерою X ми позначили кількість школярів, які їдуть якимось із маршрутів. Отже, якщо X км і X пм дорівнюють нулю, то це означає, що маршрутами Купчино — «Максим» і Петроградська сторона — «Максим» не повинен їхати жоден школяр.

Найкращий план починає вимальовуватись.

А як встановити кількість школярів, які повинні їхати по всіх інших напрямках?

Тепер це визначити не важко.

Повернімося до алгебраїчного запису найкращого плану — до формул (7) — і підставимо в нього вже відомі нам значення X км$=0$ і X пм$=0$.

Півхвилини розрахунків — і перед нами, нарешті, те, що ми так наполегливо шукали,— найкращий план:

X вр$=10+0+0=10$ чоловік,
X кр$=30-0=30$ чоловік,
X пр$=20-0=20$ чоловік,
X вм$=40-0-0=40$ чоловік.

Зобразимо цей план на схемі.

Загальні видатки, як ми вже знаємо, тут найменші — 1100 копійок, або 11 карбованців.

Це справді найкращий план. Він дає економію порівняно з першим планом аж на 3 карбованці 80 копійок. І все завдяки розумному плануванню. Такий план, звичайно, схвалили б усі школярі.

Історія з планом культпоходу, певна річ, вигадана. Та й кому, скажете ви, спаде на думку, збираючись у кіно, складати плани, міркувати над рішеннями... Але час, який ми витратили на цю розповідь, не змарновано. Наша історія має досить несподіване продовження.

Цього разу мова піде про речі доволі серйозні.

ПЕРЕВІРЕНИМИ МАРШРУТАМИ

Пригадаймо задачу про перевезення руди з розповіді «Шляхи, які ми вибираємо».

Коротко повторимо умову задачі, навівши цього разу й деякі необхідні цифри.

Руду видобувають на трьох шахтах і залізницею доправляють на два металургійні комбінати. Треба спланувати перевезення руди найкращим, економнішим чином. Кількість руди, яку дає кожна шахта, а також вартість перевезення в різних напрямках різні.

Зрештою, це найпростіше зобразити на схемі. Тут наочно видно, скільки руди на рік добувають у кожній із трьох шахт. Вартість перевезень руди в різні маршрути зображена в цій таблиці:

Шахти	Металургійні комбінати	
	№ 1	№ 2
A	16	12
B	10	18
C	8	6

Чи не нагадують вам що-небудь ці цифри?

Нагадують. Адже вони цілком збігаються з тими, якими користувалися ми, плануючи поїздку в кіно. Та річ не лише в цифрах. Основна мета при складанні плану перевезень руди — та сама, що й плану поїздок школярів: домогтися щонайменших витрат. Отож, коли перевозити руду за найліпшим планом, який ми розрахували для поїздки в кіно, то й тут гроші будуть теж заощаджені. З тією лише різницею, що рахунок тут піде не на карбованці й копійки, а на... Зрештою, полічимо.

Якщо планувати перевезення руди без розрахунку, на око, то може вийти план, подібний до першого плану поїздки школярів. Як ми пригадуємо, проїзд ста школярів там коштував 14 карбованців 80 копійок. Оскільки ми тепер розраховуємо план перевезення ста тисяч тонн руди, то замість одного школяра буде доправлятися одна тонна руди. А вартість перевезення тонни вантажу вимагає у сто разів більше витрат, ніж перевезення однієї людини. Отже, загальна сума видатків виявиться у сто тисяч разів більшою, ніж при культпоході — 1 480 000 карбованців.

Та ми вже знаємо, що цей перший план перевезення був далеко не кращим. І звичайно, перевеземо руду за найкращим планом. Сума видатків за цим планом приблизно на чверть менша, ніж за першим, і становила 11 карбованців 00 копійок. При перевезеннях руди з'явиться цифра зовсім іншого гатунку: 1 100 000 карбованців. Заощадження грошей складе:

$$1\,480\,000 - 1\,100\,000 = 380\,000 \text{ карбованців.}$$

На ці гроші можна збудувати хорошу школу. Але ж шахт і металургійних комбінатів, з яких перевозять руду, в нашій країні дуже багато.

І зазначте, все це було зроблено без будь-якого збільшення видобутку руди, лише завдяки розумному плану.

Хіба це не схоже на диво?

ЯК ВИКРОЇТИ ЗАЙВИЙ АВТОМОБІЛЬ?

Ознайомимося ще з одним «дивом» математичного планування.

Чи знаєте ви, що створення сучасного корабля, літака, автомобіля включає, як і виготовлення звичайного костюма чи пальта, розкрій матеріалу?

З великих металевих листів викроюють заготовки для деталей кузова автомобіля, крил та фюзеляжу літака, корпусу корабля. Потім ці заготовки кладуть під потужний прес, що штампує з них необхідні деталі.

Цього разу нам доведеться розкроїти партію тонких металевих листів розміром 6×13 метрів кожний. Треба з кожного листа одержати кілька заготовок двох розмірів: заготовка A — 5×4 метри, заготовка B — 2×3 метри.

Як же найкраще розкроїти?

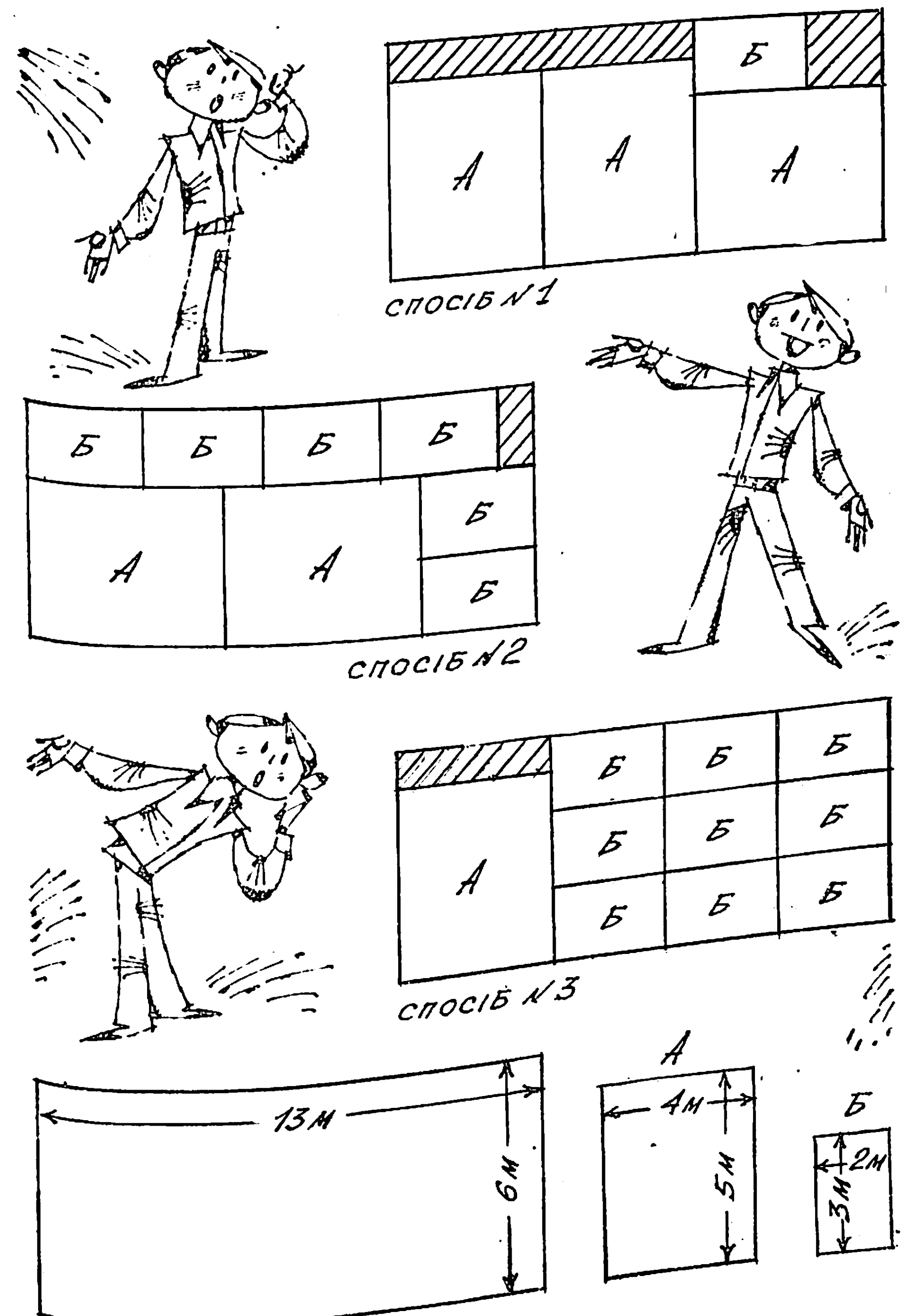
Спочатку поміркуймо, як ці заготовки можуть розміститися на великому листі. Розглянемо кілька можливих способів крою.

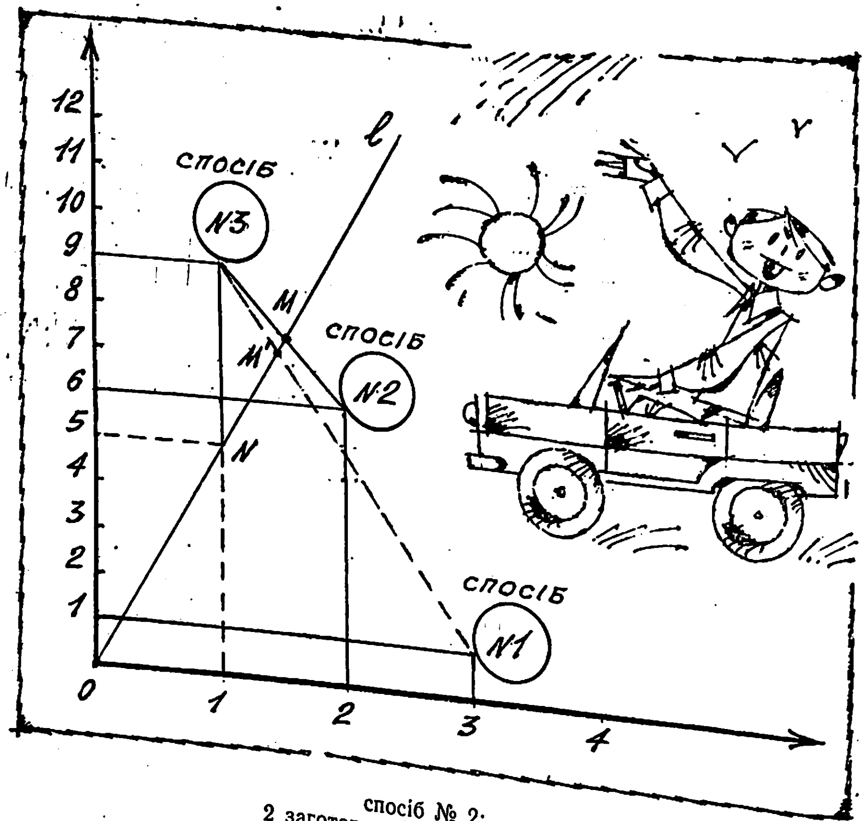
Передусім подбаємо про те, щоб одержати з кожного листа щонайбільше заготовок A — вони більші від заготовок B і тому для них важче підшукати місце на листі. Виявляється, проте, що більше як три заготовки. A з листа викроїти неможливо.

Далі спробуємо кроїти так, щоб на листі виходило по дві заготовки A, і, нарешті, по одній.

Кожному з цих способів розкрою присвоїмо свій номер:

спосіб № 1:
3 заготовки A+1 заготовка B;





спосіб № 2:
2 заготовки $A+6$ заготовок B;
спосіб № 3:
1 заготовка $A+9$ заготовок B.

За всіх способів розкрою частина площі листа залишається невикористаною і йде у відходи. На малюнку ця площа заштрихована. Звичайно, слід прагнути, щоб таких відходів було щонайменше. Для зручності в роботі листи розкроюють, як правило, не на кожну машину окремо, а одразу на цілу партію.

Якщо не брати до уваги потреби в заготовках певного типу, то може статися, що одних виявиться занадто багато, а інших не вистачатиме.

У нашому випадку виробництву треба було: 300 заготовок A й 1500 заготовок B.

Задача полягає в тому, щоб вибрати для цієї кількості заготовок найкращий, найощадливіший план розкрою, який дасть заготовок щонайбільше, а відходів — щонайменше.

Цього разу вдамося по допомогу до геометрії.

На звичайному графіку відкладатимемо по осі x число заготовок A, а по осі y — число заготовок B. Тоді кожному співвідношенню заготовок A і B на графіку відповідатиме певна точка, що позначає спосіб розкрою.

Наприклад, 3 заготовки A і 1 заготовка B дають точку «спосіб № 1»; 2 заготовки A і 6 заготовок B дають точку «спосіб № 2» і так далі.

З'єднуючи ці точки між собою, можна одержати лінії, які відповідають поєднанню різних способів розкрою.

Так, лінія, що з'єднує способи № 2 і № 3, означає, що при розкрої вдаються до обох цих способів.

На цьому ж графіку нам треба показати, що на 300 заготовок A необхідно викроїти 1500 заготовок B. Але це означає, що на кожну заготовку A має припадати п'ять заготовок B:

$$\frac{A}{B} = \frac{300}{1500} = \frac{1}{5}.$$

Проведемо на графіку промінь OL, так, щоб він проходив через точку N — (1 заготовка A, 5 заготовок B). Такий промінь по всій своїй довжині відповідатиме потрібному співвідношенню заготовок 1/5. І, очевидно, наш план повинен лежати десь на цьому промені. Але де?

Неважко збагнути, що точка, яка відповідає найкращому плану, має лежати і на прямій OL і на одній із ліній, що дає поєднання способів розкрою. Вибираючи лінію способів розкрою, слід мати на увазі, що чим далі вона лежатиме на промені OL від точки початку координат 0, тим більше буде зроблено заготовок, а отже, і кращий буде план. Це зрозуміло з малюнка.

На графіку добре видно, що цією, такою необхідною точкою може бути тільки точка M, яка лежить на лінії «спосіб № 2 — спосіб № 3». Справді, вона, з одного боку, дає нам необхідну кількість заготовок (на одну заготовку A п'ять заготовок B), а з другого — це найвіддаленіша від початку координат точка поєднання цих способів розкрою.

Щоб переконатися в цьому, спробуємо скористатися якимось іншим можливим поєднанням способів розкрою, наприклад, № 1 і № 3: адже пунктирна лінія, що з'єднує їх, теж перетинає промінь OL. Та в цьому випадку план вочевидь стає гіршим, оскільки точка перетину M розташована ближче до початку координат, ніж точка M, і заготовок через це вийде менше.

Отож, ми дійшли висновку, що найкращий план розкрою має поєднувати способи розкрою № 2 і № 3.

Розрахуємо, в якому співвідношенні треба застосовувати ці способи. Для цього позначимо літерою Z частину листів, які будуть розкроюватися за способом № 2. На долю способу № 3 тоді, зрозуміло, припаде $1 - Z$ листів. При цьому загальна кількість заготовок A і B, які одержуємо способами № 2 і № 3, як видно з сутності цих способів, дорівнює:

$$\text{число заготовок } A = 2\times Z + 1\times(1 - Z),$$
$$\text{число заготовок } B = 6\times Z + 9\times(1 - Z),$$

Тепер складемо відношення числа заготовок A до числа заготовок B:

$$\frac{\text{число заготовок } A}{\text{число заготовок } B} = \frac{2\times Z + 1\times(1 - Z)}{6\times Z + 9\times(1 - Z)} = \frac{300}{1500} = \frac{1}{5}.$$

Перетворимо здобуту пропорцію, щоб знайти, чому дорівнює Z:

$$2\times Z + 1\times(1 - Z)\times 5 = 6\times Z + 9\times(1 - Z)\times 1;$$
$$10+5-5=6+9-9;$$
$$10-5-6+9=9-5;$$
$$8=4;$$
$$Z=\frac{1}{2}.$$

Отже, ми повинні половину всіх листів кроїти за способом № 2, а половину — за способом № 3. Це, до речі, видно й на нашому графіку. Адже промінь OL проходить саме посередині між точками «спосіб № 2» і «спосіб № 3».

Тепер прикинемо, скільки ж треба всього мати листів, щоб одержати необхідну кількість заготовок: 300 — A і 1500 — B.

Погляньмо на схеми розкрою № 2 і № 3, якими ми вирішили скористатися порівну. Якщо взяти два листи і один розкроїти за способом № 2, а другий — за способом № 3, то вийде 3 заготовки A і 15 заготовок B. Нам же, як відомо, треба рівно у сто разів більше заготовок кожного типу. Тож загальна необхідна кількість листів буде: $2\times 100=200$ листів.

Звідси ясно, який вигляд матиме і найкращий план розкрою. Ось він.

Половина листів розкроюється за способом № 2. Виходить: $100\times 2=200$ заготовок A, $100\times 6=600$ заготовок B.

Друга половина листів розкроюється за способом № 3. Виходить: $100\times 1=100$ заготовок A, $100\times 9=900$ заготовок B.

Всього ж розкроюється 200 листів. З них виходить 300 заготовок A і 1500 заготовок B, що й вимагалося в задачі. А чим же цей план кращий за інші?

На цей випадок у нас є така цікава відповідь.

Припустимо, що заводські інженери не знали сучасних мето-

дів розкрою і провели його без розрахунку, «на око». При цьому вони зупинилися на плані розкрою тих само двохсот листів способами № 1 і № 3.

Для того щоб заготовок A було 300 штук, способом № 1 розкроювалося 50 листів, а способом № 3 — 150 листів.

І от що вийшло.

50 листів, розкроєних за способом № 1, дали:

$50\times 3=150$ заготовок A, $50\times 1=50$ заготовок B.

150 листів, розкроєних за способом № 3, дали:

$150\times 1=150$ заготовок A, $150\times 9=1350$ заготовок B.

Всього ж розкроюється 200 листів. Із них виходить 300 заготовок A і 1400 заготовок B.

А куди ж поділося 100 заготовок B? Адже в нашому найкращому плані їх було 1500.

Їх «з'їв» поганий план. Усі вони пішли у відходи. Матеріал виявився невикористаним.

Отже, правильне планування розкрою навіть у такій скромній задачі, як наша (розрізається лише 200 листів), заощаджує цілих 600 квадратних метрів цього цінного матеріалу.

100 заготовок $B\times 2$ метри$\times 3$ метри$=600$ квадратних метрів.

Тепер можна дати відповідь і на питання: як викроїти зайвий автомобіль? Для цього треба вести розкрій металу з розумом, за правилами науки, використовуючи для складних обрахунків електронно-обчислювальні машини.

До речі, кроїти доводиться не тільки металеві листи.

Розумний план розкрою необхідний і там, де шиють одяг і взуття, ріжуть папір для книжок та зошитів, вирізають скло й дзеркала.

І скрізь цей план викроює що-небудь дуже потрібне людям.

* * *

Вибір найкращого плану перевезень чи розкрою, так само як і пошук правильного курсу маневру, мають ту хорошу особливість, що завжди дають цілком певний результат. І результат цей можна заздалегідь точно передбачити. Скільки не плануй перевезень руди — за однакових умов план буде той самий. Скільки не розраховуй курсу атаки ракетного катера — для незмінної обстановки він буде однаковий.

Проте в житті досить часто трапляються задачі, при розв'язанні яких результат заздалегідь точно передбачити неможливо: раз по раз він мінятиметься від випадку. Кулька Тома Сойєра котиться по-різному.

Яким повинне бути при цьому рішення?

Надаємо слово теорії імовірностей.

Розділ 5

АРИФМЕТИКА ВИПАДКОВОСТЕЙ,

де з'ясовується, чому бутерброд падає маслом униз; аналізується випадок; відбувається кілька корисних зустрічей з випадковими подіями, а також дається відповідь на питання «в якій руці?»

ЧОМУ БУТЕРБРОД ПАДАЄ МАСЛОМ УНИЗ?

Якось у дитинстві я впустив бутерброд.

Дивлячись, як я винувато витираю масну пляму на підлозі, старший брат заспокоїв мене:

— Не бери в голову, це спрацював закон бутерброда.

— А що то за закон такий? — спитав я.

— Закон, який гласить: «Бутерброд завжди падає маслом униз». Зрештою, це жарт,— вів далі брат.— Ніякого такого закону нема. Просто бутерброд справді поводиться досить дивно: здебільшого масло опиняється внизу.

— Спробуймо ще кілька разів упустити бутерброд, перевіримо,— запропонував я.— Однаково ж його доведеться викидати.

Перевірили. З десяти разів вісім бутерброд упав маслом униз.

І тут я замислився: а чи можна наперед дізнатися, як зараз упаде бутерброд, маслом угору чи вниз?

Досліди нам перебила мати...

А з бутербродом справа, виявляється, така. Масло трохи важче за хліб, і тому частіше опиняється внизу. Інколи, правда, буває і навпаки. Але от заздалегідь сказати, як зараз, цього разу, впаде бутерброд, не можна. Він ніколи не розголошує своєї таємниці. Таємнича поведінка, чи не так? Спробуємо її розгадати.

У довколишньому світі є безліч явищ, які щоразу відбуваються якось інакше і завжди дають несподіваний результат. Ці явища називаються випадковими. Випадок відіграє не останню роль у житті людини. Тому люди давно вже дали випадковостям належну оцінку.

Здавна існує вислів «Його Величність Випадок». Від випадку залежить погода, урожай зерна й плодів, брак на виробництві, влучення в ціль і, звичайно, всім відоме «пощастить — не пощастить».

Переконавшись у ролі випадку в своєму житті, люди одразу почали його вивчати. Виявилося, що випадок, не зважаючи на всю його примхливість, все-таки підкоряється своїм, цілком визначеним законам.

Том Сойєр недаремно вірив, що кулька знайде кульку. Напевне, йому та його друзям не раз доводилося так діяти, і вони помітили, що майже завжди після кількох спроб кулька знаходиться. Часом це бувало при другому, третьому чи четвертому кидку, часом вдавалося досягти успіху одразу, з першої ж спроби.

У цьому своєрідному явищі не можна було не запримітити певного правила: в одному з кількох випадків кулька неодмінно знаходилась.

А там, де є правило чи закономірність, починається наука. Наука про випадкові явища — теорія імовірностей. З її допомогою людина стала не лише розуміти випадкове, а й керувати ним.

Знайомство з теорією імовірностей почнемо з простої арифметичної задачі.

Школярі заробили в радгоспі 100 кілограмів яблук. Яблука привезли до школи, щоб роздати школярам. 75 процентів привезених яблук виявилися солодкими. Решта — кислими.

Треба взнати, скільки було яблук солодких і скільки кислих. Розв'язати задачу зовсім нескладно. Для цього поставимо лише два запитання.

1. Скільки яблук було солодких?

$$100 \times \frac{75}{100} = 75 \text{ кг.}$$

2. Скільки яблук було кислих?

$$100 - 75 = 25 \text{ кг.}$$

Здається, тут усе зрозуміло.

Та спробуйте відповісти на таке запитання: «Солодким чи кислим буде перше-ліпше, взяте навмання, яблуко з привезених до школи?»

На це запитання арифметика відповіді не дає.

Річ у тім, що воно звернене вже не до арифметики, а до теорії ймовірностей. В нашу історію з яблуками втрутився Випадок.

Адже ми беремо перше-ліпше яблуко навмання, і тому ніхто не може наперед точно сказати, яким воно буде на смак.

Згадаймо про бутерброд.

— Отже, на наше запитання немає відповіді? — розчаровано запитає читач.

Є, та тільки відповідь незвичайна, не така, які бувають в арифметиці.

Уявімо собі, що кожному школяреві дісталося по 10 яблук. Оскільки солодкі яблука складають 75%, то з одержаних 10 яблук 7,5 мають бути солодкими і 2,5 — кислими. Але ж не буває яблук, одна половинка яких солодка, а друга — ні. Мабуть, комусь із школярів дістанеться по 8 солодких яблук і по 2 кислих, а комусь по 7 солодких і по 3 кислих. Кому особливо не поталанить, той одержить 6 солодких і 4 кислих яблука, але будуть і окремі щасливчики, які з'їдять 9 солодких яблук.

Якщо тепер скласти всі яблука якоїсь однієї групи школярів докупи, то це матиме такий вигляд:

Миколка	8 солодких+2 кислих=10 яблук;
Толя:	7 солодких+3 кислих=10 яблук;
Марійка:	7 солодких+3 кислих=10 яблук;
Тетянка:	9 солодких+1 кисле =10 яблук;
Федько:	7 солодких+3 кислих=10 яблук;
Петрусь:	7 солодких+3 кислих=10 яблук;
Оля:	6 солодких+4 кислих=10 яблук;
Поля:	8 солодких+2 кислих=10 яблук;
Женя:	8 солодких+2 кислих=10 яблук;
Сенько:	8 солодких+2 кислих=10 яблук.

Всього у 10 школярів: 75 солодких+25 кислих=100 яблук.

Загалом виходить, що в середньому на кожні 4 яблука припадає 3 солодких і 1 кисле.

Тепер ми можемо сказати, яким на смак виявиться перше-ліпше, взяте навмання яблуко. Для нашої задачі будь-яке яблуко у середньому в трьох випадках із чотирьох має бути солодким.

Це і є відповідь теорії імовірностей на наше запитання. Суть її в тому, що скільки б цих яблук ви, чи Миколка, чи Толя, чи будь-хто інший не брав навмання, в середньому на чотири яблука три припаде солодких. Якщо ж ви взяли лише одне яблуко, то 3/4 всіх можливостей, або, як то кажуть, шансів, за те, що воно буде солодким. Це число, що характеризує можливість появи випадкової події, що цікавить нас, називається ймовірністю.

Так само відповідає теорія імовірностей і на запитання про те, яким боком упаде бутерброд. Як ми пригадуємо, він падав маслом униз 8 разів із 10. Якщо при більшій кількості падінь це співвідношення не зміниться, то можна сказати: 8/10 усіх шансів за те, що бутерброд, якщо його впустити, впаде маслом униз.

— Так це ж майже як в арифметиці,— зауважить читач.

Справді, в цій науці спочатку багато спільного з арифметикою. Числа додаються і перемножуються, віднімаються й діляться. Та тільки особлива ця арифметика — арифметика випадковостей.

Звичайна арифметика розв'язує такі задачі, в яких результат раз по раз не змінюється, і тому його можна точно розрахувати.

Арифметика випадковостей має справу з задачами, для яких точної відповіді на кожний випадок нема. Якщо навіть зібрати всіх найкращих математиків світу, то й вони не зможуть напевне сказати, як цього разу впаде бутерброд.

Відповіді теорії імовірностей правильні лише в середньому для великої кількості однакових випадкових подій. Саме це ми й маємо на увазі, коли кажемо, що ймовірність одержати солодке яблуко дорівнює $^3/_4$. І що більше подій, то точніша відповідь. В теорії імовірностей це називається законом великих чисел.

Так, якщо, скажімо, скуштувати навмання яблука в котрогось із школярів, то, як ми бачимо, зовсім не обов'язково, що $^3/_4$ із них солодкі; їх може бути й більше, і менше. А от коли спитати, якими були на смак яблука у всіх школярів, напевне виявиться, що солодких було $^3/_4$ всіх яблук. Ймовірність спрацьовує при цьому дуже точно — не гірше, ніж у звичайній арифметиці.

Завдяки закону великих чисел теорія імовірностей стає незамінною, коли йдеться про явища, що повторюються багато разів. Вона потрібна при складанні прогнозу погоди, для передбачення можливого браку, при плануванні масового виробництва одягу й взуття і т. ін.

Перш ніж братися розв'язувати всі ці нові для нас задачі, необхідно навчитися, як поводитися з випадковостями.

Перше, що ми зробимо, це спробуємо виміряти випадок.

СКІЛЬКИ ВАЖИТЬ ВИПАДОК?

Уявімо собі, що в нашій задачі солодких яблук було не 75, а 90 процентів. Це означає, що тепер будь-яке, взяте навмання яблуко уже в дев'яти випадках з десяти буде смачним і лише в одному — несмачним. На наших очах імовірність помітно змінилася — стала більшою.

А що означає більша чи менша ймовірність?

Мабуть, коли імовірність більша, то можна сподіватися, що випадкова подія трапиться майже напевне. Так, коли солодких яблук стало 90 процентів, майже перше-ліпше взяте навмання яблуко повинно виявитися смачним. Маленька ж імовірність говорить про те, що тут на випадковість сподіватися не варто. В нашому прикладі є лише один шанс із десяти на те, що яблуко виявиться кислим. Зрозуміло, що такий випадок малоймовірний і тому, скоріш за все, його не станеться. Тож сміливо беріть перше-ліпше яблуко і їжте його на здоров'я.

Отже, імовірність мінлива: в одних випадках буває великою, в інших — маленькою. Як же встановлюють величину імовірності? Та досить просто, приблизно так само, як ми встановлюємо, яка людина на зріст чи скільки вона важить,— для цього треба виміряти її вагу й зріст.

Але чи можна зважити випадок?

Якось мені треба було купити тканини на костюм. У крамниці продавщиця швидко відмотала від великого рулону смугу тканини і кілька разів приклала до неї метр. Відріз був готовий.

Довжину відміряли просто: її порівняли з відомим заздалегідь метром: скільки разів він ліг на тканину, така й була її довжина.

Так само можна зважити будь-який вантаж. Тільки замість метра тут беруть гирю: скільки кілограмів гир урівноважать річ, стільки вона й важить.

Якими ж гирями, яким метром виміряти випадок? З чим порівняти ймовірність випадкової події?

З'ясувати це нам допоможе простий градусник.

Колись люди не вміли вимірювати температури. Винахідник градусника придумав, як це зробити. Він занурив трубочку із ртуттю в кригу, що танула, і там, де зупинився стовпчик ртуті, позначив 0 градусів. Потім переніс трубочку у воду, що кипіла, і зробив позначку у найвищій точці, до якої піднялася ртуть,— 100 градусів.

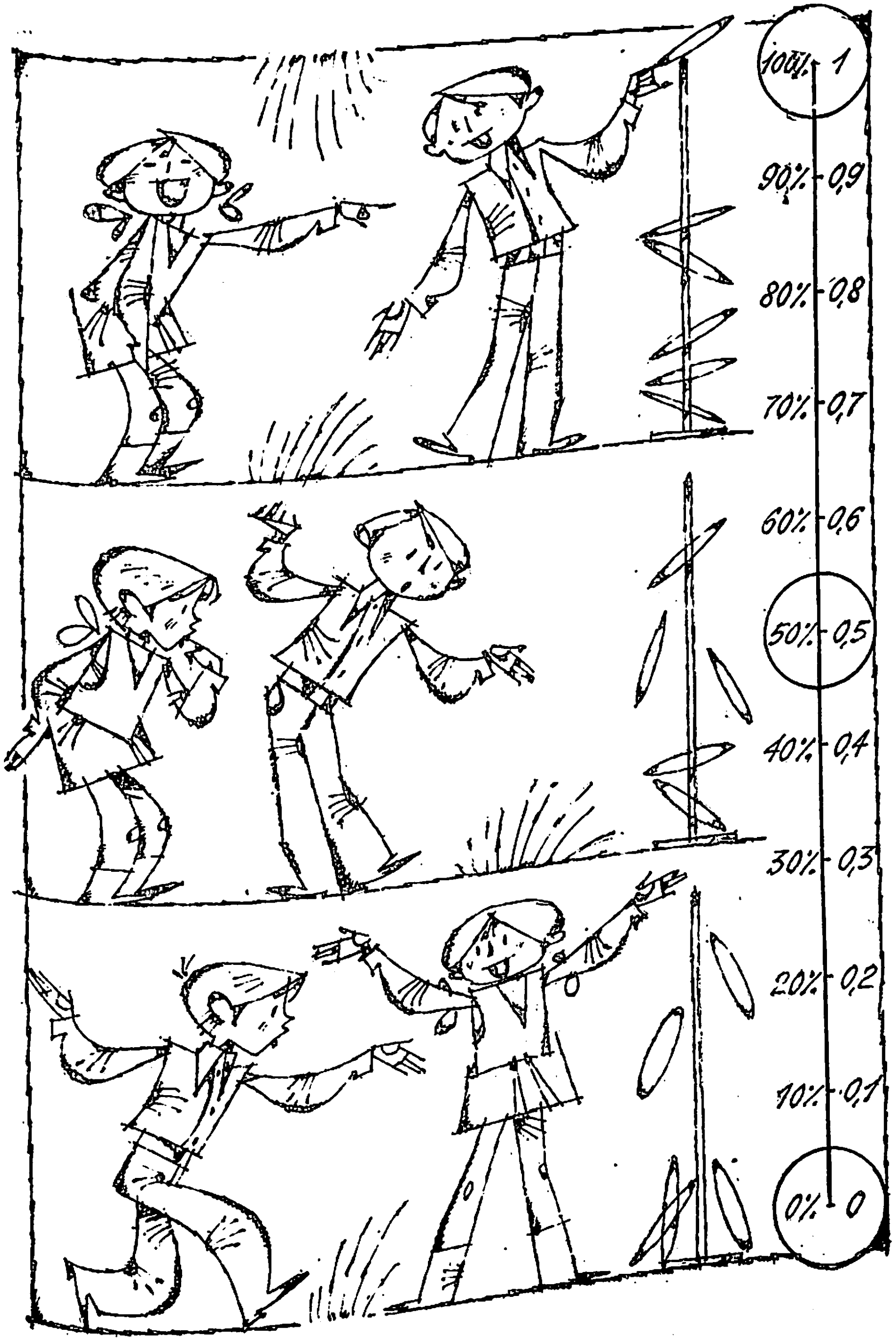
Відстань між 0 і 100 градусами розділив на 100 рівних частин — кожна частина склала 1 градус. Так з'явився градусник.

Тепер виміряти будь-яку температуру стало дуже просто; на якій поділці зупиниться ртутний стовпчик, стільки й градусів.

Спробуємо винайти схожий градусник для вимірювання можливостей випадку — ймовірностей.

І діти, й дорослі люблять бавитися в таку гру. В землю забивають кілочок. Кожен учасник гри відходить від кілочка на певну відстань і намагається накинути на нього невелике кільце. Кидки повторюють кілька разів. Виграє той, хто зумів накинути більше кілець.

Накинеш чи не накинеш кільце на кілочок — справа випадку. Ця можливість появи випадкової події і є його ймовірність. Саме її ми й вимірюватимемо.



Спочатку відійдемо від кілочка якнайдалі, так, щоб кожний, хто спробував би кидати звідти кільця, напевне «промазав». І навіть якщо б зробив 100 кидків, результат був би той самий — все мимо. Отже, влучання, на яке ми сподіваємося, в цьому разі неможливе.

Ймовірність такої неможливої випадкової події, звичайно, дорівнює нулю.

Зробимо «градусник» для вимірювання ймовірностей. Його зображено на нашому малюнку. Ймовірність неможливої випадкової події позначимо на «градуснику» так само, як температуру криги, що тане, на справжньому термометрі — нулем.

А тепер граємо далі. Наблизимося до кілочка впритул. Будь-хто, навіть маленька дитина, зможе з такої відстані без труднощів накинути кільце на кілочок.

Це означає, що потрібний нам випадок — кільце опинилося на кілочку — можливий завжди, або, як то кажуть, достовірний. Імовірність такої достовірної випадкової події позначимо на нашому «градуснику» цифрою 100.

Якщо ми тепер розділимо відстань від 0 до 100 на нашому «градуснику» на сто рівних частин, то зможемо виміряти будь-яку ймовірність. Та спочатку пригадаємо, як вимірюють температуру. Візьмемо в руки звичайний медицинський градусник і поставимо його під пахву. Ртутний стовпчик зупиниться біля цифри 36,6. І ми кажемо, що температура тіла дорівнює 36,6 градуса. Градус — одиниця вимірювання температури, так само, як метр — довжини або кілограм — ваги.

А якою ж одиницею вимірювати ймовірність?

Відійдемо від кілочка на таку відстань, щоб у середньому половина всіх наших кілець нанизалася на нього. Для різних людей це будуть, звичайно, різні відстані. Якщо ми, як і раніше, зробимо 100 кидків, то на кілочку кільця побувають 50 разів, що становитиме половину всіх випадків.

Відповідну ймовірність ми й позначимо як половину — 0,5 чи 50 процентів. На нашому «градуснику» це відповідатиме температурі 50 градусів.

Якщо з більшої відстані на кілочок попаде із 100 кілець 30 — ймовірність 0,3 або 30 процентів,— наче температура 30 градусів.

Пригадаймо бутерброд. Імовірність того, що він ляпнеться маслом униз, тепер, так би мовити, дорівнює 0,8, або 80 процентам. Така висока «температура» — ймовірність — і робить бутерброду погану репутацію. Тому й кажуть, що «бутерброд падає маслом униз».

Зауважимо, як ми одержали числові значення ймовірностей на нашому «градуснику». У всіх прикладах число вдалих кидків, які саме й цікавлять нас, ділилося на число всіх кидків.

Заведено говорити, що вдалі кидки — це випадки, що сприяють події, яка цікавить нас, а всі кидки — рівноможливі випадки. Рівноможливі — через те, що за даної відстані всі кільця мають однаковий шанс побувати на кілочку.

Отож:

$$\text{Імовірність} = \frac{\text{число сприятливих випадків}}{\text{загальне число рівноможливих випадків}}.$$

Це і є формула ймовірності.

А як визначити ймовірність того, що подія, яка нас цікавить, не трапиться, наприклад, «ми не накинемо кільця на кілочок» або «бутерброд не впаде маслом униз», а впаде маслом угору?

Такий розрахунок виконати тепер зовсім не складно. Просто треба відняти обчислену за формулою імовірність від одиниці чи від 100 процентів. Адже на нашому «градуснику» лише 100 поділок. Виходить, що коли ми накидаємо кільце з імовірністю 0,3, то імовірність промаху буде $1-0{,}3=0{,}7$, або 100 процентів — 30 процентів = 70 процентів. А ймовірність порушити «закон бутерброда» дорівнює $1-0{,}8=0{,}2$, або 20 процентам. Імовірність, звичайно, не може бути, на відміну від температури, меншою за 0,— адже при 0 нічого не відбувається — ніяка подія не буде. Не може вона бути й більшою за 1; вже при 1 подія, що цікавить нас, відбувається напевно, а отже, невипадково.

«Озброївшись нашим «градусником», вирушимо на пошуки випадкових подій. Ми навчились їх вимірювати, і нам, звичайно, цікаво дізнатися про все, що може трапитися з волі випадку.

ЗУСТРІЧ ІЗ ВИПАДКОМ

Перша зустріч: випадок у цеху.

На одному з заводів кілька років тому почали виготовляти телевізори. Телевізор — складний прилад, тому спочатку на заводі було багато браку: в середньому з кожних двадцяти телевізорів один незабаром після придбання псувався. Покупці засмутилися. Та минув місяць, другий, і робота на заводі пішла на лад. Можливість браку зменшилася у п'ять разів. Як ви гадаєте, можна тепер спокійно купувати телевізор, виготовлений на цьому заводі? Вдамося до формули ймовірності.

$$\text{Ймовірність браку на початку виробництва} = \frac{\text{число зіпсованих телевізорів}}{\text{число всіх телевізорів}} = \frac{1}{20} = 0{,}05, \text{ або } 5\%.$$

А тепер зменшимо ймовірність у 5 разів:

$$5\% : 5 = 1\%.$$

Погляньмо на наш «градусник». 1% — це дуже низька ймовірність. Їй так само далеко до ймовірності 100%, при якій брак достовірний, як і воді з температурою 1 градус до кипіння. Тому можна вважати, що, скоріш за все, куплений телевізор буде якісний.

Друга зустріч: випадок у колгоспі.

У колгоспі готувалися до жнив. У минулі роки жнива тривали 10 днів. Цього разу бюро прогнозів повідомило, що з намічених на жнива десяти певних днів наприкінці літа три (які — невідомо) будуть дощові.

Якщо дощ ітиме три дні поспіль, він може зірвати жнива,— отже, необхідно вжити заходів, щоб зберегти врожай.

А може, дощ і не йтиме три дні поспіль, а, скажімо, піде першого, третього й сьомого дня і не завадить жнивам?

Усе це залежить від випадку. Без арифметики випадковостей тут просто не обійтися.

Для того щоб застосувати в нашій задачі формулу ймовірності, необхідно визначити як загальне число рівноможливих випадків (знаменник формули ймовірності), так і число сприятливих випадків (чисельник формули).

Загальною кількістю рівноможливих випадків тут, мабуть, є кількість варіантів погоди, за яких дощ ітиме три перших-ліпших дні з десяти. Наприклад, 1, 2, 3 або 1, 6, 10, або 1, 3, 7 і так далі.

Скільки може бути таких варіантів? Не поспішайте з відповіддю. Одержати її не так просто. Спочатку потренуємось у визначенні кількості варіантів погоди з дощем по два дні з десяти. Це зручно зробити з допомогою такої таблиці.

Номери днів	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	1,10
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	2,10
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	3,10
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	4,10
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	5,10
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	6,10
7	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	7,10
8	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	8,10
9	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9	9,10
10	10,1	10,2	10,3	10,4	10,5	10,6	10,7	10,8	10,9	10,10

На перетині яких-небудь двох днів одержуємо один варіант, або випадок. Наприклад, 1-й і 2-й дні дають на перетині 1, 2. Це означає, що може бути випадок, коли дощ іде 1-го й 2-го дня десятиденки.

Всього, виявляється, можна вибрати таких $10 \times 10 = 100$ варіантів. Правда, не всі вони для нас підходять. Ті 10 випадків, які опинилися на діагоналі таблиці, ми можемо відкинути — адже це ті самі два дні. Залишається $100 - 10 = 90$ варіантів.

Окрім цього, якщо уважно придивитися до таблиці, можна помітити, що зверху й знизу від діагоналі кожний варіант має свого двійника. Наприклад, варіанту 1, 3 відповідає 3, 1. Але ж це те саме, оскільки порядок днів не має для нас значення.

Отже, лишається половина:

$$90 : 2 = 45 \text{ варіантів.}$$

Тепер уже нескладно розрахувати, скільки може бути варіантів, за яких дощ іде три будь-які дні з десяти. Для цього треба до кожного з одержаних 45 варіантів по два дні приписати ще по одному дню. Наприклад, у нас був варіант 1, 2. До нього можна приписати будь-який день від третього до десятого — 1-й і 2-й дні в нас уже є. Всього з випадку 1, 2 вийде вісім різних випадків: 1, 2, 3; 1, 2, 4; 1, 2, 5; 1, 2, 6; 1, 2, 7; 1, 2, 8; 1, 2, 9; 1, 2, 10. І так до кожного з 45 варіантів.

А всього буде $45 \times 8 = 360$ варіантів.

Це число слід поділити на 3, оскільки кожний випадок тут записано тричі. Наприклад, записано 1, 2, 3; 1, 3, 2; 2, 3, 1. Все це той самий випадок. Тому число різних варіантів буде втричі менше:

$$360 : 3 = 120 \text{ варіантів.}$$

Це і є знаменник формули ймовірності — загальне число рівноможливих випадків, за яких дощ ітиме три будь-які дні з десяти.

Тепер знайдемо чисельник формули ймовірності — сприятливі випадки, коли дощ може йти в межах десяти днів три дні поспіль. Ось ці випадки: 1, 2, 3; 2, 3, 4; 3, 4, 5; 4, 5, 6; 5, 6, 7; 6, 7, 8; 7, 8, 9; 8, 9, 10.

Всього 8 варіантів.

За формулою ймовірності підрахуємо:

$$\text{ймовірність} = \frac{8}{120} = \text{приблизно } 0{,}07, \text{ або } 7\%.$$

Навряд чи хто міг без обрахунків здогадатись, що ймовірність загрози урожаю колгоспу така мала. Адже це означає, що ми зможемо провести жнива без втрат з імовірністю, що дорівнює:

$$1-0{,}07=0{,}93, \text{ або } 93\%.$$

Можна сказати — майже напевно.

За урожай нема чого боятися.

Т р е т я з у с т р і ч: випадок на птахофабриці.

Дітвора приїхала на екскурсію на птахофабрику. Всім хотілося подивитися, як з яєць вилуплюються маленькі курчата. Хтось із дітей поцікавився, чи можна заздалегідь дізнатися, скільки сьогодні вилупиться курочок і скільки півників.

Жінка у білому халаті — зоотехнік — сказала:

— Ми такі розрахунки робимо щодня. Адже від цього залежить, скільки ми одержимо продукції: яєць і м'яса. Нумо, полічімо з вами разом.

У цьому інкубаторі лежить 1500 яєць. У середньому курочок народжується 51%, а півників — 49%. Слід ще врахувати, що близько 5% яєць буває так званих бовтунів — не наклюовується зовсім.

Визначимо, скільки ж буде курочок і скільки півників.

Спочатку дізнаємося, скільки всього курчат з'явиться на світ. Для цього треба від загальної кількості яєць відняти 5% — бовтунів.

Чому ж дорівнюють 5% від 1500:

$$\frac{1500}{100}\times 5=75 \text{ яєць.}$$

Можна написати й інакше:

$$1500\times 0{,}05=75 \text{ яєць.}$$

Виходить, на світ з'явиться $1500-75=1425$ курчат. Із них у середньому буде:

$$1425\times 0{,}51=725 \text{ курочок}$$
$$1425\times 0{,}49=698 \text{ півників}$$

От і все.

На птахофермі ми побачили випадок у новій ролі.

У цеху або в колгоспі йшлося про те, як знайти ймовірність, що цікавила нас, знаючи загальне число випадків.

А от зоотехнік розповіла дітворі, як, навпаки, визначити кількість курочок і півників, коли ймовірність їхньої появи вже відома. Це число називають математичним сподіванням — воно показує середнє значення випадкової величини.

У розв'язаній нами щойно задачі математичне сподівання, або скорочено МС,— це добуток числа усіх можливих випадків на ймовірність тих із них, які нас цікавлять. Неважко здогадатись, що 51%, 49% і 5% — це наші давні знайомі — імовірності.

Візьмемо формулу імовірності і визначимо за нею, чому дорівнює число сприятливих випадків, що цікавлять нас. Це й буде МС. У формулі воно стоїть у чисельнику.

Математичне сподівання = МС = число сприятливих випадків =
= загальна кількість рівноможливих × імовірність випадків.

Зазначимо, що МС, на відміну від імовірності, виражається завжди іменованим числом: кількістю курочок чи півників, числом метрів чи кілограмів.

За змістом математичне сподівання є середнє значення випадкової величини, яке ми визначаємо заздалегідь. Лишається тільки зачекати, поки випадок підтвердить наші обрахунки.

Математичне сподівання, як і ймовірність, потрібне для того, щоб впевнено керувати випадком. Про те, як математичне сподівання допомагає обрати правильне рішення, ви дізнаєтеся з наступного розділу.

ВАНТАЖНІ МАШИНИ ДЛЯ... СИРОСТІ

Трапилося це давно, ще коли я вчився у восьмому класі. Мені доручили замовити вантажну машину, щоб перевезти дрова з лісоскладу до школи: із дня на день мали вдарити морози.

З автобази обіцяли прислати одну тритонку. Слід було встановити, скільки треба зробити рейсів, щоб перевезти дрова.

На складі нам виділили стіс дров завдовжки 6 м, завширшки 2 м і заввишки 3 м. Завідуючий складом сказав, що два кубічні метри дров важать одну тонну.

Подібну задачу ми розв'язували свого часу з арифметики. Є вона й досі у підручнику для 5—6 класів. От розв'язання задачі з дровами на три питання.

1) Який об'єм займає стіс дров?

$$6 \text{ м}\times 2 \text{ м}\times 3 \text{ м}=36 \text{ кубічних метрів.}$$

2) Скільки важать дрова?

$$36 \text{ куб. м} : 2\,\frac{\text{тонна}}{\text{куб. м}}=18 \text{ тонн.}$$

3) Скільки треба машин (або рейсів однієї машини), щоб перевезти дрова?

$$18 \text{ тонн} : 3 \text{ тонни}=6 \text{ машин (рейсів).}$$

Я замовив 6 рейсів і... прорахувався.

Події розвивалися так. Коли тритонка приїхала на склад і школярі готові були накидати, як і належало, 6 кубометрів дров (одну шосту загального об'єму), шофер запротестував:

— Не дам гробити машину. Більше трьох тонн не візьму.

Я став пояснювати йому, що шість кубометрів дров — це якраз і є три тонни, та шофера переконати було далеко не просто. (Як згодом ми довідалися, він заочно вчився в інституті і добре знав математику.)

Весь розрахунок грунтувався на тому, що на одну тонну припадає два кубометри дров. Так сказав завскладом. Та про які дрова йшлося? Одне діло — дрова сухі і зовсім інше — сирі. Сухих дров на одну тонну йде три кубометри, сирих — лише один. Завскладом загалом не помилявся. В середньому справді виходить:

$$\frac{3+1}{2}=2\,\frac{\text{куб. м}}{\text{тонна}}.$$

Можливість (ми б тепер сказали — ймовірність) того, що дрова о цій порі року сирі — 50% (або 0,5). Визначимо ж, скільки може бути у стосі тих і тих дров.

Іншими словами: чому дорівнює математичне сподівання (МС) тих і тих дров?

МС сирих дров $=36$ куб. м $\times 0{,}5=18$ куб. м.
МС сухих дров $=36-18=18$ куб. м.

Тепер визначимо, скільки важать ці дрова.

Вага сирих дров $=18$ куб. м $: 1\,\frac{\text{куб. м}}{\text{тонна}}=18$ тонн.

Вага сухих дров $=18$ куб. м $: 3\,\frac{\text{куб. м}}{\text{тонна}}=6$ тонн.

Загальна вага дров $=6+18=24$ тонни.

Оскільки сирі й сухі дрова в стосі перемішані і на поліні не написано, яке воно, то це означає, що на одну машину припадатиме:

24 тонни : 6 рейсів $=4$ тонни.

Звичайно, на тритонку зайвої тонни вантажити не можна. Скільки ж треба зробити рейсів, щоб перевезти дрова?

24 тонни : $3\,\frac{\text{тонна}}{\text{рейс}}=8$ рейсів.

Вийшло непорозуміння: замість замовлених шести — вісім.

Два рейси потрібні були для того, щоб перевезти... спірість. На щастя, шофер виявився не лише добрим математиком, а й чудовим хлопцем. Він виручив нас, зробивши два зайві рейси в ім'я науки.

В ЯКІЙ РУЦІ?

Арифметика випадковостей, як і звичайна арифметика, має справу з додаванням та множенням. Про те, як додаються і множаться ймовірності, і піде мова.

Коли сідають за шашки або шахи, то передусім хтось із партнерів бере в одну руку білу шашку чи пішак, у другу — чорну, ховає руки за спину, ворожить там щось і питає: «В якій руці?» Так розігрують, кому грати «білими», а кому «чорними».

Зрештою, питання в «в якій руці?» ставлять і тоді, коли ніхто ні в що не збирається грати.

Наприклад, вам з товаришем на двох дістався лише один квиток до театру. Кому ж із вас піти? Допомагає запитання: «В якій руці?»

Волейбольний матч. Кому на якому боці майданчика починати гру? Знову: «В якій руці?»

Читач, напевне, вже збагнув, що «в якій руці?» — це той самий невловимий випадок. Адже ніхто не може заздалегідь точно передбачити, в якій руці опиниться біла шашка чи якийсь заповітний жеребок.

А що тут може вдіяти арифметика випадковостей? Виявляється, дещо може. Поставимо їй кілька запитань.

З а п и т а н н я п е р ш е. Яка ймовірність вгадати, в якій руці жеребок?

Відповідає на це формула ймовірності.

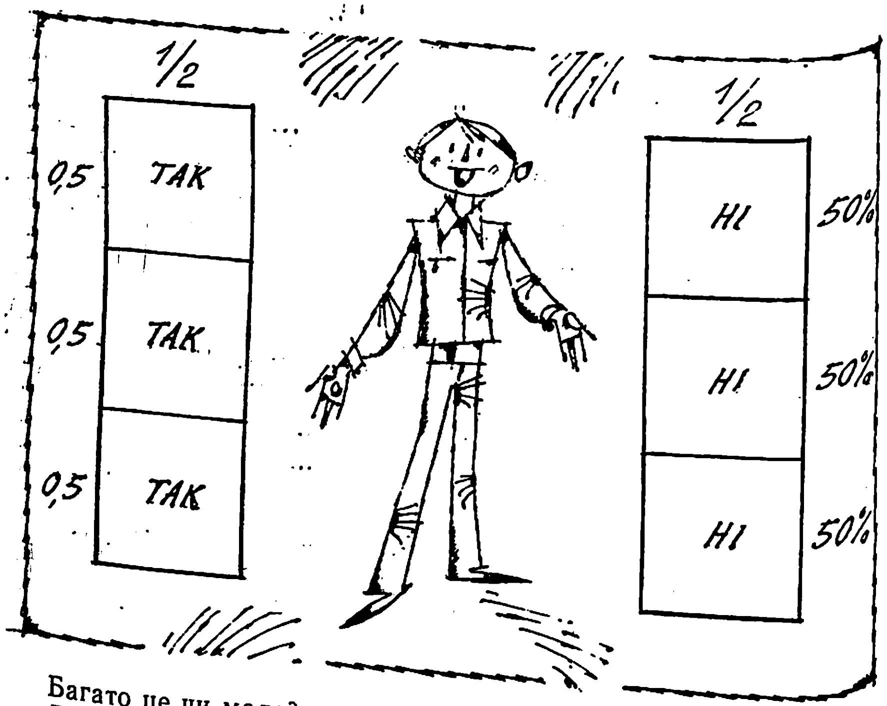
Загальне число рівноможливих випадків — 2 (перший — вгадав, другий — не вгадав).

Число сприятливих випадків — 1 (вгадав).

$$\text{Імовірність угадати, в якій руці жеребок}=\frac{\text{число сприятливих випадків}}{\text{загальне число рівноможливих випадків}}=\frac{1}{2}=0{,}5,\ \text{або } 50\%.$$

Так само знаходимо відповідь і на протилежне запитання: яка ймовірність не вгадати, в якій руці жеребок?

$$\text{Ймовірність не вгадати, в якій руці жеребок}=\frac{\text{число сприятливих випадків}}{\text{загальне число рівноможливих випадків}}=\frac{1}{2}=0{,}5,\ \text{або } 50\%.$$



Багато це чи мало?

Дивимося на «градусник». Ні багато, ні мало — рівно середина шкали. Шанси вгадати й не вгадати однакові. І це цілком справедливо. Саме тому таким чесним способом охоче й послуговуються. Ми, звичайно, виключаємо обман. Хоч він і буває, але теорії імовірностей не стосується.

Чи правильно ми користуємося жеребкуванням, відгадуючи «В якій руці?», можна легко перевірити, поставивши таке запитання.

Запитання друге. Яка ймовірність вгадати чи не вгадати, в якій руці жеребок?

Загальне число рівноможливих випадків, як і в першому запитанні, 2 (вгадав, не вгадав). Число сприятливих випадків — 2. Адже для даного запитання нас влаштовують обидва випадки: вгадав — не вгадав. За формулою ймовірності:

$$\text{Ймовірність вгадати чи не вгадати, в якій руці жеребок} = \frac{\text{число сприятливих випадків}}{\text{загальне число рівноможливих випадків}} = \frac{2}{2} = 1{,}0, \text{ або } 100\%.$$

Ця відповідь означає, що наш жереб завжди дає якийсь один із двох можливих результатів (або вгадав, або не вгадав),

тобто він спрацьовує безвідмовно, як то кажуть, «на всі сто».

Відповідаючи на друге запитання, ми, самі того не знаючи, застосували одну з основних теорем арифметики випадковостей — теорему додавання ймовірностей.

Звучить ця теорема приблизно так: імовірність того, що трапиться якась із двох подій, що взаємно виключають одна одну, дорівнює сумі ймовірностей цих подій.

Довести це досить просто. Згадаймо, як було знайдено ймовірність вгадати чи не вгадати, в якій руці жеребок. Ми взяли число випадків, що цікавлять нас,— 2 — і розділили його на число всіх можливих варіантів — теж 2. У відповіді одержали 1,0. Цього результату можна досягти й іншим шляхом.

Перепишемо розв'язок так:

$$\text{Імовірність вгадати чи не вгадати, в якій руці жеребок} = \frac{2}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.$$

Відповідаючи на перше запитання, ми визначили, що

$$\frac{1}{2} = \text{ймовірність не вгадати, в якій руці жеребок} = \text{ймовірності вгадати, в якій руці жеребок.}$$

Підставляючи в попередню формулу замість $1/2$ її значення, одержимо підтвердження теореми додавання ймовірностей:

$$\text{ймовірність вгадати чи не вгадати, в якій руці жеребок} = \text{ймовірність вгадати} + \text{ймовірність не вгадати, в якій руці жеребок.}$$

Це якраз і слід було довести.

А тепер складніше запитання.

Учасникові шкільного шахового турніру доводиться аж двічі вгадувати «В якій руці?». Цього дня він по черзі зустрічається з двома суперниками.

Запитання третє: Яка ймовірність двічі вгадати, в якій руці жеребок?

Знову формула ймовірності. Але загальне число рівноможливих випадків тут буде інше. Воно дорівнює 4 — за числом можливих результатів двох відгадувань:

— першого разу вгадав, а другого — не вгадав;
— першого разу не вгадав, а другого — вгадав;
— першого разу вгадав і другого — вгадав;
— першого разу не вгадав і другого — не вгадав.

Число сприятливих випадків — лише один із цих варіантів, той, в якому пощастило обидва рази.

Застосуємо формулу ймовірності.

$$\text{Ймовірність двічі вгадати, в якій руці жеребок} = \frac{\text{число сприятливих випадків}}{\text{загальне число рівноможливих випадків}} = \frac{1}{4} = 0{,}25, \text{ або } 25\%.$$

Це невелика ймовірність. Через те того, хто так здорово двічі підряд вгадує «В якій руці?», і називають щасливчиком.

Спробуємо переписати останній розрахунок трохи інакше:

$$\text{ймовірність двічі вгадати, в якій руці жеребок} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \text{імовірність вгадати, в якій руці жеребок} \times \text{імовірність не вгадати, в якій руці жеребок.}$$

Виявляється, розраховуючи ймовірність двічі вгадати, в якій руці жеребок, ми непомітно для себе перемножили ймовірності вгадування жеребка для першого й другого разу. Так ми застосували ще одну основну теорему арифметики випадковостей — т е о р е м у м н о ж е н н я й м о в і р н о с т е й.

Суть цієї теореми можна виразити так: імовірність того, що подія трапиться двічі, дорівнює добуткові ймовірностей появи цієї події вперше і вдруге. Або (в загальнішому вигляді): ймовірність спільної появи яких-небудь незалежних подій дорівнює добуткові ймовірностей цих подій.

Незалежними події називають у тому разі, коли через появу однієї з них ймовірності решти не змінюються.

Тепер ми готові до відповіді на останнє, найскладніше з наших запитань.

З а п и т а н н я ч е т в е р т е. Яка ймовірність бодай один раз вгадати, в якій руці жеребок, при двох вгадуваннях?

Число всіх можливих випадків при двох угадуваннях ми вже знаємо. Воно дорівнює 4 — за числом можливих випадків — варіантів:

— першого разу вгадав, а другого — не вгадав;
— першого разу не вгадав, а другого — вгадав;
— першого разу вгадав і другого — вгадав;
— першого разу не вгадав і другого — не вгадав.

Число випадків, що цікавлять нас, дорівнює тут 3. Нам потрібні лише ті випадки, коли є вгадування. Це:

— першого разу вгадав, а другого — не вгадав;
— першого разу не вгадав, а другого — вгадав;
— першого разу вгадав і другого — вгадав.

За формулою ймовірності:

$$\text{ймовірність бодай раз угадати, в якій руці жеребок, при двох вгадуваннях} = \frac{\text{число сприятливих випадків}}{\text{загальне число рівноможливих випадків}} = \frac{3}{4} = 0{,}75, \text{ або } 75\%.$$

Цей самий результат, щоб не перебирати варіантів (а їх може бути дуже багато), спробуємо одержати з допомогою вже відомих нам теорем складання й множення імовірностей.

Спочатку, за теоремою додавання, одержуємо:

ймовірність бодай раз угадати, в якій руці жеребок, при двох угадуваннях =
= ймовірність угадати першого разу і не вгадати другого + ймовірність не вгадати першого разу і вгадати другого + ймовірність угадати двічі.

Ми застосували теорему додавання, оскільки нас влаштовує будь-який із трьох варіантів подій, що їх імовірності ми додаємо (або перший, або другий, або третій).

Імовірності ж подій при кожному варіанті можна розрахувати за теоремою множення. Наприклад, для першого варіанту:

Імовірність угадати першого разу і не вгадати другого =
= ймовірність угадати, в якій руці жеребок, першого разу × ймовірність не вгадати, в якій руці жеребок, другого разу.

Ми тут користуємося теоремою множення, оскільки нам треба, щоб відбулися обидві події, імовірності яких ми перемножуємо (і перша і друга).

Розкриваючи в такий спосіб значення всіх складових, ми прийдемо до розгорненої формули:

імовірність бодай раз угадати, в якій руці жеребок, при двох угадуваннях =
= імовірність угадати, в якій руці жеребок, першого разу × імовірність не вгадати, в якій руці жеребок, другого разу +
+ імовірність не вгадати, в якій руці жеребок, першого разу × імовірність угадати, в якій руці жеребок, другого разу +
+ імовірність угадати, в якій руці жеребок, першого разу × імовірність угадати, в якій руці жеребок, другого разу.

Формула вийшла хоч і довга, але проста (це все-таки краще, ніж навпаки). Підставимо тепер у неї цифри й побачимо, що в остаточному підсумку все вийшло як слід:

$$\text{імовірність бодай раз угадати, в якій руці жеребок, при двох угадуваннях} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 0{,}75, \text{ або } 75\%.$$

75% — імовірність досить вагома. Вона сповнює надією серця всіх, хто тягне жеребок, підводить наукову базу під відоме твердження оптимістів:

«Не пощастило цього разу, пощастить наступного».

Задовольнитися цим твердженням доведеться й тим читачам, яким розмова про теореми арифметики випадковостей видалася трохи заскладною.

Їм, можливо, пощастить у наступній розповіді.

КУБИНСЬКА МАРКА З ПЕЧАТКОЮ

Теореми додавання і множення ймовірностей, з якими ми щойно ознайомилися, для арифметики випадковостей означають те саме, що правила додавання і множення — для арифметики звичайної. Варто з'явитися випадковій події, як одразу ж необхідна їхня допомога.

Пригадую такий випадок.

Якось до нас зайшов сусідський хлопчик Миколка, щоб подивитися на мою колекцію марок. Невдовзі, прощаючись, я вирішив зробити йому подарунок.

— Яку б марку ти хотів мати? — спитав я Миколку.

— Та мені однаково, — затнувшись, відповів хлопчик, — а втім, найкраще Кубу або В'єтнам. Цих країн у мене майже нема...

Марки-двійники лежали в мене купою у картонній коробці.

— Подивимося, чи одразу тобі пощастить, чи ні,— мовив я і вже зібрався було запустити пінцет у коробку по марку, як Миколка запитав:

— А чому вас бере сумнів, чи пощастить мені?

— Гаразд, поясню. Думаю, що дізнатися про це так само цікаво, як і збирати марки.

Я відклав пінцет, і ми з Миколкою поринули у світ незвичайної арифметики — арифметики випадковостей.

Уявімо собі, що в коробці лежить 130 марок, з них 78 кубинських і 26 в'єтнамських. Я хочу навмання взяти пінцетом із коробки першу-ліпшу марку. Яка ймовірність, що ця марка виявиться «Кубою» чи «В'єтнамом»?

Тут два варіанти: один — витягти «Кубу», другий — витягти «В'єтнам».

Спочатку за формулою імовірності знаходимо ймовірність одного варіанту:

$$\text{імовірність витягти «Кубу»} = \frac{\text{число сприятливих випадків}}{\text{загальне число рівноможливих випадків}} = \frac{78}{130} = 0{,}6, \text{ або } 60\%.$$

Так само знаходимо і ймовірність іншої події. Слід тільки врахувати, що в коробці вже лишилося 129 марок.

$$\text{Імовірність витягти «В'єтнам»} = \frac{26}{129} = 0{,}2, \text{ або } 20\%.$$

Імовірність того, що трапиться один із двох варіантів — «Куба» чи «В'єтнам»,— можна знайти за теоремою додавання ймовірностей:

$$\text{імовірність витягти «Кубу» або «В'єтнам»} =$$
$$= \text{імовірність витягти «Кубу»} + \text{імовірність витягти «В'єтнам»} =$$
$$= 0{,}6 + 0{,}2 = 0{,}8, \text{ або } 80\%.$$

— Тепер на досвіді переконаємося, чи правильно ми все розрахували, — запропонував я. — Вісімдесят процентів — велика ймовірність, майже напевне тобі одразу пощастить.

І справді, з першої ж спроби випала красива кубинська марка.

Марка була з печаткою, і я вирішив задати допитливому філателістові ще одну задачу.

— А знаєш,— мовив я,— у мене в коробці приблизно чверть усіх марок чистих, без печаток. Поміркуймо, яка була ймовірність витягти «Кубу» чи «В'єтнам» без печатки.

Та й цей розрахунок не дуже складний.

Тут імовірність одного варіанту — це можливість витягнути «Кубу» чи «В'єтнам». Нам відомо, що вона дорівнює 0,8.

Імовірність іншого варіанту — це можливість витягти чисту марку з коробки. Її ми теж знаємо — вона дорівнює 0,25.

А ймовірність спільного визначення двох цих варіантів знаходять за теоремою множення ймовірностей:

$$\text{ймовірність витягти «Кубу» чи «В'єтнам» без печатки} =$$
$$= 0{,}8 \times 0{,}25 = 0{,}2, \text{ або } 20\%.$$

Це маленька ймовірність, тому Миколці й не дісталася марка без печатки.

* * *

Тепер ми вже дещо знаємо про арифметику випадковостей. Зустрічі з нею на заводі, в колгоспі, на птахофабриці не минули безслідно.

Виявляється, міру випадкового — ймовірність — можна додавати й перемножувати, як звичайні числа. Можна заздалегідь розрахувати, чого слід чекати від мінливого випадку.

Ми зрозуміли, як багато залежить від Випадку в світі, що нас оточує.

Зазирнемо у цей світ, ближче познайомимося з випадковостями там, де їх начебто найменше можна було сподіватися: в мовознавстві й літературознавстві, на дні народження і навіть у Ленінградському зоопарку.

...

Розділ 6

ВИПАДКОВОСТІ ТАЄМНИЧІ Й ВЕСЕЛІ,

у якому вдається прочитати шифрованого листа, встановити, чи знав Ленський теорію імовірностей, а також з'ясувати, чи можна водночас святкувати два дні народження, яка площа безлюдного острова, що таке Монте-Карло і як бомба могла влучити в єдиного в Ленінграді слона

ТАЄМНИЦЯ ШИФРУ

— Оце так штука!..

— Граматичні правила і раптом — імовірність!..

— Невже немає жодної науки без арифметики?..

Все це причулося мені, коли я дописав попередній розділ до кінця, до того місця, де обіцяв розповісти про випадковості в науці про мову.

...Переді мною лежить чудний лист. Це аркуш паперу, густо списаний якимись загадковими знаками: кружальцями, трикутниками, квадратами, прапорцями. Ні на які літери ці знаки не схожі. Ось цей лист — на малюнку. Судіть самі. Лист опинився в мене на столі випадково. Якось я купив кілька старих книжок. В одну з них невідомо ким і коли було вкладено конверт із цим листом.

Хто ж буває байдужий, коли зустрічається з Таємницею?

Що тут написано? Напевно, хтось хотів повідомити щось важливе, якийсь секрет. А щоб уберегти секрет, зашифрував листа.

Я почав розмірковувати. Як можна зашифрувати те, що написано? Мабуть, невідомий автор листа придумав для кожної літери алфавіту свою позначку. Наприклад, літеру *А* позначив трикутником, *Б* — кружечком, *В* — прапорцем і так далі. Вийшов шифр — код. А з таким кодом уже неважко переписати будь-якого листа.

Без коду ніхто не зможе здогадатися, які було придумано знаки для всіх літер алфавіту. Тільки чарівник може дізнатися, що думає інша людина.

Виявляється, такий чарівник є. Цей маг і чародій — імовірність.

Уважні люди давно помітили, що кожна літера алфавіту в середньому повторюється у книжках однаково часто.

Коли взяти, наприклад, зібрання творів Панаса Мирного і підрахувати, яку частину всіх літер складає, скажімо, літера *А*, то виявиться, що 0,07, або 7 процентів.

Те саме буде і для творів Головка, Коцюбинського і навіть для Української радянської енциклопедії.

Та що означає цифра 0,07? Звідки її взято?

Мабуть, тут треба порахувати всі літери у якійсь книжці й окремо підрахувати, скільки разів зустрічалася в ній літера *А*. І потім знайти потрібну нам частоту вживання.

$$\text{Частота вживання літери } A \text{ в книжці} = \frac{\text{число літер } A}{\text{число всіх літер}} = 0{,}07, \text{ або } 7\%.$$

Знайома формула, чи не так?

Ми вже знаємо, що майже такий самий вигляд має формула ймовірності. Та тільки там у чисельнику й знаменнику стояли числа сприятливих і всіх рівноможливих випадків, а тут — кількість літер. В обох випадках суть одна.

Подібність цих формул наводить нас на думку: а чи не можна заздалегідь обчислити частоту вживання літери *А* в якихось кількох книжках і потім скористатися нею як імовірністю появи цієї літери в будь-якій книжці, написаній, скажімо, українською мовою. І навіть... у листі.

Ось ключ до рішення. Цим ключем я й скористався. Насамперед я спробував дізнатися, чому дорівнюють імовірності появи різних літер алфавіту. Учені вже давно полічили ці цифри, які, далі ми побачимо, потрібні людям різних професій.

Виявляється, дуже часто зустрічається в книжках літера *О*. Імовірність її появи дорівнює 0,094. Потім іде *А* — 0,072, далі *Н* — 0,065 та *И* — 0,061 і т. д. Та найчастіше все-таки повторюється не якась літера, а пробіл між словами. Імовірність появи пробілу 0,17.

Ось таблиця, складена вченими.

Після цього я сів за роботу.

Моє завдання полягало в тому, щоб підрахувати, як часто кожен із знаків з'являється у таємничому листі. Робота ця не дуже важка, хоч і вимагає певної уваги й часу.

ЧАСТОТА ВЖИВАННЯ ЛІТЕР УКРАЇНСЬКОГО АЛФАВІТУ В ТЕКСТІ

Літери алфавіту	Частота	Літери алфавіту	Частота
А	0,072	О	0,094
Б	0,017	П	0,029
В	0,052	Р	0,047
Г	0,016	С	0,041
Д	0,035	Т	0,055
Е	0,047	У	0,04
Є	0,008	Ф	0,001
Ж	0,009	Х	0,012
З	0,023	Ц	0,006
И	0,061	Ч	0,018
І	0,057	Ш	0,012
Ї	0,006	Щ	0,001
Й	0,008	Ю	0,004
К	0,035	Я	0,029
Л	0,036	Ь	0,029
М	0,031	Пробіл	0,17
Н	0,065		

Для цього я полічив, скільки знаків у листі, а потім — кожного окремо. За відомою вам формулою визначив частоту їхньої появи в листі. Одержану частоту я порівняв із даними таблиці і вже скоро твердо знав, що знак ⚐ — це пробіл, а знак ∇ мав ту саму частоту, що й літера *О*.

Тільки-но вдалося дізнатися, що прапорець — знак пробілу, в листі одразу з'явилися окремі слова.

На жаль, далі розшифровка посувалася складніше — з'ясувалося, що багато знаків у листі мають однакову частоту.

Та я не розгубився. Мов і не було нічого, виписував собі всі літери алфавіту, що можуть відповідати шифру. Це ті літери, імовірності яких однакові або майже не відрізняються від частоти відповідних знаків (не більше ніж на 0,01). Незначна відмінність не повинна нас бентежити, адже ми знаємо, що ймовірність — це середня величина, і в кожному окремому випадку можуть бути незначні відхилення.

А далі, виписавши слова, що складалися з однієї літери, і застосувавши знання правил граматики, згідно з якими одні літери можуть з'являтися лише у певних місцях і сусідстві, згадуючи двоскладові слова, комбінуючи і підставляючи, я незабаром уже мав таку таблицю.

РОЗГАДАНІ ЗНАКИ ШИФРУ

Літери алфавіту	Знаки шифру	Літери алфавіту	Знаки шифру
А	⊙	Н	⊞
Б	◓	О	▽
В	◬	П	⊂
Г	⧨	Р	⋈
Д	△	С	⍑
Е	⋈	Т	⟐
Є	⊠	У	⊟
Ж	⊏	Ф	⊼
З	⊠	Х	◇
И	⊖	Ц	⦶
І	D	Ч	⊡
Ї	⍊	Ш	⊕
Й	Σ	Щ	⊠
К	⧗	Ю	○
Л	⊃	Я	⊞
М	□	Ь	⊠

Нарешті настає довгожданий момент повної розшифровки листа. Розставимо всі літери по місцях і прочитаймо текст на малюнку. Він, щоправда, без пунктуації і переносів, але цілком зрозумілий і начебто... знайомий. Десь ми цю таємничу нісенітницю вже чули.

Ну звичайно. Це ж відомий лист Тома Сойєра з книжки «Пригоди Гекльберрі Фінна» Марка Твена.

Том, щоправда, відправляв його у незашифрованому вигляді, та мені здається, якби він мав напохваті шифр, як у нас, усе було б зроблено як слід. Так і вчинив безіменний власник конверта, знайденого в старій книжці, жартома зашифрувавши лист Тома Сойєра.

* * *

— Так це була гра...— розчаровано мовив один хлопчина, якому я розповів про таємницю шифру.

Авжеж, гра, але досить повчальна. Вона наводить на думку, що без математики, без теорії ймовірностей нічого й сподіватися розв'язати багато важливих задач.

І справді, щоб прочитати старовинні рукописи, тексти, написані забутими і нікому не відомими нині мовами, глибоко вивчити сучасні мови, слід вдатися до послуг математики.

Кожному зрозуміло, як важливо на війні розгадати шифр ворога, зуміти вивідати його секрети. І це завдання під силу науці про мову в союзі з математикою.

Математика плюс мовознавство зробили можливим машинний переклад з однієї мови на іншу.

Щоб машина могла «зрозуміти» людські слова, треба насамперед знайти з нею «спільну мову». Мовою, що однаково доступна як для людини, так і для машини, є мова цифр.

Як ми щойно бачили на прикладі шифрованого листа, мові властиві цілком певні математичні закономірності. Їх вивчає молода наука, що виникла на межі математики й лінгвістики,— математична лінгвістика... З її допомогою електроннообчислювальні машини і перекладають з однієї мови на іншу.

Навіть такий не математичний предмет, як література, і той іноді розкривається по-новому у світлі теорії імовірностей. Спробуємо простежити це в наступній розповіді.

ЧИ ЗНАВ ЛЕНСЬКИЙ ТЕОРІЮ ІМОВІРНОСТЕЙ?

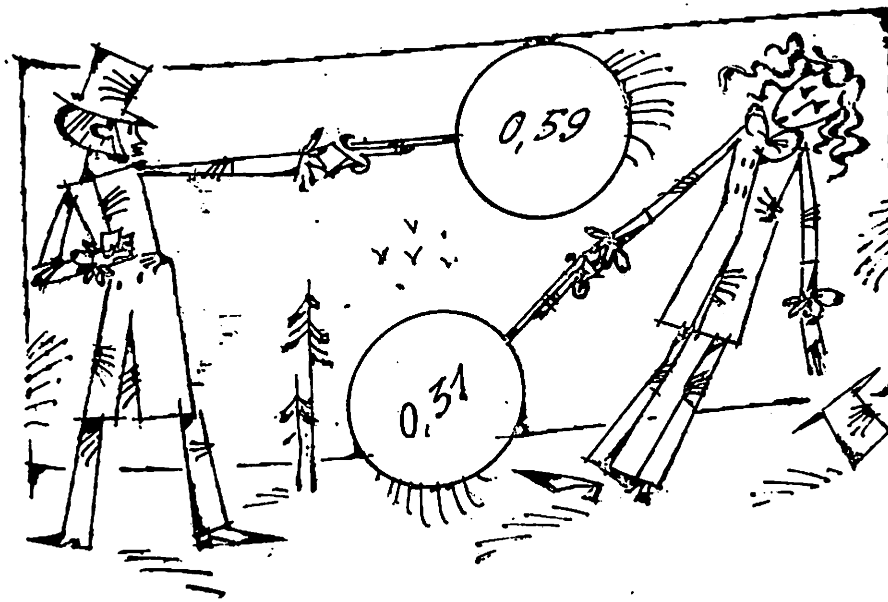
Теорія імовірностей — порівняно молода наука. Мабуть, через це її і не вивчають досі у школі, хоч у плані експерименту викладання подекуди почалося.

А в часи О. С. Пушкіна теорія ймовірностей не була відома навіть освіченим людям. Поет Володимир Ленський, який вчився у славетному Геттінгенському університеті і з «Німеччини туманної привіз ученості плоди», не знав теорію імовірностей. Тим часом випадок відіграв у його житті фатальну роль.

Ось драматичні обставини його дуелі з Євгенієм Онєгіним, які Пушкін змалював з такими подробицями, що по них можна відновити картину поєдинку.

Останні сказано слова.
Ретельно кроків тридцять два
Зарецький виміряв умілий;
Плащі двобійники зняли
І пістолети узяли.
«Зіходьтесь!» і вони поволі
Пройшли спокійні, мовчазні,
Ще не підводячи пістоля,
Чотири кроки ті страшні,
Чотири сходини смертельні.
Як приписи велять дуельні,
Євгеній зброю підійняв
І націлятися почав.
Ще кроків п'ять — одна хвилина —
І Ленський теж підводить бронь,—
Та раптом вибухнув огонь.
Онєгін вистрілив... Година
Прийшла рокована: поет
Безмовно ронить пістолет[1].

[1] Тут і далі переклад М. Рильського.



Супротивники на початку дуелі стояли на відстані 32 кроків один від одного. Потім за сигналом секунданта вони почали сходитися. Цілитися можна було, лише зробивши 4 кроки, коли відстань скорочувалась до 24 кроків ($32-4\times2$).

Свій смертельний постріл Онєгін зробив, коли було пройдено ще по 5 кроків, з відстані 14 кроків ($24-5\times2$). Ленський цієї миті саме почав цілитися. Все вирішував Випадок...

Це дає нам змогу спробувати з допомогою арифметики випадковостей одержати відповідь на фатальне запитання, яке злетіло з вуст Ленського: «Впаду я, вражений стрілою, чи мимо пролетить вона...»

Мовою теорії імовірностей це запитання звучить трохи не так поетично. Який можливий результат поєдинку? Яка ймовірність того, що куля, випущена з пістолета Онєгіна, влучить у Ленського?

Щоб відповісти на ці запитання, звичайно, непогано було б знати, що за стрільці були наші герої. Поет нічого про це не каже. Вважатимемо для простоти, що вони стріляють приблизно однаково. Постріли, які вони можуть зробити з відстані 24 кроків, оцінимо ймовірністю влучання 0,1. А постріли з відстані 14 кроків — імовірністю 0,6. Ці цифри приблизно відповідають даним дуельних пістолетів, які були у вжитку за часів Пушкіна.

Вважатимемо, що постріли можливі лише на першому чи на останньому — п'ятому — кроці.

Припустимо також, що Ленський вирішив стріляти другим. Це цілком могло бути, судячи з його вдачі.

А тепер звернемося до арифметики випадковостей.

Насамперед розглянемо, яка ймовірність того, що Онєгін влучить у Ленського після першого ж кроку. Ми вже її оцінили. Вона дорівнює 0,1. Це досить незначна цифра, і, якби цим кроком обмежувалася справа, наш герой майже напевно залишився б живим.

Та, як ми знаємо, смертельний постріл можна було зробити й на п'ятому кроці.

Яка ж імовірність того, що після п'ятого кроку куля влучить у Ленського?

«Після п'ятого» означає: або на першому, або на п'ятому. Така ймовірність, як ми знаємо, за теоремою додавання ймовірностей дорівнює сумі ймовірностей влучання на першому і на п'ятому кроці.

Ймовірність влучання Онєгіна в Ленського на дуелі = ймовірність влучання Онєгіна на першому кроці + ймовірність влучання Онєгіна на п'ятому кроці.

Перший з доданків нам уже відомий — 0,1. Над другим слід поміркувати.

Ми спочатку встановили, що на п'ятому кроці стрільба Онєгіна оцінюється ймовірністю 0,6. Але для того, щоб постріл з такою ймовірністю було зроблено, треба, по-перше, щоб Ленський до цього часу лишився живим — адже Онєгін міг убити його на першому ж кроці, а по-друге, щоб живим був і сам Онєгін — у нього теж є деякий шанс загинути, не ступнувши більше одного кроку.

Отож влучання в Ленського на п'ятому кроці вимагає трьох подій: Онєгін на момент пострілу живий; Ленський — теж; Онєгін влучає в Ленського.

Імовірність сукупності всіх цих подій разом, як ми знаємо, за теоремою множення ймовірностей, дорівнює добуткові ймовірностей цих подій.

Імовірність влучання Онєгіна в Ленського на п'ятому кроці = ймовірність того, що Онєгін живий × ймовірність того, що Ленський живий × оцінка ймовірності влучання Онєгіна на п'ятому кроці.

Оцінка ймовірності влучання Онєгіна в Ленського на п'ятому кроці нам відома — 0,6.

Імовірність того, що Ленський на мить пострілу Онєгіна на п'ятому кроці живий, можна знайти як імовірність того, що вбивства на першому кроці не буде:

$$1-0{,}1=0{,}9.$$

При розрахунку ймовірності того, що Онєгін також житиме на п'ятому кроці, слід узяти до уваги, що Ленський може в нього вистрелити на першому кроці, та тільки якщо Онєгін на цьому кроці схибить. Адже Ленський завжди стріляє другим. Тому ймовірність того, що Онєгін доживе до п'ятого кроку, дещо більша, ніж у Ленського, і дорівнює

$$1-0{,}9\times(1-0{,}9)=1-0{,}09=0{,}91.$$

У дужках тут імовірність того, що Ленському на першому кроці не вдається вистрілити, а від одиниці ми віднімаємо ймовірність влучання Ленського в Онєгіна на першому кроці з урахуванням цієї обставини.

Тепер можна, підставивши всі ці значення, написати:

Імовірність влучання Онєгіна в Ленського на п'ятому кроці $=0{,}91\times0{,}9\times0{,}6=0{,}49.$

І далі:

Ймовірність влучання Онєгіна в Ленського на дуелі = ймовірність влучання Онєгіна на першому кроці + ймовірність влучання Онєгіна на п'ятому кроці $=0{,}1+0{,}49=0{,}59.$

Так само розрахуємо ймовірність влучання Ленського в Онєгіна на дуелі:

Ймовірність влучання Ленського в Онєгіна на дуелі = ймовірність влучання Ленського на першому кроці + ймовірність влучання Ленського на п'ятому кроці.

Ймовірність влучання Ленського на першому кроці з урахуванням його з пострілом ми вже знаємо — 0,09.

Припізнення Ленського з пострілом позначиться і на розрахунках п'ятого кроку. Адже в нього мало шансів залишитися на момент свого пострілу живим.

Імовірність влучання Ленського в Онєгіна на п'ятому кроці = ймовірність того, що Ленський живий × ймовірність того, що Онєгін живий × оцінка ймовірності влучання Ленського на п'ятому кроці $=(1-0{,}59)\times0{,}91\times0{,}6=0{,}22.$

І нарешті:

Ймовірність влучання Ленського в Онєгіна на дуелі $= 0{,}09 + 0{,}22 = 0{,}31$.

Тепер у нас достатньо відомостей, щоб висвітлити обставини трагедії, дати відповідь на питання про можливий результат поєдинку.

Імовірність того, що Ленський загине від кулі з пістолета Онєгіна, дорівнює 0,59. Це досить велика ймовірність. Її грізний смисл стане зрозумілішим, коли сказати, що подія з такою ймовірністю відбувається 6 разів з 10. Навряд чи хтось із нас сів би у поїзд, якби на нього чекала подібна чи навіть набагато менша ймовірність катастрофи.

Імовірність влучання в Онєгіна значно, майже вдвічі, менша — 0,31.

Отже, Ленський був фактично приречений ще до дуелі.

Та все-таки ми недаремно пригадали цей варварський спосіб владнання непорозумінь.

Наші викладки, виявляється, цілком підходять для багатьох розрахунків, які можуть згодитися і в сучасному житті.

Що таке, наприклад, перестрілка в бою, як не велика дуель? На дуель схожі й деякі інші воєнні чи мирні випадкові явища. Отож досвід, набутий нами на дуелі, не пропаде марно.

А тепер перейдемо від похмурої картини безглуздого смертовбивства до радісної події — дня народження однокласників.

СВЯТКУЙМО РАЗОМ ДЕНЬ НАРОДЖЕННЯ

Почалося все з того, що хтось запропонував: коли в якихось двох учнів дні народження збіжаться, влаштовувати спільне свято всім класом.

Ідея сподобалась. Але декого взяв сумнів, чи є в класі хоч двоє, що народилися в один день? Учні почали розпитувати коли народився. Для цього вдамося до теорії ймовірностей.

Тим часом можна відповісти на це, навіть не знаючи, хто коли народився. Для цього вдамося до теорії ймовірностей.

Спочатку визначимо ймовірність святкування дня народження якогось школяра в один із днів року.

Тут число всіх можливих випадків — це число можливих днів народження на рік — 365. Число випадків, що цікавлять нас,— днів народження однієї людини на рік — теж 365.

Імовірність святкування дня народження якимось школярем в один із днів року $= \frac{365}{365} = 1$.

Справді, можна напевно сказати, що будь-який школяр протягом року відзначить свій день народження.

Тепер візьмемо другого школяра і знайдемо ймовірність того, що його день народження не збігається з днем народження першого.

Число всіх можливих випадків — днів народження в році — залишається тут, звичайно, тим самим — 365, а от число випадків, що нас цікавлять, зменшується на 1 — адже той день, коли свята можуть збігатися, треба відкинути. Отже:

Ймовірність, що день народження другого школяра не збігається з днем народження першого, $= \frac{365-1}{365} = \frac{364}{365}$.

Потім візьмемо будь-якого третього школяра і так само обчислимо:

Ймовірність, що день народження третього школяра не збігається з днем народження першого й другого, $= \frac{365-2}{365} = \frac{363}{365}$.

І далі для всіх у тому ж дусі. Потім поцікавимося: а яка ймовірність того, що і в першого, і в другого, і в третього школяра, в решти школярів дні народження не збіжаться? Ймовірності таких подій, як нам уже відомо, знаходять теоремою множення.

Ймовірність, що дні народження всіх однокласників не збіжаться, $= \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \ldots$

Число співмножників дорівнює числу учнів у класі. Якщо у класі, скажімо, 40 учнів, то число таких співмножників має бути 40. Варто їх перемножити, і вийде, що ймовірність незбігання днів народжень у всіх сорока школярів дорівнює 0,11.

А те, що нас цікавить — імовірність збігу,— ми знайдемо, як ви, мабуть, пам'ятаєте, шляхом віднімання цієї цифри від одиниці.

Імовірність збігу днів народжень у школярів $= 1 - 0{,}11 = 0{,}89$.

Це висока ймовірність. Отже, майже напевно у будь-якому класі, де 40 школярів, є учні, що народилися в один день.

А як бути тим класам, де число школярів 30 або, скажімо, 45 чоловік?

Тоді в пригоді стане готова таблиця ймовірностей збігу днів народження для різних груп людей — від 5 до 100 і більше чоловік. Як її скласти, ми вже знаємо.

За нашою таблицею виходить, що, наприклад, коли в класі або групі 30 чоловік, то з імовірністю 0,71 можна вважати, що дні народження бодай двох із них збіжаться.

Можна провести необхідну перевірку і святкувати загальні дні народження в будь-якому колективі.

У розповіді про день народження ми знову зустрілися з найдивовижнішою здатністю теорії ймовірностей — даром передбачення, провіщення майбутніх подій. Вдумайтесь: ми з вами, взагалі не знаючи, коли хто народився, можемо досить точно передбачити, в яких випадках дні народження різних людей збігаються! Так само теорія ймовірностей розв'язує численні практичні задачі: оцінює можливість одержання певної кількості бракованих деталей, заданого числа влучання у мішень, показує, на яку кількість покупців чекати у магазині і багато чого іншого.

Імовірності збігу днів народження у різних груп людей

Кількість чоловік у групі	5	10	15	20	21	22	23	24	25	30	40	50	60	70, 80, 90, 100 і більше
Ймовірності збігу днів народження бодай у двох чоловік із групи	0,03	0,12	0,25	0,41	0,44	0,48	0,51	0,54	0,57	0,71	0,89	0,97	0,99	близько 1,0

Імовірність — майстер на всі руки. Дні народження й граматика, погода й стрільба з пістолета, брак на виробництві і кількість півників та курочок, що вилупилися,— арифметиці випадковостей до всього є діло.

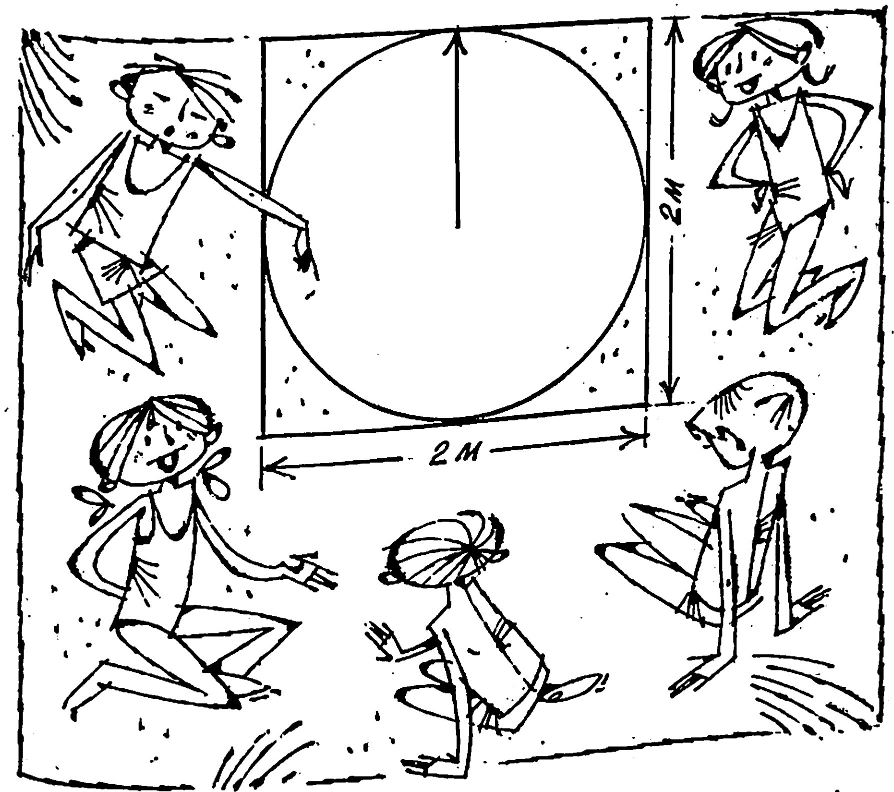
І, що особливо важливо, теорія ймовірностей може виручити там, де іншим наукам несила розв'язати потрібну задачу.

Ось яку цікаву історію мені нещодавно довелося почути.

ЙМОВІРНОСТІ НА БЕЗЛЮДНОМУ ОСТРОВІ

Школярі придумали незвичайне змагання.

На Дніпрі, під Запоріжжям, є кілька десятків невеликих острівців, на яких ніхто не живе. Кожному класу на час літніх канікул було виділено один такий безлюдний острів і постав-



лено завдання: обжити його, скласти карту, визначити розміри, площу і налагодити на острові похідне життя у дусі справжнього Робінзона. Клас, який найкраще упорається з цим завданням, одержить приз — туристську путівку до Москви.

Спочатку все йшло гаразд. Хлопчики й дівчатка збудували хижки, ловили рибу саморобними вудками, видобували вогонь з допомогою кременю.

Та не це було найважчим.

Найскладніше було виміряти острів і скласти його карту — адже школярі-робінзони за умовами змагання не мали ніяких вимірювальних приладів.

З честю вийти із складного становища зумів лише один клас.

Ось що придумали діти.

Визначити розмір острова вони вирішили з допомогою найстародавнішого вимірювального приладу — людських ніг.

Міра довжини — один крок. Виміри доручили «землемірові» — найдовгоногішому хлопцеві. Точної довжини його кроку ніхто, звичайно, не знав, але кожний із двадцяти восьми школярів, що висадилися на острів, мав про це свою думку. Було опитано всіх. Кожний назвав якусь цифру. Потім цифри склали й розділили на 28 — число мешканців острова. Вийшла середня припустима довжина кроку «землеміра». Та оскільки кожен приблизно визначив розмір кроку, то одержана середня величина виявилася середньою сподіваною до довжини кроку (доречно пригадати МС), дуже близькою до його справжнього розміру. Згодом, повернувшись на «Велику землю», школярі виміряли крок «землеміра» лінійкою і були вражені, як точно спрацював випадок.

Визначивши одиницю довжини, можна було б братися до роботи. «Землемір» пройшов острів уздовж і впоперек. Тепер уже неважко було визначити його розміри в різних напрямках. Острів виявився досить складної форми, не схожої ні на яку з простих фігур.

Завдання виміряти площу ускладнилося: адже тут уже не обійдешся, як для прямокутника, простим добутком довжини й ширини. Допомогла кмітливість і... арифметика випадковостей.

Діти намалювали на піску карту острова. Це виявилося не дуже складною справою: всі розміри острова повідомив «землемір».

Потім на карті навколо острова було намальовано звичайний прямокутник. Його сторони, як виявилось, мали розміри: довжина 500 метрів, а ширина 400 метрів. Усе це робилося, зрозуміло, в масштабі. Школярі вважали, що в 1 метрі 1 кілометр.

Передусім треба дати відповідь на питання: «У скільки разів площа острова менша за площу намальованого поряд прямокутника?». Можна написати:

$$\frac{\text{площа острова}}{\text{площа прямокутника}} = \frac{\text{площа острова}}{500\times400}.$$

Наші робінзони збагнули, що ця формула схожа на формулу ймовірності. Треба тільки зробити так, щоб площа острова була числом сприятливих випадків, які цікавлять нас, а площа прямокутника — числом усіх рівноможливих випадків. Для цього кожний із двадцяти восьми учасників гри 10 разів підряд відійшов від карти і потім, наблизившись до неї з заплющеними очима, тицьнув у неї пальцем. Підрахували, скільки було випадків, коли палець влучив у площу острова (випадки, що цікавлять нас), і скільки — в площу всього прямокутника, включаючи і вписаний у нього острів (всі можливі випадки).

Всього влучань в острів було 140, а в прямокутник влучали в усіх випадках: $10\times28=280$.

Тепер можна, з урахуванням формули ймовірності, написати:

$$\frac{\text{число сприятливих випадків}}{\text{загальне число рівноможливих випадків}} = \frac{\text{число влучань в острів}}{\text{число влучань у прямокутник}} = \frac{140}{280} =$$

$$= \frac{\text{площа острова}}{\text{площа прямокутника}} = \frac{\text{площа острова}}{500\times400}.$$

Звідси неважко обчислити:

$$\text{площа острова} = \frac{140\times500\times400}{280} = 100\,000 \text{ квадратних метрів} = 0{,}1 \text{ квадратного кілометра.}$$

Найважчу задачу змагання було розв'язано.

МОНТЕ-КАРЛО

Правда, одразу ж, як і завжди, знайшлися ті, кого взяв сумнів. А чи правильно ми обчислили площу острова? Як перевірити, чи нема помилки? Чи можна переконатися в цьому, не покидаючи безлюдного острова?

Виявилося, перевірити правильність такого розрахунку можна у досить цікавий спосіб.

Хтось тут же на піску намалював коло радіусом 1 метр, що вписувалося у квадрат, сторона якого дорівнювала двом метрам.

Потім усі школярі повторили те, що робили з картою острова: із заплющеними очима у довільних місцях торкалися нового малюнка.

Цього разу з'ясувалося, що всього у площу кола вони влучили 220 разів, а в усю площу квадрата — 280.

Знайомим способом обчислили площу кола.

$$\frac{\text{Площа кола}}{\text{Площа квадрата}} = \frac{\text{число влучань у коло}}{\text{число влучань у квадрат}} = \frac{220}{280}.$$

$$\text{Площа кола} = \text{площа квадрата} \times \frac{280}{220} = 2\times2\times\frac{220}{280} = 3{,}14 \text{ квадратних метра.}$$

Одержана цифра щось нагадує. Та це ж чудесне число π! З його допомогою можна розрахувати площу кола будь-якого радіуса. Якщо позначити радіус кола літерою R, то площа кола $=\pi R^2$.

При радіусі 1 метр площа його має дорівнювати: $\pi R^2 = 3{,}14\times1^2 = 3{,}14$ квадратних метра.

Все правильно. У цьому й полягала перевірка. Тепер усі побачили, що наш спосіб правильний. Інакше звідки б узятися чудесному числу?

Спосіб, яким було обчислено площу острова, в арифметиці випадковостей називають Монте-Карло. Назву свою він дістав на честь міста Монте-Карло, столиці князівства Монако, крихітної держави на півдні Європи.

Монте-Карло славиться своїм казино, в якому іде азартна гра в рулетку. Рулетка влаштована на зразок дзиги. Виграші і програші залежать від того, де зупиниться дзига-рулетка після того, як її розкрутити.

Яке ж відношення має розумний спосіб розрахунку невідомої площі до сумнівної розваги — марнування часу і грошей у казино?

На безлюдному острові, щоб одержати потрібний результат, було використано Випадок. Навмання влучаючи у межі острова на карті, було визначено його площу. Трохи раніше, за випадковими припущеннями про довжину кроку «землеміра», була встановлена його середня сподівана величина.

Його Величність Випадок панує і в казино Монте-Карло. Це він підказує рулетці, де зупинитись.

Зв'язки з Випадком саме й сприяють появі таких несподіваних на перший погляд тезок по імені Монте-Карло.

Час на острові збігав непомітно. От і настав день, коли робінзонів треба було везти додому на «Велику землю». Пароплав чекали приблизно на восьму вечора.

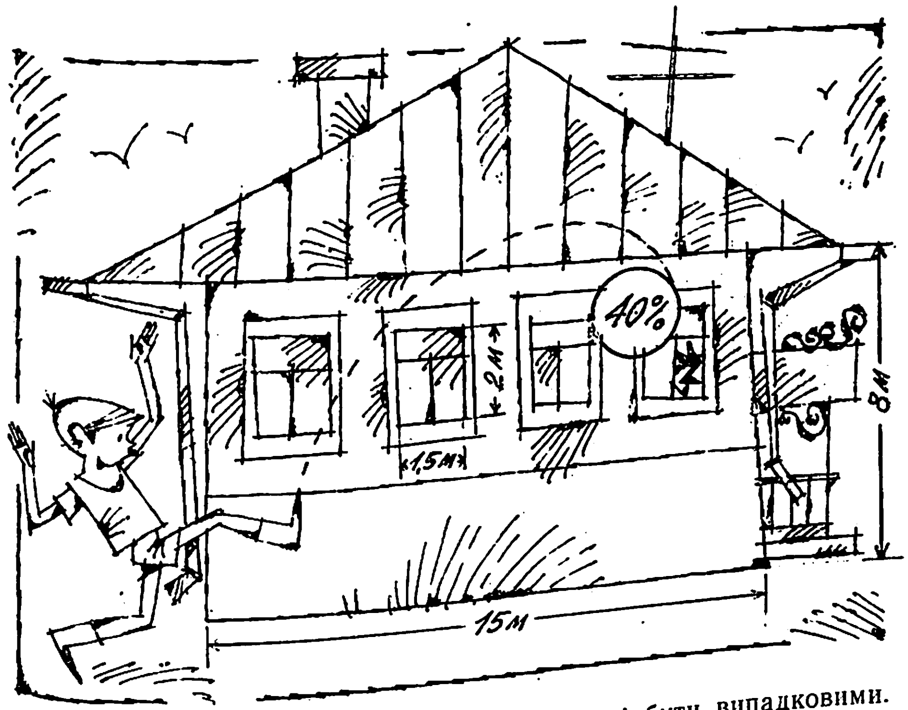
Псчало темніти. Годинників за умовами змагання у робінзонів не було. Та дуже кортіло узнати, чи скоро прийде пароплав. На щастя, така задача вже не становила для школярів особливих труднощів. Адже існує спосіб Монте-Карло!

Кожний приблизно назвав той час, який, на його думку, мав тоді бути. Всі назвали, звичайно, різні числа. Та з цих випадкових чисел неважко було знайти середній сподіваний час. Для цього числа додали і розділили на число школярів — 28.

Пароплав незабаром прийшов.

* * *

Щоб способом Монте-Карло виміряти довжину якогось предмета, визначити площу або час, зовсім не обов'язково шукати безлюдний острів. Все це можна зробити у класі, дома чи на вулиці. Для таких вимірювань не потрібні ніякі прилади, крім олівця й аркуша паперу, або шматка крейди і класної дошки. Арифметика випадковостей до ваших послуг. Пам'ятайте тіль-



ки, що її цифри, які ви називаєте, повинні бути випадковими. А для цього давайте їх незалежно одна від одної.

Теорія ймовірностей допоможе нам з'ясувати ще одну цікаву справу.

ЯК БОМБА МОГЛА ВЛУЧИТИ У ЄДИНОГО В ЛЕНІНГРАДІ СЛОНА?

Є у мене один юний приятель. Звуть його Васею.

Якось Вася прийшов до мене дуже засмучений і розповів, що під час гри у футбол він влучив м'ячем у вікно.

Найприкріше було те, що вікна такі маленькі, і от на тобі — в самісіньку шибку...

Щоб утішити хлопця, довелося вдатися до теорії ймовірностей.

— Якого приблизно розміру стіна будинку? — спитав я.

— Будинок двоповерховий, метрів вісім заввишки і метрів двадцять завширшки.

— А скільки в ньому вікон?

— Лише чотири.

— От тепер давай і підрахуємо.

Площа стіни $= 8$ м $\times 15$ м $= 120$ квадратних метрів.

Вважатимемо, що

площа вікна $=1{,}5$ м$\times 2$ м$=3$ квадратних метри.

А всі 4 вікна мають площу, яка дорівнює:

3 квадратних метри$\times 4=12$ квадратних метрів.

Тепер підрахуємо імовірність влучання у вікно при одному ударі м'яча в напрямку стіни.

Число всіх рівноможливих випадків припадає на площу стіни, а число сприятливих випадків, що ведуть до влучання у шибку,— на площу вікон.

$$\text{Імовірність влучання у шибку при одному ударі}=\frac{\text{число сприятливих ударів}}{\text{загальне число рівноможливих випадків}}=\frac{12}{120}=0{,}1.$$

— Скільки разів ти бив м'ячем у бік стіни за всю гру? — спитав я.

— Ну, разів чотири,— сказав Вася.

— От і полічи. Імовірність вибити шибку бодай одним із цих ударів можна обчислити за такою досить простою формулою теорії ймовірностей.

Імовірність влучання в шибку хоч один раз із чотирьох ударів$=$
$=1-(1-$ імовірність влучання у шибку з одного удару$)^4$.

Для того, щоб піднести до четвертого степеня те, що стоїть у дужках, досить просто двічі підряд піднести це число до квадрата.

Імовірність влучання у шибку хоч раз із чотирьох$=$
$=1-[(1-0{,}1)^2]^2=1-0{,}66=0{,}34.$

Для приблизного розрахунку можна обійтися вже зовсім простою формулою.

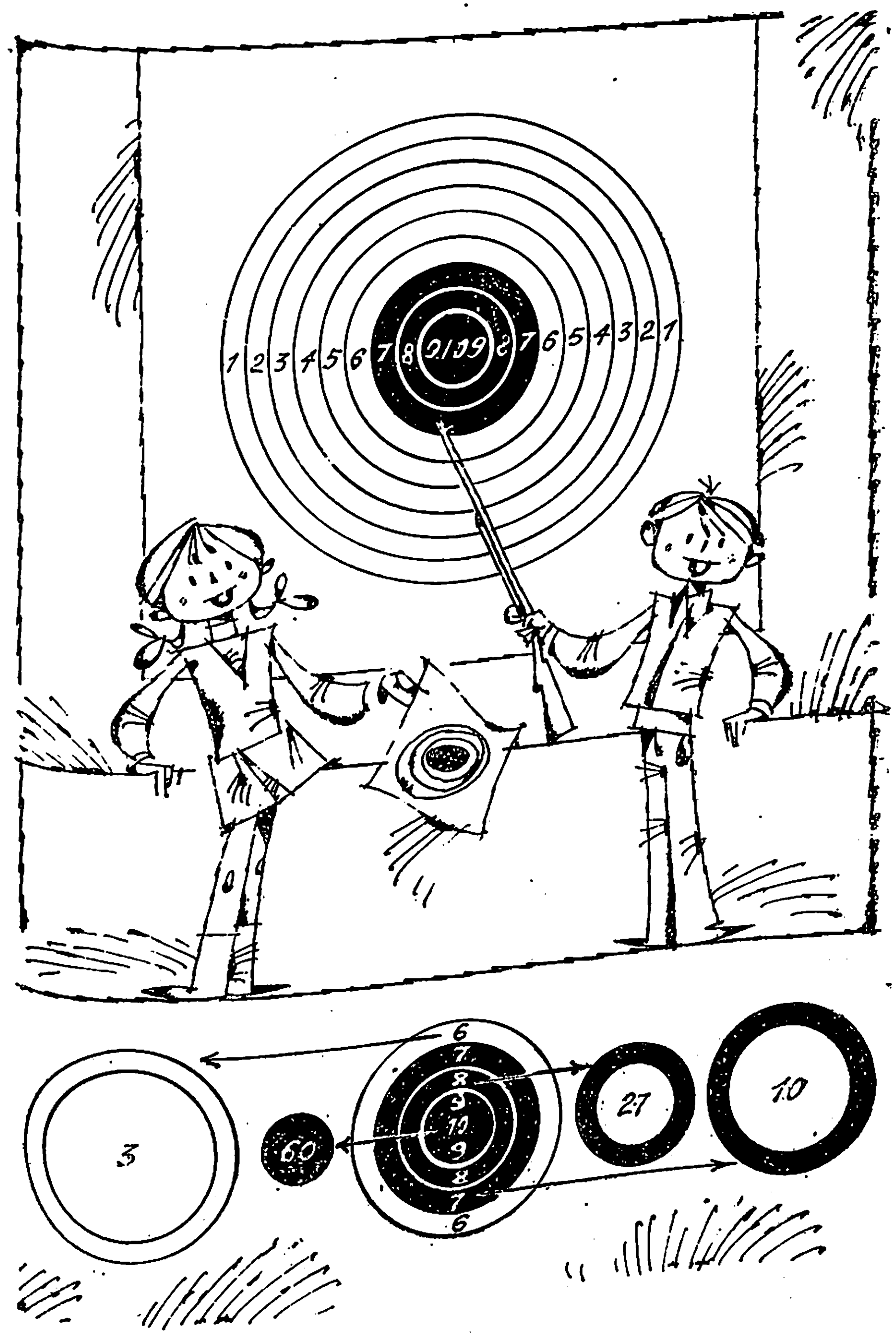
Імовірність влучання у шибку хоч раз із чотирьох ударів$=$
імовірність влучання у шибку з одного удару$\times 4=$
$=0{,}1\times 4=0{,}4$, або 40%.

Імовірність вийшла не дуже велика, але й бутерброд інколи падає маслом угору.

От ти й вибив шибку. Згідно з наукою.

Не знаю, чиї розрахунки виявилися переконливішими — мої чи Васиних батьків, але відтоді я більше не чув про вибиті шибки у нашому дворі.

Та після того Вася перейнявся до теорії ймовірностей якимось недобрим почуттям.



І от якось прибіг він до мене задоволений, весь аж сяє і просто з порога випалив:

— Збагнув я нарешті цю науку. Теж мені теорія! От був, кажуть, на весь Ленінград під час війни єдиний слон, і треба ж — саме в нього влучила бомба. Спробуйте-но розділити площу слона на площу Ленінграда — вийде пшик, імовірність — нуль. А бомба все-таки влучила. От вам і ймовірність.

Я зрозумів, що без невеличкого уроку з теорії ймовірностей не обійтися.

Наступної неділі я запросив Васю до тиру. Я знав, що він добре стріляє.

Справді, Вася із задоволенням 100 разів розрядив малокаліберну гвинтівку в мішень. Йдучи, ми забрали мішень із собою, і я попросив Васю підрахувати, скільки пробоїн було зроблено в кожному з кіл мішені.

Підрахунок тривав недовго:

— в «десятку» й «дев'ятку» влучило 60 куль,
— у «вісімку» влучило 27 куль,
— у «сімку» влучило 10 куль,
— у «шістку» влучило 3 кулі.

Найцікавішим тут було те, що більша частина влучань — 60 — припала на центральну, зафарбовану частину мішені, площа якої складала лише незначну частину (близько 16 процентів) від усієї площі мішені.

Саме цього я й чекав. Арифметика випадковостей не підвела. Можна було починати урок.

— Стріляти по мішені — це тобі не м'ячем шибки трощити,— почав я замість вступу.— Коли ви грали у футбол, ніхто, звичайно, не прагнув влучити у скло. М'яч вдарявся об стінку у випадкових місцях рівномірно по всій її площі.

Інша річ — стрільба по «мішені». Стрілець прагне влучити у «десятку», тому більшість куль у доброго стрільця і лягає навколо центру мішені.

Що далі від «десятки», то рідше й рідше можна зустріти пробоїну.

Як же, ти думаєш, у цьому випадку розраховується ймовірність влучити в якесь із кіл мішені, наприклад, у межах «дев'ятки»? Чи можна просто ділити площу заштрихованої частини мішені, що цікавить нас, на площу усієї мішені?

Звичайно, ні. Адже ми казали, що зафарбована площа становить лише 16 процентів від площі мішені, тоді як за формулою ймовірність влучань дорівнюватиме:

$$\frac{\text{число влучань у зафарбовану площу}}{\text{число всіх влучань у мішень}} = \frac{60}{100} = 0{,}6, \text{ або } 60\%.$$

Отже, влучання в «десятку» розподіляються нерівномірно по всій площі мішені. Влучання в коло, що розміщене ближче до центра, ймовірніше, ніж у те, що далі.

Тепер можна поговорити і про слона, в якого влучила бомба. Ось карта того району Ленінграда, де був зоопарк. Зовсім поряд із слоном є кілька мостів. Міст — важливий воєнний об'єкт. Уявімо собі, що фашистські льотчики цілили у середину Кіровського моста. Це місце позначене на малюнку хрестиком. Тоді, як і при стрільбі по мішені, більша частина бомб (а їх скидали сотні й тисячі) вибухне десь неподалік від мосту. У це вогненне кільце — його заштриховано на малюнку — потрапить і наш слон.

Слон справді загинув. У цьому винен, звичайно, випадок. Та загибель єдиного в Ленінграді слона не осоромила теорії ймовірностей. Навпаки, ця наука зуміла пояснити, чому так сталося.

Але теорія ймовірностей уміє не лише пояснити незрозумілі явища. Як і всяка справжня наука, вона має чудовий дар передбачення. І цей казковий дар люди використовують для здійснення великих справ. Про це — далі.

Розділ 7

ВИПАДОК ЗА РОБОТОЮ,

в якому є ряд пророчих передбачень, розкриваються професійні секрети ворожок, з'ясовується, скільки треба пошити хлопчикам штанців і дівчаткам — платтячок, а найголовніше — неспростовно доводиться, що п'ятирічний план буде неодмінно виконано

«НА СВІТЛІМ ЧОЛІ Я ТВІЙ ЖЕРЕБ ЧИТАЮ»

Хто з нас не мріяв зазирнути у завтрашній день? Провіщення майбутнього, передбачення майбутніх подій завжди було заповітною мрією людей.

«Скажи, ворожбите, обранцю богів, що сподіватись від долі?» — питає мудрого старця князь Олег. Ми всі пригадуємо, до чого призвело князя бажання зазирнути у прийдешнє.

По-справжньому передбачити майбутнє може лише наука. Звичайна арифметика, наприклад, передбачає, скільки дістанеться яблук кожному з трьох дітлахів, якщо у них на всіх шість яблук. Фізика передбачає, що станеться з водою, коли нагріти її до температури 100°.

А от теорія ймовірностей може напророчити, як поведе себе випадок, який буде середній результат того чи іншого явища.

І всі ці наукові передбачення можна перевірити — чи збудуться вони.

Спробуймо навчитися передбачати результати деяких випадковостей, що зустрічаються нам у житті. А для того, щоб можна було перевірити правильність наших передбачень, виберемо такі випадки, результат яких легко встановити.

Насамперед роздобудьте сотню квитків — трамвайних, тролейбусних, автобусних і навіть квитків у кіно. Їхні номери, звичайно, будуть найрізноманітніші. Треба лише, щоб кожний складався з шести цифр.

Розмістивши ці квитки у будь-якому порядку, ми можемо вважати, що всі їхні номери випадкові. Ось із цими випадковостями ми й матимемо справу.

Озброївшись пачкою квитків, почнімо роботу.

П е р е д б а ч е н н я   п е р ш е. Скільки всього виявиться у пачці квитків з парною цифрою у кінці номера?

Частина номерів закінчується на парні числа, а частина — на непарні. Всього може бути десять різних однозначних цифр. Якщо вважати нуль парним числом, тих і інших цифр буде по п'ять — порівну.

Треба передбачити, скільки всього у нашій пачці квитків, які закінчуються на парну цифру (скорочено — парних квитків).

Думаю, що це передбачення усі зроблять однаково. А саме — за формулою ймовірності.

$$\text{Імовірність появи парного квитка} = \frac{\text{число сприятливих випадків}}{\text{загальна кількість рівноможливих випадків}} = \frac{5}{10} = 0{,}5.$$

МС числа парних квитків $= 100 \times 0{,}5 = 50$ квитків.

Залишається тільки перевірити. У своїй пачці ви напевне знайдете приблизно 50 парних квитків.

Я кажу «приблизно» тому, що ми дістали математичне сподівання (МС), або середньосподіване число квитків. У одного з вас може бути трохи більше парних квитків, ніж 50, у другого менше, та значних відхилень у нашому передбаченні не буде.

П е р е д б а ч е н н я   д р у г е. Скільки виявиться парних квитків у будь-якій кількості квитків, взятих навмання з пачки?

Візьмемо з пачки навмання трохи квитків. Частина їх може виявитися парними, а частина — непарними.

Треба передбачити, скільки буде квитків з парними номерами.

Ми знаємо, що ймовірність бути парним (або непарним) для одного квитка дорівнює 0,5.

Нам відомо також, як розрахувати ймовірність двічі підряд витягти парний (або непарний) квиток.

Вона за теоремою множення ймовірностей дорівнює

$$0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25, \text{ або } 25\%.$$

Імовірність тричі підряд витягти парний квиток дорівнює

$$0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}125, \text{ або } 12{,}5\%.$$

У такий спосіб можна скласти цікаву таблицю ймовірностей появи різної кількості парних квитків. Ось вона.

ІМОВІРНІСТЬ ПОЯВИ ПАРНИХ КВИТКІВ (У ПРОЦЕНТАХ)

Передбачена кількість появи парних квитків	Кількість витягнутих квитків: 1	2	3	4	5
0	50	25	12,5	6,2	3,1
1	50	50	37,5	25	15,6
2	0	25	37,5	37,5	31,2
3	0	0	12,5	25	31,2
4	0	0	0	6,2	15,6
5	0	0	0	0	3,1

Наприклад, ми витягли з пачки навмання 5 перших-ліпших квитків і передбачаємо, що серед них 2 квитки парних. Так от, ймовірність такого передбачення дорівнює 31,2 процента.

З цієї таблиці видно, що точно передбачити, скільки з витягнутих навмання квитків будуть парними, не можна — всі ймовірності цих подій менші 50%.

Проте можна сказати, яка кількість парних квитків з числа витягнутих найімовірніша. Наприклад, якщо ми взяли 5 квитків, то найімовірніше, що 2 з них будуть парними, а 3 непарними (або навпаки).

Можна також сказати, що досить малоймовірно витягти підряд 4 або, тим паче, 5 парних квитків.

Такі відповіді, звичайно, не дуже скидаються на справжні пророцтва. Тому дещо змінимо саму сутність передбачення.

Будемо передбачати, не скільки точно парних квитків, а не менше якої кількості парних (або непарних) квитків міститься серед витягнутих нами з пачки. Пригадуєте задачу «В якій руці?». Тут нам у пригоді стане спеціальна таблиця, розрахована за правилами теорії ймовірностей.

ІМОВІРНІСТЬ ПОЯВИ НЕ МЕНШЕ ПЕВНОГО ЧИСЛА ПАРНИХ КВИТКІВ (У ПРОЦЕНТАХ)

Передбачена кількість появи парних квитків не менше	Кількість витягнутих квитків				
	1	2	3	4	5
0	100	100	100	100	100
1	50	75	87,5	83,8	96,9
2	0	25	50	68,8	81,2
3	0	0	12,5	31,2	50
4	0	0	0	6,2	8,8
5	0	0	0	0	3,1

Наприклад, ми витягли з пачки навмання 5 будь-яких квитків і передбачаємо, що серед них не менше 2 квитків — парні. Виявляється, імовірність такого передбачення, як видно з таблиці, дуже велика — 81,2 процента.

Зробимо з допомогою цієї таблиці кілька сміливих передбачень.

Можна, наприклад, твердити, що з трьох навмання витягнутих квитків не менше ніж один буде парним, а з п'яти — парними будуть не менше двох квитків.

Ці передбачення легко перевірити самим.

До речі, ця нехитра таблиця допоможе зрозуміти «діяльність» усяких ворожок і віщунів. Припустимо, ворожка напророчила п'ять подій, які однаковою мірою можуть як трапитися, так і не трапитися,— так само, як однаковою мірою можуть з'являтися парні й непарні квитки. Це може бути, наприклад, «приємна зустріч», «зла недуга», «далека дорога» і таке інше.

Імовірність того, що збудуться усі п'ять подій, мізерна — лише 3,1 процента. Та легковірній людині цілком достатньо, якщо трапиться хоча б дві чи три з них. А це за теорією ймовірності — до 81,2 процента.

І от частина зроблених ворожкою пророцтв збувається, а темні люди й гадки не мають, що прилучилися до «таїнства» теорії ймовірностей.

П е р е д б а ч е н н я т р е т є. Скільки треба взяти навмання квитків із пачки, щоб серед них виявився і «щасливий»? «Найщасливішим» квитком, як відомо, вважається такий, у якому суми трьох перших цифр і трьох останніх дорівнюють одна одній. Всі, звичайно, розуміють, що це дурниця, та чомусь дехто дуже пильно розглядає оті клаптики паперу з шестизначним номером.

Давайте ж визначимо, скільки треба взяти квитків, щоб добратися до «щасливого»!

Щоб кожен міг підрахувати необхідну кількість квитків, де трапляється «щастя», скористаємося ще однією таблицею, яку дає нам арифметика випадковостей.

«Увійти» в цю таблицю можна, лише знаючи ймовірність «щасливого» квитка.

Розрахувати самим цю ймовірність досить складно. Тому скористаємося з готового результату: для наших умов імовірність витягти «щасливий» квиток дорівнює приблизно 5,5 процента. Ця цифра означає, що в середньому на 100 квитків 5—6 номерів виявляться «щасливими». Ви можете це легко перевірити, перебравши свою пачку квитків, а також пачки товаришів.

Друге, що нам треба знати, аби скористатися з таблиці,— це бажану ймовірність витягти «щасливий» квиток.

Узнати надзвичайно просто. Яку хочеш дістати ймовірність — та й буде бажана. Якщо ви дуже прагнете бути щасливими — одержати «щасливий» квиток майже напевно, то беріть 80 і 90 процентів, якщо ж ваші бажання скромніші — обмежтесь меншою ймовірністю.

Та тільки майте на увазі: чим вища бажана ймовірність, тим більше квитків доведеться перебрати, перш ніж випаде «щастя».

Ось приклад.

Імовірність «щасливого» квитка, як ми вже знаємо, дорівнює приблизно 5 процентам. Якщо вас влаштовує бажана ймовірність 50 процентів, то (а це видно з таблиці) можна обмежитись 14 квитками. Якщо ж ви хочете одержати «щасливий» квиток з ймовірністю 80 процентів — треба буде проглянути 31 квиток.

Цифри 14 і 31 стоять у таблиці на перетині бажаної ймовірності та імовірності «щасливого» квитка.

Перевірити це передбачення неважко. Просто візьміть із пачки навмання 31 квиток і перевірте. Один з них майже напевне буде «щасливим».

Якщо ж у вас немає пачки квитків, не біда. Можете просто занотовувати номери тих квитків, які ви берете у трамваї, тролейбусі, автобусі. На 31 квиток з високою імовірністю 80 процентів хоч один квиток повинен бути «щасливим».

СКІЛЬКИ ТРЕБА ВИТЯГТИ КВИТКІВ, ЩОБ ХОЧ ОДИН ІЗ НИХ БУВ «ЩАСЛИВИМ»?

Імовірність «щасливого» квитка	Бажана ймовірність узяти «щасливий» квиток										
	5%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	близько 100%
5%	1	2	4	7	10	14	18	24	31	45	76
10%	—	1	2	3	4	7	8	11	15	22	37
20%	—	—	1	2	2	3	4	6	7	10	17
30%	—	—	—	1	1	2	3	3	5	6	11
40%	—	—	—	—	1	1	2	2	3	4	8
50%	—	—	—	—	—	1	1	2	2	3	6
60%	—	—	—	—	—	—	1	1	2	2	4
70%	—	—	—	—	—	—	—	1	1	2	3
80%	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	2
90%	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	2
близько 100%	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1

Трете передбачення, так само, як і попередні, згодиться, звичайно, не тільки для гри з квитками.

Ви можете неабияк здивувати своїх друзів, якщо впевнено передбачите, скільки треба взяти лотерейних білетів, щоб обов'язково виграти.

Уявимо, що на шкільному вечорі влаштували лотерею. Заготовлено всього 250 білетів. Відомо, що з них 50 виграшних, а решта 200 — порожні.

Ви прагнете за всяку ціну виграти хоч раз. Ось як це треба зробити.

Спочатку визначимо ймовірність виграшу — ймовірність «щасливого» квитка. Вона дорівнює $\frac{50}{250}=0{,}2$, або двадцяти процентам.

Потім встановимо бажану ймовірність витягти «щастя». Щоб випадок не підвів, візьмемо її якомога більшу — 90 процентів.

«Входимо» з цими ймовірностями у таблицю і одержуємо на перетині кількості білетів — 10. Тепер купуйте 10 білетів і можете бути певні, що один з них майже обов'язково виграє.

Таким же чином можна вирахувати, скільки треба мати лотерейних білетів, щоб напевно виграти автомобіль. Боюся тільки, що їх треба чимало.

А ось іще один приклад, який, можливо, згодиться у скрутну хвилину.

Ви написали твір з літератури або розв'язали кілька складних задач з математики на іспиті і вас бере сумнів, чи нема помилок.

Скільки разів треба перевірити роботу, щоб не сумніватися в успіху?

Знову вдамося до таблиці. Кожний зуміє приблизно оцінити свої можливості знаходити помилки при одноразовому перегляді роботи. Припустимо, ви за один раз, як правило, виловлюєте лише половину помилок — 50 процентів. Тоді для того, щоб бажана ймовірність успіху була 80 процентів, треба перевірити роботу двічі (що, до речі кажучи, хороші учні й роблять).

А той, хто при ймовірності помилки 50 процентів перевіряє свою роботу один раз, може розраховувати на успіх лише з імовірністю 60 процентів. Це теж показує наша таблиця.

Отож ми переконалися, що передбачення теорії ймовірностей збуваються. Погляньмо тепер, як людина використовує цей казковий дар передбачення випадкового, дар, якого вона набуває завдяки науці.

А ЩО ЯК?..

У газетах опубліковано новий п'ятирічний план.

Всі ми тепер знаємо, скільки наша країна збере зерна, добуде корисних копалин, пошиє одягу і взуття, виготовить різних машин і приладів.

Ми впевнені, що план у нас правильний і буде неодмінно виконаний. Так само, як виконувалися й перевиконувалися усі п'ятирічні плани.

Ми переконані у можливості виконання плану тому, що його продумали й розрахували з допомогою науки. Над складанням плану працювали вчені різних спеціальностей: металурги й агрономи, географи і ботаніки, хіміки й математики. Не останню роль при обгрунтуванні плану відіграла і теорія ймовірностей — наука про випадок.

На перший погляд не зрозуміло, що спільного між планом і випадком. Навпаки, здається, що там, де є план,— нічого випадкового не може бути.

Але чи так усе це? Спробуємо з'ясувати.

Все, що записано у плані: і урожай зерна, і виробництво металу, і якість приладів та машин,— багато в чому залежить від випадку. Адже ніхто наперед не може сказати, яка буде погода у жнива або скільки металу виявиться в руді. Невідомо також, скільки необхідно штанів для хлопчиків і платтячок для дівчаток. Ніхто не може вгадати точно, яка кількість чоловічого взуття сорокового розміру має бути в магазинах. Невідомо, скільки приладів і машин виявляться несправними і потребуватимуть заміни чи ремонту.

А що, як погода буде погана, і частини врожаю не вдасться виростити або зібрати? А що, як руда виявиться біднішою, ніж сподівалися, і металу з неї вийде менше, ніж передбачалося? А що як?..

Слова «а що як? звучать тоді, коли що-небудь відбувається несподівано, випадково для нас.

Наприклад, кажуть: «А що, як піде дощ?». Отже, це явище природи могло і трапитися, і не трапитися.

Підступний випадок завжди діє несподівано для людини, і точно передбачити кожний окремий його результат неможливо. Спробуйте-но точно сказати, як зараз упаде бутерброд! Та ми вже знаємо й на багатьох прикладах переконалися, що випадкові явища цілком підлягають вивченню, стають надбанням науки...

Наука допоможе нам відповісти й на питання «а що як?..»

ХОЧ БИ ЯК ТАМ БУЛО!

Для того щоб теорія імовірностей могла обчислювати плани, треба дати їй необхідну сировину — цифри, що показують, як часто трапляються випадкові події, що нас цікавлять.

Пригадайте, як ми розгадували таємницю шифру. Спочатку нам треба було з'ясувати, з якою частотою зустрічається кожна літера алфавіту в різних книжках, і лише після цього ми зуміли розкрити, що ховалося за таємничими знаками листа.

Збір і обробка необхідної сировини для розрахунків плану здійснюється з допомогою особливої науки — статистики.

Кажуть, що статистика знає все:

— скільки буває сонячних і дощових днів щороку;
— скільки, в середньому, припадає металу на тонну руди;
— скільки щороку народжується хлопчиків і дівчаток;
— який процент дівчат високих на зріст;
— який процент чоловіків носить взуття сорокового розміру;
— які частини приладу чи машини виходять із ладу і як часто. І так далі.

Свій результат статистика одержує за дуже схожою на вже відому нам формулу:

$$\text{Частота події} = \frac{\text{число сприятливих випадків, що цікавлять нас}}{\text{число всіх перевірених рівноможливих випадків}}.$$

Саме цю частоту за великої кількості перевірених подій і беруть за ймовірність. А як поводитися з імовірностями, ми знаємо.

Розглянемо, як теорія ймовірностей працює над планом.

Наприклад, статистика встановила, що за хорошої погоди урожай пшениці в радгості «Жовтневий» складає у середньому 40 центнерів з гектара. Встановлено також, що хороша погода, потрібна для дозрівання і збирання пшениці, буває у тому районі країни, де розміщено радгосп, два роки з трьох.

Пшеницею засіяно 300 гектарів. Як розрахувати план заготівлі зерна в радгоспі на п'ять років?

Згадуємо, що нам відомо про ймовірність і математичне сподівання (МС).

$$\text{Імовірність хорошої погоди} = \frac{2}{3} = 0{,}67.$$

$$\text{МС урожаю за 1 рік з 1 гектара} = 40 \times 0{,}67 = 26{,}8 \text{ центнера}.$$

$$\text{МС урожаю за 1 рік із 300 гектарів} = 26{,}8 \times 300 = 8040 \text{ центнерів}.$$

$$\text{МС урожаю за п'ятирічку із 300 гектарів} = 8040 \times 5 = 40\,200 \text{ центнерів}.$$

А ось історія ще однієї цифри плану.

Встановлено середній вміст металу в руді одного родовища: на кожну тонну руди припадає в середньому 50 кілограмів міді і 20 кілограмів свинцю.

За рік родовище дає близько 200 000 тонн руди. Необхідно запланувати, скільки всього тонн кольорового металу (міді й свинцю разом) дасть родовище за п'ятирічку.

Обчислюємо:

$$\text{Імовірність вмісту міді в руді} = \frac{50}{1000} = 0{,}05.$$

$$\text{Імовірність вмісту свинцю у руді} = \frac{20}{1000} = 0{,}02.$$

$$\text{Імовірність вмісту кольорового металу в руді (або міді, або свинцю)} = 0{,}05 + 0{,}02 = 0{,}07.$$

$$\text{МС видобутку кольорового металу за 1 рік} = 200\,000 \times 0{,}07 = 14\,000 \text{ тонн}.$$

$$\text{МС видобутку кольорового металу за п'ятирічку} = 14\,000 \times 5 = 70\,000 \text{ тонн}.$$

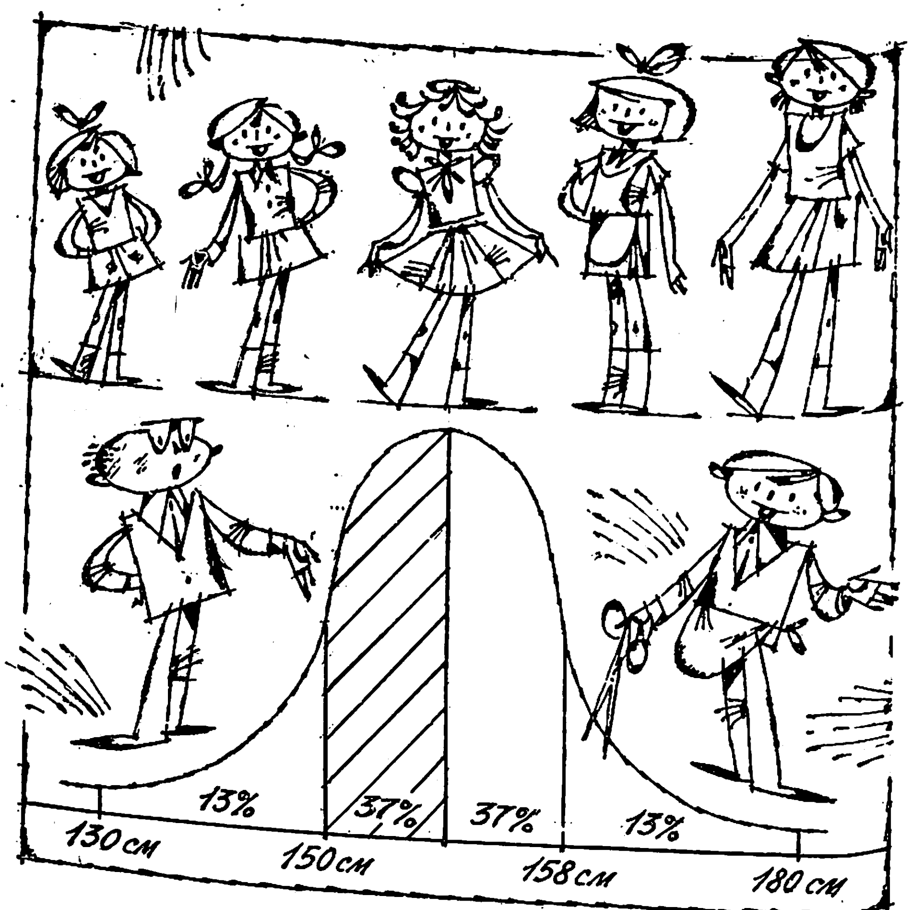
Цікаво також з'ясувати, звідки наперед відомо, скільки треба пошити штанів і скільки платтів. Адже число хлопчиків і дівчаток випадкове. Навіть у різних класах кількість хлопчиків і дівчаток не однакова.

І тут на допомогу приходить статистика. Підраховано, що 51 процент усіх новонароджених, як правило, складають хлопці, а решту 49 процентів — дівчатка.

Отже, із 1000 одиниць дитячого одягу має бути:

$$\text{МС штанів} = 1000 \times 0{,}51 = 510 \text{ пар штанів}.$$

$$\text{МС платтів} = 1000 \times 0{,}49 = 490 \text{ платтів}.$$



А якого розміру має бути одяг і взуття?

Скажімо, скільки платтів треба пошити для високих на зріст дівчат?

І на це, здавалося б, зовсім уже фантастичне запитання впевнено відповідає статистика разом із теорією імовірностей.

Кілька років тому статистики не полінувалися і виміряли зріст у великої групи — понад тисячі дівчат, які щойно скінчили школу. За цими даними була обчислена так звана крива статистичного розподілу зросту дівчат. Вона показана на малюнку.

На горизонтальній осі — зріст дівчат, починаючи від наймініатюрніших — 135 сантиметрів — і аж до тих, що стоять на правому фланзі,— 180 сантиметрів.

Крива розподілу складена так, що площі між нею і горизонтальною віссю відповідають проценту дівчат, зріст яких перебуває у тих чи інших межах, показаних на графіку.

Наприклад, площа заштрихованої на малюнку фігури дорівнює 37 процентам від загальної площі під кривою і відповідає зростові дівчат від 150 до 158 сантиметрів. Це означає, що 37 процентів дівчат мають зріст саме в цих межах.

Тепер уже закрійникам не важко обрати рішення — процент платтів різної довжини не повинен надто відрізнятися від тих цифр, які дає графік.

Так само можна запланувати і кількість взуття якогось певного розміру — наприклад, чоловічих черевиків сорокового розміру.

Встановивши, що в середньому із 100 чоловіків 30 мають сороковий розмір, ми дізнаємося, що:

Імовірність придбати чоловіче взуття сорокового розміру $= \frac{30}{100} = 0{,}3$.

А з партії чоловічого взуття, що за планом готується до випуску, в 10 000 пар має бути:

МС кількості пар чоловічого взуття сорокового розміру $= 10\,000 \times 0{,}3 = 3000$ пар.

Ну, а як же спланувати виготовлення приладів і машин, урахувавши те, що вони з випадкових причин можуть виходити з ладу, і їх треба буде замінювати чи ремонтувати?

Пояснимо це на прикладі звичайної електричної лампочки. Без цього нехитрого приладу сучасна людина не мислить нормального життя.

Скільки ж треба запланувати електролампочок на п'ятирічку, враховуючи те, що якась їх частина, безумовно, перегорить?

Підрахуємо кількість лампочок для однієї школи.

Насамперед необхідно встановити, яка імовірність псування лампочок за п'ятирічку. Цю цифру нам дає всюдисуща статистика. Візьмемо її такою, що дорівнює 0,4. Встановимо також, з якою імовірністю ми хочемо мати електричне освітлення.

Аби бути впевненим у тому, що в нас завжди вечорами горітиме світло, приймемо її рівною 80 процентам.

Тепер з допомогою таблиці на перетині 40% і 80% ми легко знаходимо цифру 3. Тут це число означає кількість лампочок, з яких хоч одна горітиме з бажаною імовірністю.

Отже, з трьох лампочок напевно працюватиме протягом п'яти років лише одна. Тому, якщо в нас у школі одночасно має горіти 100 лампочок, то всього на п'ятирічку треба запланувати втричі більше — 300 штук.

У кожному плані відводиться місце і завдання по захисту нашої Батьківщини від ворогів. Спробуймо зробити один такий розрахунок.

Щоб знищити важливий воєнний об'єкт супротивника, який насмілиться розв'язати проти нас війну, необхідно влучити в цей об'єкт принаймні однією ракетою. Імовірність влучання ракети у ціль встановлена при стрільбі по мішені і дорівнює 60 процентам. Скільки треба випустити ракет, щоб воєнний об'єкт ворога було знищено?

Раз об'єкт важливий, візьмемо таку бажану ймовірність, що дорівнює, наприклад, 90 процентам. Тоді в таблиці на перетині ймовірностей 60% і 90% знайдемо необхідне число ракет. Їх потрібно лише дві. І ми можемо бути певні, що ворогові не втекти.

Отож, якщо все заздалегідь правильно врахувати й обчислити, скориставшись перевіреними цифрами, які дає статистика, то ніякі випадковості нашому плану не страшні.

План з допомогою науки враховує і мінливість погоди, і несподівані зміни в складі руди, і навіть непідвладне людині народження півників та курочок. І ніяке «а що як?» нашому плану не страшне.

* * *

П'ятирічний план ставить перед радянською людиною ряд важливих завдань. Багато які з них пов'язані з різноманітними видами пошуку. Планується пошук корисних копалин і лікарських рослин, риби й морського звіра. Пошук ведуть археологи й історики, фізики й біологи.

Теорія ймовірностей найбезпосередніше торкається завдань пошуку.

Розділ 8

Я ІДУ ШУКАТИ,

в якому ми вирушаємо на пошуки Наполеонового скарбу і морських мін, зустрічаємося з лісниками й китобоями, а на закінчення... граємо у футбол

КЛОПІТ ШУКАЧІВ СКАРБІВ

Людям багатьох професій доводиться мати справу з пошуком. Геологи шукають корисні копалини, рибалки — рибу, китобої — китів.

Наука про те, як шукати, називається теорією пошуку. Основа теорії пошуку — арифметика випадковостей. З однією із задач цієї теорії нас уже ознайомив Том Сойєр.

На жаль, не завжди можна вести пошук за методом Тома Сойєра...

Глухою лісовою дорогою рухалося кілька критих автомашин-всюдиходів. Вони зупинились біля невеликого озера, що ховалося глибоко у лісі. З машини вийшли люди. На берег озера з допомогою спеціального пристрою звантажили якісь механізми, що скидалися на пожежні насоси. Почали збивати пліт. Під час роботи люди перемовлялись. Кілька разів згадувалось ім'я Наполеона.

Ось пліт із людьми спустили на воду, повантажили на нього насоси і невеликим катером відбуксували на середину озера. Одному з тих, хто був на плоту, товариші допомогли одягнути товстий гумовий костюм, черевики із свинцевими підошвами, блискучий мідний шолом. Ще хвилина — і водолаз пішов під воду. Запрацював насос, подаючи йому повітря.

Так кілька років тому почалися пошуки скарбу Наполеона Бонапарта.

Понад сто п'ятдесят років ходить легенда про те, що Наполеон під час втечі з Росії нібито заховав на дні глибокого лісового озера свої багатства. Скарби ці, за спогадами очевидців, на кількох санях у забитих ящиках привезли до озера, що сховалося серед лісових нетрів. Було це взимку. Ящики із скарбами спустили під кригу в таємному місці.

Де шукати цей скарб?

Ми ж навіть приблизно не знаємо місця, де ящики зіпхнули під кригу.

Експедиція, про яку щойно йшлося, вела пошук так. Водолаз із плота опускався під воду й обстежував невеличку ділянку дна озера, потім плотом переїжджали на інше місце, знову спускали водолаза, і так багато разів.

Ця нелегка робота тривала досить довго, але скарбу так і не знайшли.

Спробуємо з допомогою теорії пошуку встановити причину невдачі шукачів скарбу. Для цього визначимо, яка ймовірність успіху пошуків скарбу тим способом, який застосовувався.

Спочатку знайдемо імовірність того, що скарб міг бути знайдений за відомою нам формулою ймовірності шляхом ділення площі, на якій лежить скарб, на площу всього озера.

Якщо облюбоване Наполеоном озеро являло собою коло радіусом 1 кілометр, а скарб було запаковано в 10 ящиків завдовжки 2 і завширшки 1 метр кожний, то ось чому дорівнюватиме ймовірність знайдення скарбу після першого ж занурення водолаза у будь-якій точці озера:

$$\text{Імовірність знайдення скарбу} = \frac{\text{площа скарбу}}{\text{площа озера}} = \frac{10\times2\times1}{3{,}14\times1000^2} = \frac{20\ \text{кв. метрів}}{3\,140\,000\ \text{кв. метрів}} = 0{,}000006,\ \text{або}\ 0{,}0006\%.$$

Одержана нами імовірність знайдення приблизно така ж мала, як, скажімо, імовірність того, що перший же стрічний у великому місті виявиться твоїм однофамільцем. У житті, звичайно, розраховувати на таку ситуацію не можна. Тому водолазові довелося занурюватись у воду багато разів.

Обчислена ймовірність знайдення скарбу правильна лише для одного занурення водолаза. Якщо провести багато занурень, то ймовірність, звичайно, виросте. Приблизно можна вважати, що вона зросте у стільки разів, у скільки разів більше буде занурень. Отже, щоб мати ймовірність знайдення, скажімо, близько 60 процентів, водолаз повинен опуститися на дно приблизно 10 000 разів. Навіть якщо він робить два занурення на день і працює без вихідних, на пошук піде близько 14 років.

Ось як складно вести пошук. Це і є, мабуть, одна з головних причин того, що Наполеонів скарб і досі лежить на дні озера (якщо він справді там лежить).

Що ж усе-таки порадити шукачам скарбів?

Виявляється, їхню працю можна значно полегшити. Для цього треба, по-перше, мати хороші засоби для спостереження під водою — наприклад, потужний прожектор, а по-друге, забезпечити водолаза спеціальним полегшеним скафандром з буксирувальним пристроєм, який дасть йому змогу швидко пересуватися і вести пошук на ходу.

Якщо наш водолаз зможе обстежувати під водою освітлену прожекторами смугу завширшки 20 метрів і робити це на ходу із швидкістю 5 кілометрів на годину, то лише за 10 годин він пройде площу, що дорівнює $20\times5000\times10=1\,000\,000$ кв. метрів.

Імовірність знайдення скарбу при цьому дорівнює:

$$\frac{\text{обстежувана площа}}{\text{площа озера}} = \frac{1\,000\,000}{3\,140\,000} = 0{,}32,\ \text{або}\ 32\%.$$

За 20 годин роботи імовірність перевищить 60% і з'явиться реальна надія, що скарб буде знайдено.

Отже, з розповіді про шукачів Наполеонового скарбу ми дізналися про деякі цікаві можливості теорії пошуку. Але в цієї науки є й інші, не менш цікаві задачі.

КУДИ ДИВИТИСЯ ДОЗОРНОМУ?

Уперше я зіткнувся з теорією пошуку за таких незвичних обставин. Я починав морську службу офіцером на великому військовому кораблі. Щойно скінчилась війна, і в морі було безліч плавучих мін.

Під час першого ж походу командир корабля організував спостереження за мінами, доручивши цю справу дванадцятьом найуважнішим, найгострозорішим матросам. А мені звелів розставити спостерігачів по палубі так, щоб жодна міна навкруги корабля не лишилася непоміченою.

Не довго думаючи, я накреслив крейдою посеред палуби коло, розбивши його на дванадцять частин — по одній на кожного спостерігача. Мені здалося, що за такої розстановки весь простір проглядатиметься рівномірно, і всі міни буде помічено.

Свій план я виклав командирові корабля.

Командир подумав і сказав:

— Якби спостереження за мінами велося з непорушного корабля, ваш план був би бездоганний. Але корабель пливе. Це міняє справу.

Командир узяв крейду і намалював на палубі кілька пунктирних ліній, а між ними — стрілки.

— Уявімо собі,— сказав він,— що наш корабель стоїть, а міни пливуть йому назустріч так, як показують стрілки. Це цілком припустимо: адже коли ми дивимося з корабля на воду, нам здається, ніби вода і все, що на ній є, рухається, а корабель стоїть.

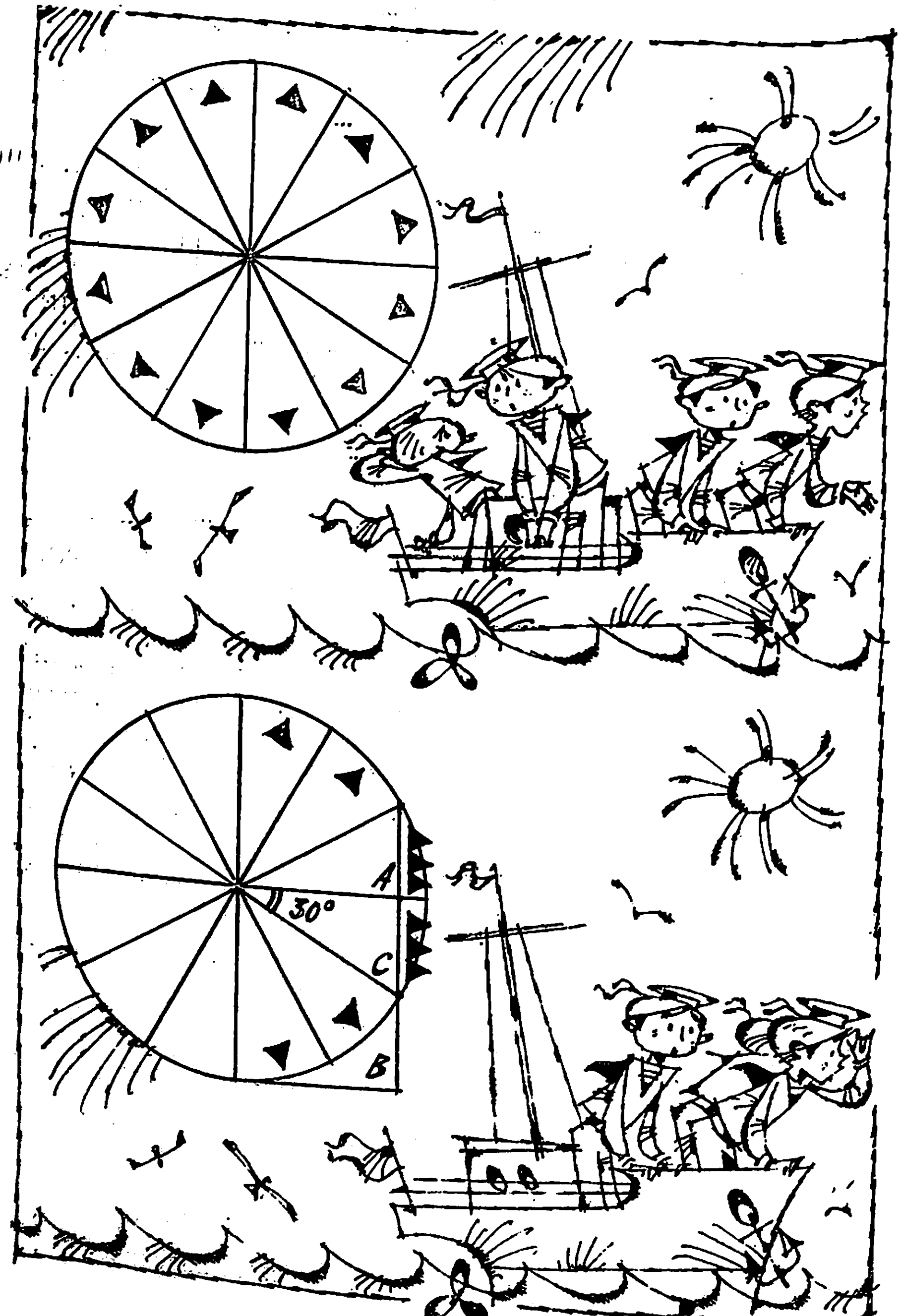
Розділимо всі міни, які пливуть назустріч кораблю, на чотири рівні за шириною потоки.— Командир показав на свій малюнок.— У кожному потоці буде тепер чверть мін, що загрожують кораблю. Розглянемо, у яких секторах спостерігачі виявлять ці міни.

Ті міни, що йдуть у потоках по обидва боки від середини корабля, напевне будуть одразу помічені спостерігачами секторів 1 і 12: кожний з них побачить по одній чверті всіх мін.

Спостерігачам, які стоять далі від середини корабля, у секторах 2 і 3, 11 і 10, «пощастить» менше: адже тут чверть усіх мін припадатиме на два сектори.

Це неважко довести. Доведемо спочатку, що відрізок $AC = \frac{1}{2}AB$.

Справді, AC — катет, DC — гіпотенуза, а кут $ADC = \frac{360°}{12} = 30°$. Катет, що лежить навпроти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи:



$$AC=\frac{1}{2}DC.$$

Відрізки CD і DE рівні як радіуси одного й того ж кола, а DE дорівнює AB за побудовою. Отже, $DC=AB$. Звідси й $AC=\frac{1}{2}AB$.

— Що й треба було довести,— мимоволі вихопилося в мене. Тепер я усвідомив свою помилку. Оскільки в різних секторах з'являтиметься різна кількість мін, виходить, рівномірна розстановка спостерігачів, по одному в кожному секторі, не підходить.

— План спостереження має бути таким.— Я знову взяв крейду.— Всіх спостерігачів ми розділимо на чотири групи, за числом потоків мін; тоді на кожний потік припаде по три спостерігачі (12 : 4): у секторах 1 і 12 по 3 чоловіки в кожному, у секторах 2 і 3, 10 і 11 — по 3 чоловіки на 2 сектори; у секторах від 3 по 9 спостерігачі не обов'язкові. Основне спостереження, таким чином, вестиметься в напрямку руху корабля.

Командир усміхнувся.

— Ну от,— мовив він,— тепер ми знаємо, чому дозорний повинен дивитися переважно вперед.

ПОЖЕЖА В ЛІСІ

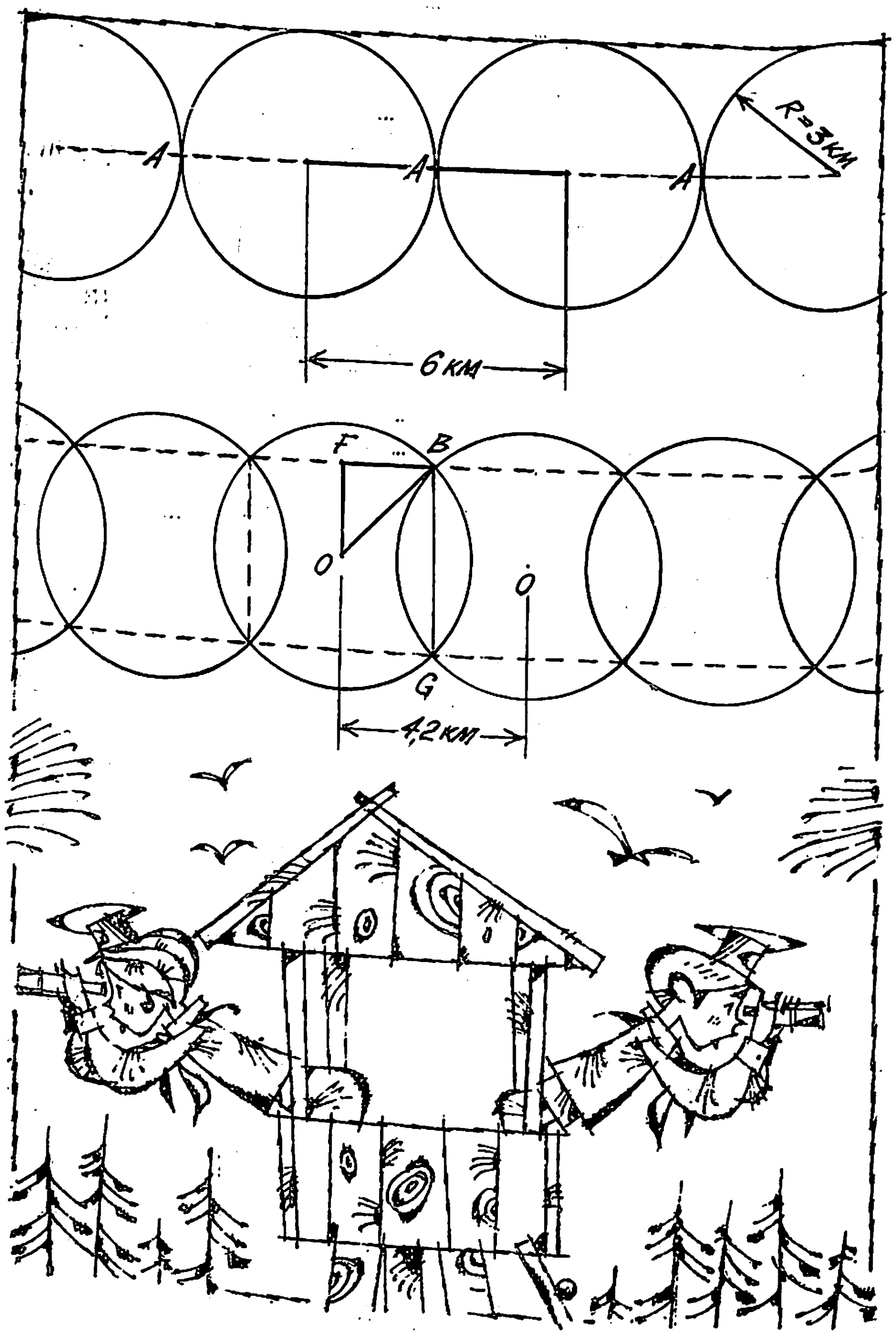
Про свій перший урок із теорії пошуку я розповів якось знайомому лісничому.

— У нас теж без цієї науки не обійтися,— сказав він, уважно вислухавши мене.— Ось приклад. Через посушливе літо в лісах нерідко виникає пожежонебезпечна ситуація. Доводиться постійно стежити за великими районами лісу. У нашій справі треба правильно розрахувати, на якій відстані мають стояти спостережні пости, щоб не проглядіти пожежі. Задача ця розв'язується так.

Кожний черговий має бінокль для ведення спостережень. Припустимо, що найменша відстань, з якої можна помітити дим,— близько трьох кілометрів. Як розставити пости?

На перший погляд здається, ніби задача дуже проста: якщо спостерігачі перебуватимуть на відстані шести кілометрів один від одного, то вони зможуть продивлятись увесь простір між суміжними постами ($3\times2=6$), і вогонь буде помічено.

Але поміркувавши трохи, ми переконаємося, що таке розташування постів аж ніяк не найкраще.— Мій товариш узяв аркуш паперу і швидко накидав схему розташування спостерігачів.— Подивимося на цей малюнок.



Виявляється, коли відстань між постами вважати такою, що дорівнює двом відстаням спостереження — шести кілометрам,— то суцільний огляд простору між постами буде в одній лише точці A — там, де дотикаються кола спостереження. Варто виникнути вогню за межами цієї точки, і, перш ніж пожежу запримітять, вона уже встигне поширитись.

Щоб цього не сталося, треба розташувати спостережні пости так...— Лісничий намалював ще одну картину трохи нижче за першу.— Бачиш, ми наблизимо пости так, щоб у нас вийшла суцільна рівна смуга спостереження. При цьому райони спостереження сусідніх постів дотикаються уже не в точках, як було раніше, а в лініях. На малюнку я показав одну з таких ліній — BG. Неважко зрозуміти, що ця лінія має бути однією із сторін квадрата, вписаного у коло спостереження. В цьому разі смуга спостереження складатиметься з однакових квадратів і тому вийде суцільною й рівною.

Чому ж тепер дорівнює відстань між сусідніми постами?

Якщо ми позначимо половину цієї відстані літерою x, то, пригадавши теорему Піфагора і зрозумівши, що $x=FB=FO$, одразу напишемо:

$$x^2+x^2=3^2;\ 2x^2=3^2;$$

$$x^2=\frac{3^2}{2};\ x=\frac{1}{2}\times 3^2.\ 0{,}7\times 3.$$

Відстань між постами $=2x=2\times 0{,}7\times 3=1{,}4\times 3=4{,}2$ кілометра.

Відтоді я запам'ятав ще одне правило теорії пошуку: хочеш надійно шукати,— розстав пости на віддалі один від одного не більше ніж 1,4 дальності спостереження.

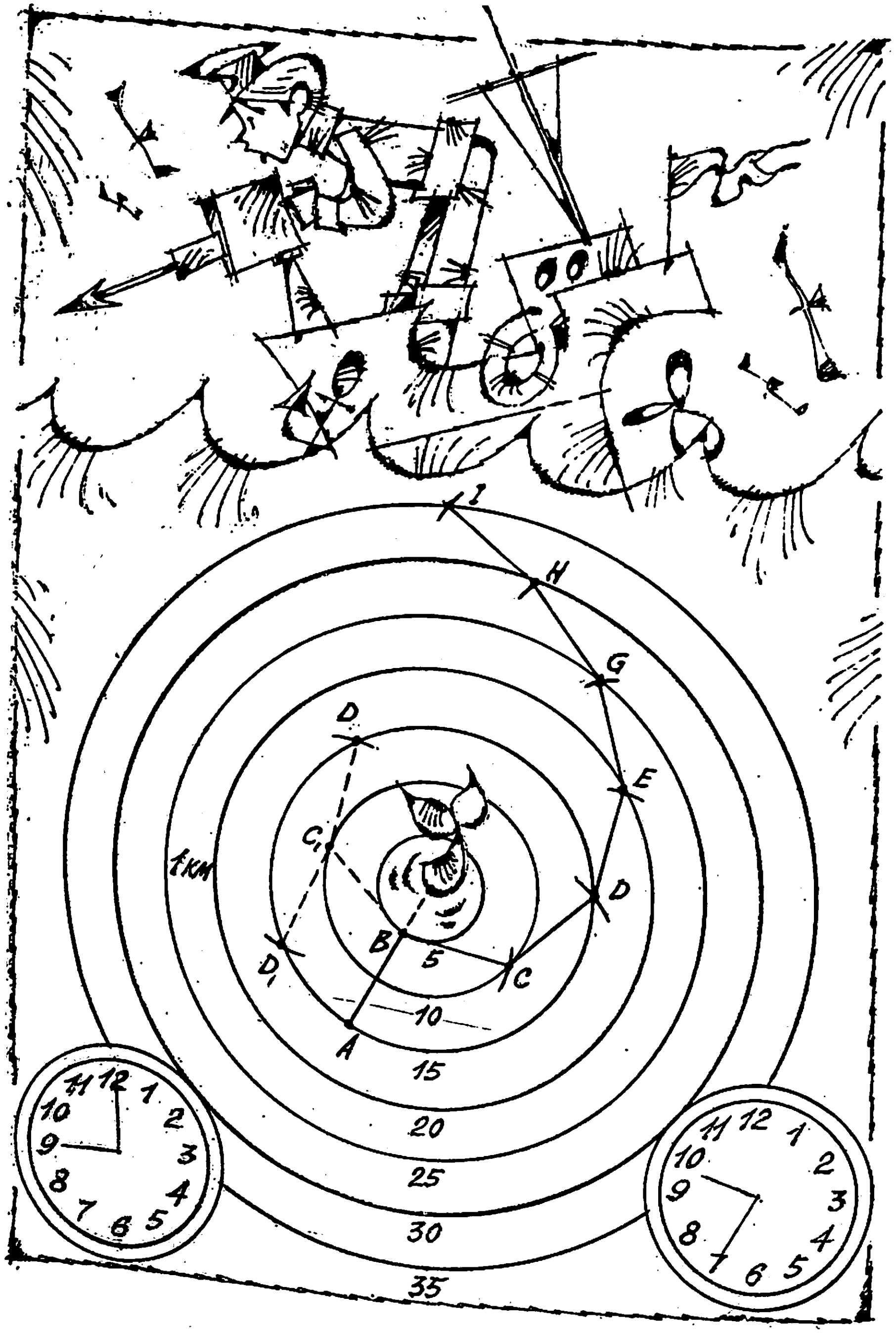
ЯК ШУКАТИ КИТА?

У всіх задачах на пошук, про які йшлося, була одна особливість. Або те, що шукали, або ті, хто шукав, залишалися на місці. Скарб любісінько лежав собі на дні озера, міни погойдувалися в тій самій точці на поверхні моря, лісничі завмерли на своїх постах.

Та як бути, коли те, що ми шукаємо, не стоїть на місці, та й нам самим кортить на пошуки?

Ми у штурманській рубці швидкохідного китобійного судна. Вдалині, на відстані близько трьох кілометрів, випірнув кит, випустив у повітря фонтан і швидко зник під водою. Розпочався пошук.

Штурман судна швидко позначив на карті місце, де щойно був кит, і корабель попрямував туди повним ходом.



Штурман схилився над картою.

— Хитрий кит,— міркує він уголос,— зарáз мчить щодуху у невідомому напрямку. Швидкість руху кита ми приблизно знаємо. Намалюємо на карті кола, куди кит устигне припливти, не міняючи напрямку, наприклад, через кожні 5 хвилин. Радіус першого такого кола дорівнюватиме швидкості кита помноженій на п'ять хвилин, радіус другого — швидкості кита, помноженій на десять хвилин, і так далі. Наприклад, якщо кит пливе із швидкістю лише двісті метрів на хвилину, то вже через п'ять хвилин він може опинитися в колі радіусом один кілометр (200 м×5=1000 м), через десять хвилин — в колі радіусом два кілометри і так далі.

Уявимо собі спочатку, що наш кит поплив у тому напрямку, що й судно. Де в цьому разі може відбутися зустріч із китом? Швидкість корабля 13 вузлів. Це приблизно 400 метрів на хвилину. Отже, ми йдемо вдвічі швидше за кита. Час до зустрічі з китом можна обчислити так:

початкова відстань до кита=час зустрічі з китом×швидкість корабля+ +час зустрічі з китом×швидкість кита.

Тому:

$$\text{час зустрічі з китом} = \frac{\text{початкова відстань до кита}}{\text{швидкість корабля} + \text{швидкість кита}}$$

Підставимо цифри:

$$\text{час зустрічі з китом} = \frac{3000\ \text{м}}{400\ \text{м/хв} + 200\ \text{м/хв}} = \frac{3000\ \text{м}}{600\ \text{м/хв}} = 5\ \text{хвилин.}$$

Штурман почекав, поки з моменту зникнення кита збігло 5 хвилин.

— Товаришу капітане,— закричав він у переговорну трубу,— кит уже може бути поряд, треба посилити спостереження.

Та, на жаль, виявити кита в районі місця першої зустрічі не вдалося. Отже, судячи з усього, він обрав інший напрямок. Де ж тепер його шукати?

Міркуємо так. На п'ятій хвилині зустріч не відбулася, організуймо її ще через п'ять хвилин, на десятій хвилині. Кит саме перебуватиме десь у відповідному колі. Наше судно на десяту хвилину пошуку теж має прийти в це коло. А йти йому лишилося п'ять хвилин. Обчислимо, яку відстань ми пройдемо за п'ять хвилин:

5 хвилин×швидкість корабля=5 хв×400 м/хв=2 кілометри.

Цю відстань ми й відкладемо від місця першої зустрічі так, щоб вона закінчилася в тому ж колі, де опиниться кит на десятій хвилині. Це й буде місце другої зустрічі.

Якщо кита й там не виявиться, визначимо в такий же спосіб місце третьої зустрічі — на п'ятнадцятій хвилині і так далі.

Зауважимо, що шлях китобійця пішов по ламаній лінії, яка весь час загинається проти годинникової стрілки. Так вона може оббігти увесь горизонт, і в який би бік не плив кит, у якійсь черговій точці його рано чи пізно зустрінуть. Адже на кожному новому колі китобоєць опиняється одночасно з китом.

* * *

Теорія пошуку часом допомагає прийняти рішення за обставин, від пошуку дуже далеких. От наприклад...

ЗАДАЧА ВОРОТАРЯ

Футбольний матч закінчувався. Уболівальники, розчаровані тим, що рахунку так і не було відкрито, почали просуватися до виходу.

Все сталося досить несподівано: помилка одного із захисників, і от уже центральний нападаючий з м'ячем у штрафному майданчику. Від одного удару залежить результат відповідального матчу. Це добре усвідомлює і воротар. Він увесь підібрався, готуючись до вирішального кидка.

Короткий різкий удар. Кидок воротаря. М'яч у сітці. Гол.

Присуд уболівальників був одностайним: в усьому винен воротар. Замість того, щоб стояти, спокійно чекаючи м'яч, він нервував, метушився, і от наслідок.

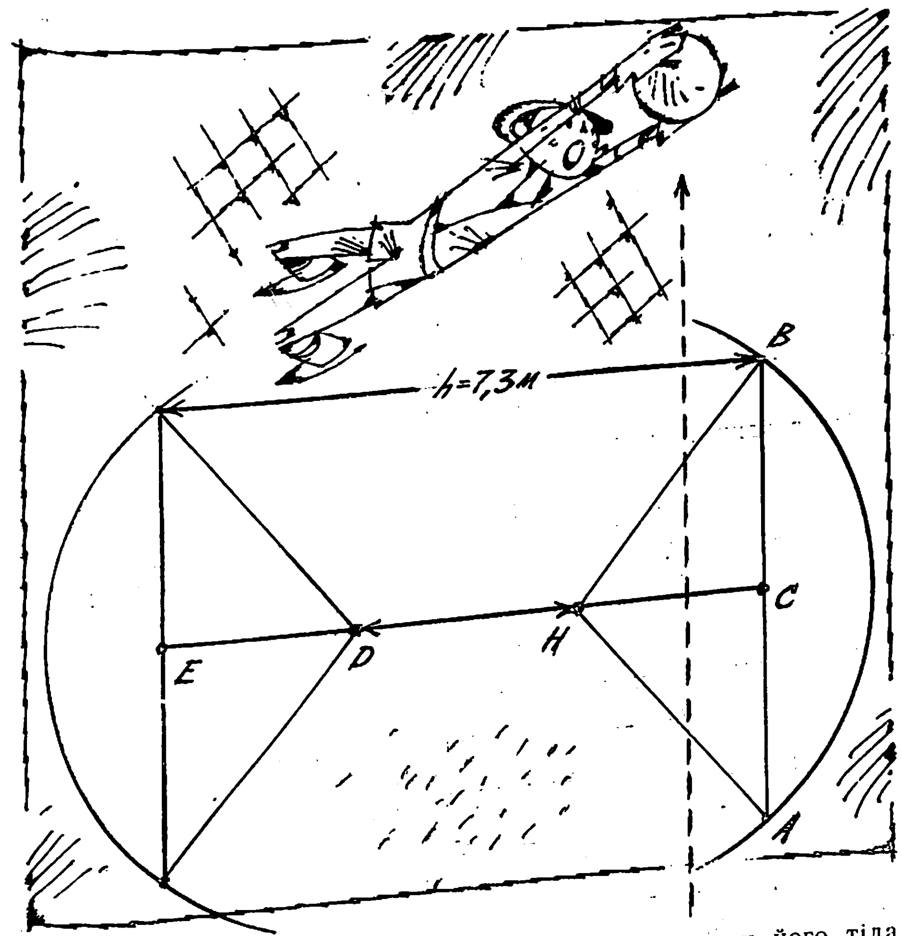
Справді, метушитися недобре. Тому без метушні, по-діловому проаналізуємо обстановку. Розв'язати задачу воротаря ми спробуємо з допомогою теорії пошуку.

Почнемо з простої схеми. Насамперед покажемо на ній ворота, причому дивитимемося на них згори.

Воротар під час гри переміщується вздовж воріт, ширина яких h. М'яч летить у ворота з боку поля, і, звичайно, наперед невідомо, в якому місці воріт він з'явиться.

Завдання воротаря — не пропустити м'яча. Воно дуже нагадує завдання лісників, зобов'язаних вчасно помітити виникнення пожежі в лісі. Недарма ж у пісні співається: «Воротар, готуйсь до бою! Вартовим ти стоїш на воротах!»

Шлях воротаря уздовж воріт в один кінець позначимо S. Воротареві, одразу видно, зовсім не обов'язково відходити до межі воріт. Адже він може взяти м'яча у кидку, поки той пролітає повз нього. Довжина кидка воротаря AH складається



з довжини стрибка воротаря до м'яча та довжини його тіла з простягнутими руками.

Тепер міркуватимемо так. Візьмемо найважчий випадок, коли м'яч летить по самій межі воріт AB. Поки м'яч пролітає шлях AB, воротар переміщається від точки H до точки D і назад і встигає взяти м'яча. Якщо ж м'яч піде не по межі, а буде скеровано у центр воріт, то його буде взято з іще більшою імовірністю.

Шлях і довжина кидка воротаря мають бути такими, щоб він устигав брати м'яча або в точці A, перебуваючи на початку свого шляху, або в точці B, після того як він пройде з H у D і повернеться назад у H. У цьому вся суть розрахунку.

Мовою математики це означає, що має бути дотримана така пропорція:

$$\frac{AB}{V_м} = \frac{2S}{V_в}.$$

Літерами $V_м$ і $V_в$ позначаються швидкості руху м'яча й воротаря.

Шлях м'яча по межі воріт $AB = 1{,}4\,AH$. Адже це сторона квадрата, вписаного у коло радіуса AH. Пригадуєте розповідь лісничого?

Виходить, що

$$\frac{1{,}4\,AH}{V_м} = \frac{2S}{V_в}.$$

Поглянувши на малюнок, помічаємо, що

$$S = h - (HC + DE).$$

Але HC і DE — це половини сторін вписаних квадратів, тому

$$HC = DE = \frac{1}{2} 1{,}4\,AH = 0{,}7\,AH.$$

Отже, довжина шляху воротаря в чеканні на м'яч

$$S = h - (0{,}7\,AH + 0{,}7\,AH) = h - 1{,}4\,AH.$$

Підставимо значення S у нашу пропорцію, одержимо:

$$\frac{1{,}4\,AH}{V_м} = \frac{2\,(h - 1{,}4\,AH)}{V_в}.$$

Розв'яжемо пропорцію і знайдемо, чому має дорівнювати довжина кидка воротаря AH.

$$1{,}4\,AH \times V_в = 2\,(h - 1{,}4\,AH)\,V_м,$$
$$1{,}4\,AH \times V_в = 2hV_м - 2 \times 1{,}4\,AH \times V_м,$$
$$1{,}4\,AH \times V_в + 2 \times 1{,}4\,AH \times V_м = 2hV_м,$$
$$AH = \frac{2hV_м}{1{,}4\,V_в + 2{,}8\,V_м}.$$

Остання формула й показує, якою має бути ця довжина, щоб м'яч не пройшов у ворота.

Ми маємо тепер усе необхідне для того, щоб визначити, як найкраще повинен діяти воротар і оцінити, чи правильно він розв'язав свою задачу у злощасному матчі.

Перейдемо до обчислень.

Футбольні ворота мають ширину 7,3 метра. Швидкість м'яча нехай дорівнює 20 метрам на секунду (72 кілометри на годину). Щодо швидкості воротаря, то спочатку припустимо, що він пересувається у воротах кроком, потім — перебіжками і нарешті — швидкими перебіжками.

Р о з р а х у н о к п е р ш и й. Воротар ходить кроком. $V_в = 1$ метр на секунду (близько 4 кілометрів на годину).

Визначимо необхідну довжину кидка воротаря.

$$AH = \frac{2hV_м}{1{,}4\,V_в + 2{,}8\,V_м} = \frac{2 \times 7{,}3 \times 20}{1{,}4 \times 1 + 2{,}8 \times 20} = \frac{292}{1{,}4 + 56} = \frac{292}{57{,}4} = 5{,}1 \text{ метра}.$$

Визначимо, скільки пройде воротар, чекаючи м'яча.

$$S = h - 1{,}4\,AH = 7{,}3 - 1{,}4 \times 5{,}1 = 7{,}3 - 7{,}1 = 0{,}2 \text{ метра}.$$

Та й тільки.

Р о з р а х у н о к д р у г и й. Воротар робить перебіжки. $V_в = 5$ метрів на секунду (18 кілометрів на годину).

Довжина кидка воротаря:

$$AH = \frac{2 \times 7{,}3 \times 20}{1{,}4 \times 5 + 2{,}8 \times 20} = \frac{292}{7 + 56} = 4{,}6 \text{ метра}.$$

Шлях воротаря:

$$S = 7{,}3 - 1{,}4 \times 4{,}6 = 7{,}3 - 6{,}5 = 0{,}8 \text{ метра}.$$

Це трохи більше за один крок.

Р о з р а х у н о к т р е т і й. Воротар робить швидкі перебіжки. $V_в = 10$ метрів на секунду (36 кілометрів на годину).

Довжина кидка воротаря:

$$AH = \frac{2 \times 7{,}3 \times 20}{1{,}4 \times 10 + 2{,}8 \times 20} = \frac{292}{14 + 56} = \frac{292}{70} = 4{,}2 \text{ метра}.$$

Шлях воротаря:

$$S = 7{,}3 - 1{,}4 \times 4{,}2 = 7{,}3 - 5{,}8 = 1{,}5 \text{ метра}.$$

Приблизно два кроки.

Час зробити певні висновки.

Головне в роботі воротаря — кидок. Хоч би як переміщався він у воротах, кидок повинен бути якомога більшим.

Скільки пройде воротар, чекаючи м'яч, залежатиме від того, як швидко він переміщатиметься. Наш розрахунок показав:

якщо воротар рухатиметься як пішоход,— йому краще стояти на місці; якщо здатний розвивати швидкість бігуна, йому варто переміщатися по кроку в один і другий бік; нарешті, якщо він може переміщатися дуже швидко, то корисно робити по два кроки праворуч і ліворуч.

Проте оскільки ми не взяли до уваги інерції воротаря, а також того, що він не може міняти напрямку руху миттєво, правильно буде сказати так: «У момент удару воротареві слід стояти на місці». Це, до речі, досвідчені воротарі й роблять.

Найважливіший висновок полягає у тому, що у футболі, як і в усякій іншій справі, необхідний точний розрахунок. Важко без детального аналізу визначити причину невдач нашого воротаря. На результат гри, звичайно, дуже впливає майстерність спортсмена, його натренованість, бойовий досвід. Та можна з цілковитою певністю сказати: коли воротар діятиме так, як того вимагає правильний розрахунок,— шлях до перемоги стане набагато коротшим.

Теорія пошуку показує, що тим, хто шукає, треба мати не лише добрий зір і слух, а й розвивати в собі здатність логічно мислити, знати математику, вміти швидко орієнтуватися у складній ситуації. Про тих, хто опанує ці якості, можна буде з цілковитою впевненістю сказати: «Хто шукає, той завжди знайде».

* * *

Незважаючи на те, що ми засвоїли досить складні задачі, навчилися обирати рішення в далеко не простій обстановці, досі залишається без відповіді питання, яке гостро постало перед «водієм на роздоріжжі». Як бути, коли вирішувати треба, а обстановка не ясна?

Ця задача не схожа на жодну з тих, з якими ми мали справу. Мабуть, вона потребує і незвичайного розв'язання.

Розділ 9

НАУКА ОБЕРЕЖНОГО РИСКУ,

в якому описується незвичайна гра, однаково корисна для людей будь-якого віку; пояснюється, що робити, коли починаєш вагатися; дається ряд корисних порад і, нарешті, розкривається один із секретів великих полководців

ЗАЄЦЬ ГРАЄТЬСЯ З ВОВКОМ

— Ну, Зайцю, постривай! — заревів Вовк і кинувся навздогін за косим. Кіноглядачі затамували дух.

Ось Заєць підбігає до величезного пляжу. Вовк трохи відстав, і Зайцю треба швидко вирішити, що робити далі: бігти через пляж чи причаїтися десь на пісочку. Заєць на мить замислився.

Все залежить від того, що робитиме Вовк: по-перше, він може почати нишпорити по пляжу, по-друге, йому за іграшку видертися на вишку і видивлятися Зайця звідти.

Якби Заєць знав, що Вовк нишпоритиме по пляжу, то найпевніше — бігти; поки Вовк огляне весь пляж, Зайця й сліду не буде. Та Вовк може вирішити й інакше — залізе на вишку. Отут він уже одразу помітить утікача, і Зайцеві буде непереливки.

Що робити?

Прийдімо Зайцю на допомогу. Надто вже хочеться, щоб Вовк і цього разу пошився в дурні.

Головна складність тут у тому, що ми, як і Заєць, не знаємо, що робитиме Вовк. І тому повинні приймати рішення в умовах невизначеності.

Із такими задачами доводиться мати справу, звичайно, не лише Зайцю, а й людям найрізноманітніших професій.

З невизначеністю обстановки ми стикаємося і в більшості наших ігор: шахах, шашках, доміно. Кожний гравець робить хід, не знаючи, що на думці в його партнера.

Наука, з допомогою якої розв'язуються подібні задачі, так і називається — теорія ігор. Теорія ігор — наука обережного риску. Вона вчить, як у складній, невизначеній обстановці без зайвого риску домогтися найкращого результату.

Повернемося, проте, до нашого друга Зайця, якого ми покинули саме в такій непевній обстановці.

Конфлікт між Зайцем і Вовком на гру, звісно, схожий мало. Заєць грає, може, востаннє в житті. Однак теорія ігор розглядає драму, що відбувається, як звичайнісіньку гру, скажімо, шашки. І так само, як і в шашках, у гри «Заєць—Вовк» є свої правила. Їх зручно зобразити у вигляді невеликої таблиці.

ГРА «ЗАЄЦЬ — ВОВК»

ВОВК

ЗАЄЦЬ	Нишпорить по пляжу	Спостерігає з вишки	Найгірший результат Зайця
ховається	не втече 0	можливо, втече 5	0
біжить	втече 10	можливо, втече (5)	5*
Найгірший результат Вовка	10	5*	

Таблиця показує, що можуть зробити Заєць і Вовк. Кожний з них у цій грі, як ми бачимо, може вибрати якийсь із двох можливих ходів. Заєць або ж біжить, або ж ховається; Вовк або ж нишпорить по пляжу, або ж спостерігає з вишки.

І як у всякій грі, тут теж важливо знати наперед результат, якщо Вовк зробить свій хід, а Заєць — свій. Цей результат у нашій грі зручно передати з допомогою цифр-очок від 0 до 10. Цифри ці показують можливість порятунку Зайця, його шанси втекти від Вовка.

Якщо Заєць щасливо втікає від Вовка, вважаємо, що результат гри — 10, якщо ж Зайцю втекти від Вовка не вдається — результат 0. Цифра ж 5 означає, що сподівання Зайця на порятунок і навпаки приблизно однакові.

Поглянемо на нашу табличку.

Якщо Заєць причаївся, а Вовк нишпорить по пляжу, то в Зайця дуже мало шансів утекти, рано чи пізно Вовк його знайде, тому оцінимо можливість Зайця, на жаль, у 0 очок. Якщо ж Заєць, у той час як Вовк нишпорить по пляжу, біжить, то можливість урятуватися в нього найбільша — 10. Адже поки Вовк крок за кроком обшукує пляж, Заєць напевне втече.

Дві клітинки, що залишилися, показують, який буде результат, якщо Заєць причаївся або біжить, а Вовк спостерігає з вишки. В обох випадках Заєць має змогу втекти, але також

виключений і протилежний результат — середній між 0 і 10, тому й оцінимо його у 5 очок.

Яке ж рішення необхідно обрати Зайцю? Іншими словами, який з двох можливих ходів він має зробити, не знаючи наперед, що вчинив Вовк? Поміркуємо за Зайця так.

Якщо він вибере свій хід «причаїтися», то найгірший результат, що загрожує йому, це 0.

Якщо ж він зважиться на інший хід — «бігти», то найгірше, що на нього чекає, це 5.

Випишемо ці найгірші результати справа від таблички. Звичайно, Зайцеві треба вибрати той хід, при якому буде кращий із цих двох гірших результатів — 5. Позначимо його зірочкою.

Можна сказати, вибравши хід, що дає цифру із зірочкою, Заєць наче застрахувався про всяк випадок. Справді, якщо він побіжить, то, що б не робив Вовк, шанси на порятунок у Зайця будуть не менші ніж 5. Це найнадійніший для Зайця хід.

Тепер подивимося на таблицю очима Вовка.

Якщо він нишпоритиме по пляжу, то найгірший його результат — 10 (чим цифра більша, тим для Вовка гірше). Якщо ж він надумався спостерігати з вишки, то найгірше, що на нього чекає,— 5 очок.

Випишемо найгірші для Вовка результати внизу під таблицею. Вовкові треба вибрати той із двох своїх можливих ходів, при якому його результат буде кращим — 5. Позначимо його також зірочкою. І тут можна сказати, що, вибравши хід, якому відповідає цифра із зірочкою, Вовк страхує себе на найгірший випадок. Це для нього найнадійніший вихід.

Зауважимо, що в клітинці таблиці на перетині надійних ходів Зайця і Вовка виявилася обведена для наочності цифра 5, що дорівнює обом цифрам із зірочкою, які одержано раніше. У таких випадках кажуть, що гра має свою сідлову точку.

Пригадаємо, що називають у географії сідловиною, чи перевалом у горах: пониження в гірському хребті між двома вершинами. Так і в нашій таблиці сідлова точка 5 служить наче перевалом від гіршого результату до кращого. І якщо вдасться знайти сідлову точку, обрати рішення буде вже не важко: ходи, що перетинаються у ній, завжди найкращі.

Так само й у грі «Заєць—Вовк» найкращим рішенням будуть саме ті ходи Зайця й Вовка, які перетинаються у сідловій точці:

для Зайця — бігти;

для Вовка — спостерігати з вишки.

Ми вже бачили, що коли Заєць біжить, то хоч як би поводився Вовк, нагода втекти, що дорівнює 5 очкам, для Зайця забезпечена.

З іншого боку, і Вовк, якщо він дотримуватиметься свого надійного ходу,— спостерігати з вишки,— теж може з гарантією вважати, що шанси Зайця врятуватися не вище 5, що б той не робив.

І, нарешті, найважливіше. Якщо Вовк через свою споконвічну впертість чи просто через малограмотність не робить правильного надійного ходу, то можливість Зайця врятуватися значно зросте порівняно з гарантованою.

Наприклад, щойно Вовк почне нишпорити по пляжу, як Заєць, дотримуючись свого надійного ходу — тікаючи,— зможе уникнути небезпеки з результатом 10 очок — напевно.

Розглянемо кілька цікавих задач, які допоможуть нам ближче ознайомитися з теорією ігор.

ЩО РОБИТИ, КОЛИ ЗДАЄТЬСЯ, НІБИ ЗАБУВ ВИМКНУТИ ТЕЛЕВІЗОР?

Забудькуватий чоловік їхав у відпустку. Перед відходом поїзда йому здалося, що він забув дома вимкнути телевізор. А може, ні?

Поїзд от-от рушить. Що робити?

Можна, звичайно, відкинути вагання і влягтися на полиці. Та навряд чи вдасться спокійно заснути. Адже телевізор, якщо він увімкнений, напевне згорить. Доведеться платити карбованців п'ятдесят за ремонт.

Так, мабуть, треба мерщій хапати валізу і замість Кавказу їхати додому вимикати телевізор.

А якщо тривога виявиться марною? От буде прикро! Адже пропаде квиток на поїзд, а коштує він тридцять карбованців.

Залишимо забудькуватого власника телевізора з його сумнівами й валізою на підніжці вагона і спробуймо розв'язати задачу, яку він сам собі (а заодне й нам) задав.

Усі вже, мабуть, здогадалися, що допомогти тут може тільки теорія ігор. Складемо таблицю гри «Забудько — телевізор».

ГРА «ЗАБУДЬКО — ТЕЛЕВІЗОР».

ЗАБУДЬКО \ ТЕЛЕВІЗОР	Вимкнений	Увімкнений	Найгірший результат забудька
додому	0 крб.	50 крб.	50
у відпустку	30 крб.	(30) крб.	30*
Найгірший результат телевізора	0	30*	

У ролі партнера по грі із забудьком тут виступає телевізор. Телевізору, звичайно, байдуже, хто виграє. Тому його участь у грі зводиться до того, що він може виявитися або увімкненим, або вимкненим.

Такі ігри, в яких нема активного супротивника, називають «іграми з природою». Не приписуючи природі злих намірів, вважатимемо, проте, для страховки, що вона діє завжди найгіршим для людини чином, «за законом бутерброда».

Забудька чекають такі результати гри:

якщо він поїде у відпустку, а телевізор, на його щастя, виявиться вимкненим — 0 крб.;

поїздка у відпустку, коли вдома увімкнений телевізор, коштуватиме 50 карбованців (вартість ремонту);

якщо забудько повернеться додому лише переконатися, що телевізор вимкнутий,— це коштуватиме йому 30 карбованців (вартість квитка);

той же збиток збережеться й тоді, коли виявиться, що телевізор був увімкнений.

Для того щоб підказати забудькові правильний план дій, треба знайти рішення гри.

На щастя, гра має сідлову точку. Позначимо її (30 карбованців), як ми це вже робили, колом. Сідлова точка показує правильний хід забудька — повернутися додому. Тільки тоді він може бути певен, що його збиток ні за яких обставин не перевищуватиме 30 карбованців. Варто, проте, забудькові ризикнути і поїхати у відпустку, як ніхто вже не зможе ручатися, що йому не доведеться витратити 50 карбованців на ремонт телевізора. І добре ще, коли обійдеться без пожежі.

ГРИПОФАГ ЧИ АНТИГРИПІН?

У Науково-дослідному інституті кашлю й чхання (можливо, десь і є така установа) ішло жваве обговорення нових ліків проти грипу.

Шановний лікар Бармалеєв настійливо пропонував винайдений ним грипофаг, що просто пожирає грипозні віруси.

Не менш шанований лікар Айболитов несміливо зауважив, що за певних форм хвороби грипофаг разом з вірусами трохи їсть і хворого. І це дещо ускладнює лікування і затягує хворобу. Замість грипофагу він запропонував свої ліки — антигрипін, який, окрім лікувальної дії, має ще й дуже приємний смак.

На жаль, признався Айболитов з притаманною йому відвертістю, антигрипін теж не бездоганний. Хоч він і не їсть хворих, і приємний на смак, та в деяких випадках грипозний вірус сам із задоволенням ласує цими ліками. І тут уже хворому доводиться виплутуватися самому, що, звичайно, подовжує час лікування.

Пристрасті розпалювалися. Одні були за ненажерливий грипофаг Бармалеєва, інші — за смачний антигрипін Айболитова. Були й мирні пропозиції: лікувати хворих грипофагом і антигрипіном водночас. Виявилося, проте, що це неможливо. Суміш обох ліків вибухала від найменшого дотику.

Важко сказати, чим би скінчилась ця суперечка, якби не виступ лікаря Статистика, який за дорученням інституту акуратно вів бухгалтерію грипу.

Статистик почепив таблицю.

ГРА «ЛІКИ — ВІРУСИ ГРИПУ»

ВІРУСИ ГРИПУ

		Гонолулу	Сінгапур	Найгірший результат ліків
ЛІКИ	грипофаг Бармалеєва	3 дні	6 днів	6
	антигрипін Айболитова	4 дні	(5) днів	5*
	Найгірший результат вірусів	3	5*	

— Дія грипофагу й антигрипіну перевірялась на багатьох хворих,— впевнено доповідав Статистик.— Як було встановлено, частина заслаблих зазнала атаки грипозного вірусу «Сінгапур». Причому з'ясувалося, що ці збудники грипу по-різному діють на хворого і не однаково реагують на обидва препарати. Тому тривалість хвороби під час лікування може бути різною. Грипофаг виліковував від вірусу «Гонолулу» за три дні, а від вірусу «Сінгапур» — за шість. Антигрипін затягував боротьбу з вірусом «Гонолулу» до чотирьох днів, зате давав раду з вірусом «Сінгапур» за п'ять. На жаль, до закінчення хвороби наперед сказати, який вірус напав на людину, неможливо. Перед нами типова гра «Ліки — віруси грипу».

Далі Статистик пояснив, як має вирішуватися ця гра — конфлікт між ліками й вірусами. Спочатку він виписав найгірші результати ліків і вірусів і вибрав із них кращі, які позначав зірочкою. На перетині ходів, що відповідають цифрам із зірочкою, тут також виявилася сідлова точка — тривалість хвороби п'ять днів. Цифру 5 Статистик взяв у коло.

— Отож,— підвів риску Статистик,— план боротьби з грипом ясний. Необхідно застосувати другий хід — ліки антигрипін Айболитова. В цьому разі, який би вірус не був причиною хвороби, буде надійна гарантія, що за п'ять днів хворий одужає. Застосування грипофагу такої гарантії не дає: якщо хворий стане жертвою вірусу «Сінгапур» — тривалість хвороби одразу ж виросте до шести днів — на цілий день більше. Але ж на грип хворіють мільйони людей. І кожний виграний у хвороби день виростає у мільйони днів здоров'я і праці.

* * *

Досі нам щастило — всі ігри, які ми розв'язували, мали сідлові точки. Правильний план гри знайти було легко й просто. Та, на жаль, так буває далеко не завжди.

ЛОВИСЯ, РИБКО, ВЕЛИКА Й МАЛЕНЬКА

В однакових надувних гумових човнах ми з приятелем вирушаємо порибалити. На якір ми стаємо майже поряд. І вудочки в нас однакові, і поплавці, й гачки. Різниця лише в одному — в улові.

От і цього разу. Коли вдома ми зважили рибу, виявилося, що приятель піймав чотири кілограми, а в мене ледве набралося три. Хіба не кривдно?

Щоправда, під час останньої риболовлі дещо стало з'ясовуватись. Я помітив, що приятель діставав наживку не так, як я — з банки, де вона лежала натрусом, а виймав її щоразу з окремого паперового пакетика.

Для чого все це потрібно, я, відверто кажучи, не розумів.

— Як це тобі вдалося наловити риби майже в півтора раза більше за мене? Невже тому, що ти загорнув наживку, як у папір?

Настрій у мого приятеля після успішного вудіння був чудовий.

— Уяви собі, справа саме у папірцях. І ще де в чому...

Незабаром на аркуші, вирваному із зошита, з'явилася табличка з записом гри «Рибалка — рибка».

ГРА «РИБАЛКА — РИБКА»

Р И Б К А

РИБАЛКА	велика	маленька	найгірший результат рибалки
тісто	3 кг	6 кг	3
черв'яки	5 кг	4 кг	4*
Найгірший результат рибки	5*	6	

Секрет успіху мого приятеля полягав ось у чому.

Ми, як правило, брали наживку двох різних видів: кульки з тіста і черв'яків. На тісто краще йшла маленька рибка, її, як казали бувалі рибалки, можна було наловити до шести кілограмів, а на черв'яків — велика, улов досягав п'яти кілограмів.

Оскільки маленька рибка давала більший улов, я, наживляючи гачок, надавав перевагу тісту. Та, видно, тісто було до вподоби і великій рибі. Вона вихоплювала наживку з-під носа у маленької, а сама при цьому на гачок чіплялася рідко. Звідси і мій результат — лише три кілограми.

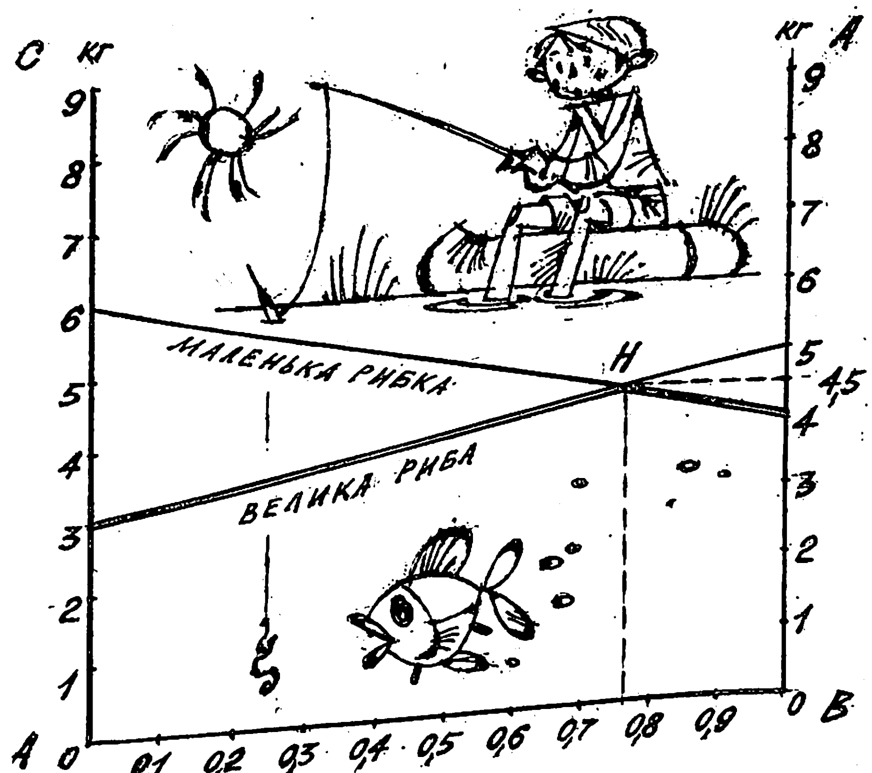
Мій приятель пішов іншим шляхом. Спочатку він, як і я, намагався знайти кращий хід. Ми знаємо, що для цього треба спробувати відшукати сідлову точку гри. Та позначений зірочкою кращий з гірших ходів рибалки — чотири кілограми — означає, що я за будь-якого випадку можу розраховувати на такий улов. Але для риби найменший надійний результат — п'ять кілограмів. Іншими словами, на гачок готові почепитися п'ять кілограмів риби, а я можу взяти тільки чотири кілограми.

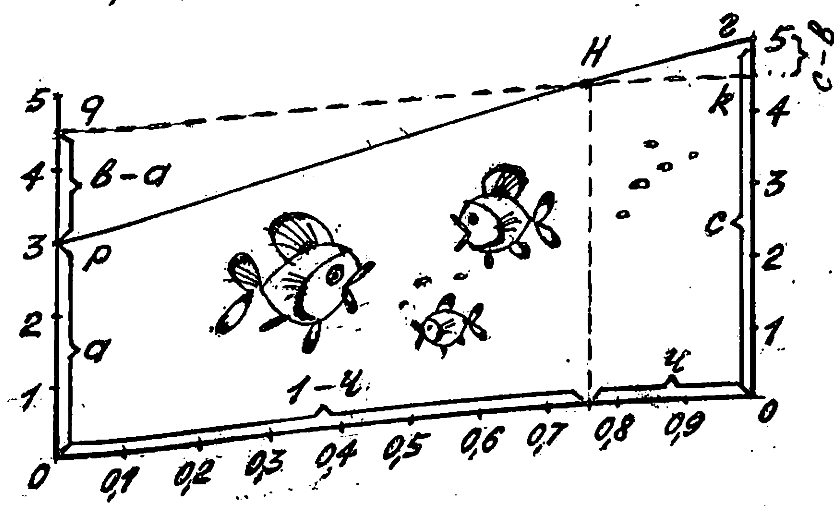
Тут щось не так. Адже жоден із ходів рибалки не гарантує улову більше чотирьох кілограмів. Де вихід із становища?

Вихід у тому, що рибалка повинен тут застосовувати не один єдиний хід, як це робилося в усіх попередніх іграх, а обидва, розумно чергуючи їх. Такий план дій називається змішаним.

Для того щоб знайти змішаний план гри, зручно скористатись, як ми вже це не раз робили, графічним прийомом. Його зображено у верхній частині малюнка.

По горизонтальній осі в довільному масштабі відкладено відрізок, довжина якого дорівнює одиниці. На початок і на кінець цього відрізка опустимо перпендикуляри AC і BD і на них збудуємо шкали, на яких можна вести відлік ваги риби у межах





десяти кілограмів. Причому, на AC відкладатимемо результати того ходу рибалки, коли він наживлює тісто, а на BD — результат іншого ходу, коли на гачку черв'як.

Спочатку розглянемо результати гри для великої риби. Як видно з таблиці, це 3 кілограми для тіста і 5 кілограмів для черв'яка. На перпендикулярі AC з'явиться відповідна точка 3 кг, а на перпендикулярі BD — точка 5 кг. З'єднаємо ці точки прямою лінією і напишемо на ній для пам'яті «Велика риба».

Після цього проробимо те ж саме для маленької риби. На перпендикулярі AC з'явиться точка 6 кг, а на BD — точка 4 кг. З'єднаємо ці точки прямою з написом «Маленька риба».

Далі вчинимо так само, як і в усіх попередніх іграх: спочатку знайдемо гірші з можливих результатів рибалки, а потім із них виберемо найкращий...

Найгірші результати рибалки, як видно з нашого малюнка, позначені товстою ламаною лінією, що з'єднує найменші улови на тісто і на черв'яка — точки 3 кг і 4 кг. Найкращий з цих найгірших результатів виходить у точці H — місці зламу лінії. Це найнадійніший гарантований результат. Він дорівнює, якщо поглянути на праву шкалу, $4^1/_2$ кілограма. Як ми й передбачали, цей результат міститься між позначеними зірочками у таблиці найгіршим результатом рибалки — 4 кг і риби — 5 кг.

Тепер залишається тільки подумати, який треба прийняти змішаний план, щоб цього результату досягти: треба встановити, у якому співвідношенні, як часто рибалка повинен пускати в хід тісто і черв'яка.

Відповідь на це запитання також дає графік на малюнку.

Спочатку розглянемо, як часто доводиться наживляти тісто і черв'яків при грі з великою рибою. Для цього збільшимо частину графіка, що нас цікавить, і розглянемо її окремо у нижній частині малюнка.

Позначимо результат першого ходу рибалки — «тісто» — літерою a, другого ходу — «черв'як» — літерою c, а одержаний надійний результат — літерою $в$. Позначимо також частоту застосування першого ходу літерою $ч$, тоді очевидно, що другий хід повинен застосовуватися з частотою $1 - ч$.

Ясно, що при змішаному плані гри надійний результат повинен дорівнювати сумі добутків результатів обох ходів на відповідні частоти їх застосування:

$$в = a \times ч + c\,(1 - ч).$$

Користуючись схемою, розміщеною у нижній частині малюнка, легко довести, що потрібна нам частота $ч$ і є не що інше, як ділянка горизонтальної осі між $в$ і c. Справді, якщо ми проведемо через точку H пунктирну горизонтальну лінію sk, то одержимо два подібні трикутники gpH і keH, для яких можна написати

$$\frac{pg}{ke} = \frac{gH}{kH}.$$

Підставимо у цю формулу величини відповідних сторін трикутників, які можна зняти прямо з малюнка:

$$pg = в - a;\ ke = c - в;\ gH = 1 - ч;\ kH = ч.$$

Одержимо:

$$\frac{в - a}{1 - ч} = \frac{c - в}{ч}.$$

Або, після нескладних перетворень:

$$(в - a) \times ч = (c - в) \times (1 - ч);\ вч - aч = c\,(1 - ч) - в\,(1 - ч);$$
$$в \times ч - a \times ч = c \times (1 - ч) - в + в \times ч;\ в = a \times ч + c \times (1 - ч).$$

Це і є формула надійного результату, яка підтверджує, що для його одержання необхідно чергувати перший хід (тісто) з частотою $ч$ і другий хід (черв'як) з частотою $1 - ч$.

З малюнка видно, що

$$ч = 0{,}25,\ а\ 1 - ч = 0{,}75.$$

Отже, рибалка повинен застосовувати свій перший хід утричі рідше, ніж другий:

$$\frac{0{,}25}{0{,}75} = \frac{1}{3}.$$

У середньому на кожні три черв'яки повинне припадати одне тісто. Тільки за цих умов і можна сподіватися одержати кращий надійний результат $4^1/_2$ кілограма. Ось він:

$$в = a \times ч + c \times (1 - ч) = 3 \times 0{,}25 + 5 \times 0{,}75 = 0{,}75 + 3{,}75 = 4{,}5 \text{ кг}.$$

Аналогічних висновків можна дійти, вивчаючи потрібне чергування наживки і для дрібної риби. І тут, щоб одержати середній результат $4^1/_2$ кілограма, тісто і черв'як мають чергуватися у співвідношенні 1 : 3.

Ну, а до чого ж тут загадкові паперові пакетики, з яких виймалося то тісто, то черв'яки?

Виявляється, у них був певний сенс. Як ми знаємо, рибалці треба чергувати наживку у співвідношенні 1 : 3. Так повинно виходити в середньому, після багатьох закидань вудочки — ходів рибалки. Кожний же окремий хід має бути випадковим, несподіваним для риби. Інакше вона пристосується до певної наживки, чекатиме на неї і не дасть себе обіграти.

От мій приятель і порозкладав шматочки тіста й черв'яків у пакетики. Пакетиків із черв'яками було заготовлено утричі більше, ніж із тістом. Причому навіть сам рибалка не знав, яка наживка в якому пакетику. Так і виходило, що кожний хід був для рибок сюрпризом, а в середньому виконувався найкращий змішаний план вилову.

У цьому й був секрет успіху премудрого рибалки.

* * *

Навички, набуті в попередніх розповідях, допоможуть нам «виловити» і щасливий кінець казки про витязя на роздоріжжі.

КІНЕЦЬ ПРАДАВНЬОЇ КАЗКИ

Ми розлучилися з моїм другом, автолюбителем, у той драматичний момент, коли він вирішив скерувати свого «Запорожця» в об'їзд довшою дорогою. Так він вирішив після жвавої консультації з групою спеціалістів, думки яких розійшлися.

Більшість голосів (два з трьох) була за те, що основна дорога розмита. Тому й було вирішено їхати в об'їзд. Разом з тим, прямий шлях, якби дорога була справна, обіцяв досить значний виграш у часі. Все це показано на малюнку.

Чи правильним було рішення автолюбителя, чи все воно враховувало? Спробуємо зараз це з'ясувати.

Сам того не підозрюючи, наш автолюбитель вступив у гру з природою, правила якої нам тепер уже відомі.

У автолюбителя два можливих ходи: перший — «шлях прямо», другий — «шлях в об'їзд».

Природа в цій грі виступає в образі дороги. У неї також два ходи. Вона може бути «розмита» і «як новенька».

Результати ходів наших гравців зручно виразити в часі на дорогу (цих цифр ніхто із спеціалістів не оскаржував).

Якщо шлях автолюбителя проліг прямо, а дорога виявилася розмитою, то їхати — п'ять годин. Якщо ж у цьому випадку дорога «як новенька» — їхати одну годину.

Якщо автолюбитель вирушить в об'їзд, то очевидно, що, незалежно від стану, в якому перебуває основна дорога, він перебуватиме у дорозі чотири години.

Щоб знайти правильне рішення гри, тут треба неодмінно врахувати і ті поради, якими користувався автолюбитель.

Зробимо це так. Будемо множити кожний результат на ступінь достовірності (ймовірність) одержаних відомостей про обстановку: час руху розмитою дорогою помножимо на $\frac{2}{3}$ (два радники з трьох), а час руху «новенькою» дорогою — на $\frac{1}{3}$ (один із трьох). Після цього, щоб мати загальну картину, додамо результати для кожного з ходів автолюбителя. Одержимо:

для шляху автолюбителя «прямо»

$$5\times\frac{2}{3}+1\times\frac{1}{3}=\frac{11}{3}=3\frac{2}{3}\text{ години;}$$

для шляху автолюбителя «в об'їзд»

$$4\times\frac{2}{3}+4\times\frac{1}{3}=\frac{12}{3}=4\text{ години.}$$

Те, що сума можливих значень часу в дорозі для першого ходу автолюбителя на $\frac{1}{3}$ години (20 хвилин) менша, ніж для другого ходу, згідно з теорією ігор говорить нам про те, що шлях прямо — швидший, вигідніший, ніж в об'їзд.

Тепер ми можемо з цілковитою певністю сказати нашому витязю: твоє рішення про дорогу в об'їзд було неправильним.

Так ми ще раз переконалися в тому, що очевидне на перший погляд рішення далеко не завжди на ділі виявляється правильним і щоб вирішити правильно, треба неодмінно подружитися з наукою.

Розповіді, які ознайомили нас із теорією ігор, мають дещо несерйозний, жартівливий характер. Проте нехай це не вводить в оману мого читача. Є в теорії ігор і поле діяльності, в якому зовсім не до жартів. Ця теорія знаходить дедалі ширше застосування у найсерйозніших справах нашої країни.

ГРА «АВТОЛЮБИТЕЛЬ — ДОРОГА»

ДОРОГА

АВТОЛЮБИТЕЛЬ	розмита ($\frac{2}{3}$ голосів)	як новенька ($\frac{1}{3}$ голосів)
дорога прямо	5 годин	1 година
дорога в об'їзд	4 години	4 години

Економіка й правила руху транспорту, біологія й управління виробництвом, військова справа й соціологія — ось об'єкти діяльності теорії ігор.

Тут ми не зможемо показати цієї діяльності в усій її складності. Та дещо все-таки спробуємо.

МАТЧ «ГЕОЛОГИ — НАФТА»

Цей матч ішов не на стадіоні. Полем для досить серйозної гри став один із районів нашої країни, багатий на нафту.

Геологи бурили нафтові розвідувальні свердловини двох типів: глибокі й неглибокі.

Буріння глибокої свердловини — складна інженерна справа, що вимагає значної витрати часу, сил і коштів. Тим часом було відомо, що в районі, де велася розвідка, можна натрапити на нафту не лише на великих глибинах, а й на малих.

Розвідка на малих глибинах потребує менших зусиль, відбувається швидше.

Коли ж бурити глибоку свердловину, а коли — неглибоку? Адже точно сказати, на якій глибині нафта, не завжди можливо.

І от геологи вирішили «пограти» з нафтою, викликати її на матч. Склали таблицю гри.

У геологів було два можливих ходи: бурити неглибоко і бурити глибоко. Нафта теж має дві можливості: залягати глибоко й неглибоко.

ГРА «ГЕОЛОГИ — НАФТА»

НАФТА

ГЕОЛОГИ	Глибоко	Неглибоко
Бурять неглибоко	0,3	0,6
Бурять глибоко	0,5	0,4

Це так звана «гра з природою». Природа не чинитиме свідомих перешкод геологам. Та все ж мимохіть може піднести їм безліч неприємних сюрпризів: довгий і складний пошук виявиться марним.

Тому, як і у випадку з телевізором, для гарантії вважатимемо, що природа завжди поводиться найгіршим чином.

Імовірні результати гри геологи розрахували заздалегідь. Це ймовірності знайти нафту за обох видів буріння при глибокому і неглибокому її заляганні. Звідки беруться подібні ймовірності, ми пригадуємо з розповідей про арифметику випадковостей. Виводимо такі цифри:

бурять неглибоко, а нафта лежить глибоко — результат малоймовірний — 0,3;

бурять неглибоко і нафта неглибоко — результат досить імовірний — 0,6;

бурять глибоко і нафта глибоко — результат імовірний, але трохи менший, ніж у попередньому випадку, оскільки це значно складніше — 0,5;

бурять глибоко, а нафта неглибоко — ймовірність ще менша, оскільки шукають не там, де є нафта, та все ж більша, ніж у першому малоймовірному випадку — 0,4.

Вся ця задача дещо нагадує відоме жартівливе завдання: де краще шукати предмет, який загубився,— під ліхтарем, де світло, чи в темряві, де його загубили?

Беручись розв'язати задачу геологів, ми одразу ж помічаємо, що ця таблиця дуже нагадує таблицю гри «Рибалка — рибка». Кожне число цієї таблиці рівно у 10 разів менше, ніж таке саме число таблиці «Рибалка — рибка». Тому, навіть не вибираючи серед гірших результатів кращих, можна сказати, що геологам, як і рибалкам, не пощастило. Гра не має сідлової точки, і тому треба шукати змішаний план дій.

Для розрахунків змішаного плану можна було б побудувати графік, подібний до того, який ми побудували раніше. Але цього можна й не робити. Нас цілком влаштовує графік на малюнку про рибалку й рибку. Тільки, користуючись ним, вважатимемо, що на перпендикулярах AC і BD відкладаються відрізки завдовжки не десять кілограмів, а до одиниці. Це дасть можливість одразу ж зняти з графіка необхідне співвідношення тих частот першого й другого ходу геологів, які цікавлять нас. Це співвідношення, як і в рибалки, дорівнюватиме 0,25 : 0,75, або 1 : 3.

Зробивши цей розрахунок, геологи, очевидно, муситимуть розподілити свої можливості (людей, машини, устаткування) так, щоб, у середньому, 0,25 усіх зусиль витрачалось на неглибоке буріння і 0,75 — на глибоке.

А для того щоб знайти результат робіт геологів за змішаним планом, скористаємося відомою нам формулою премудрого рибалки:

$$в = a \times ч + c \times (1 - ч) = 0{,}3 \times 0{,}25 + 0{,}5 \times 0{,}75 = 0{,}075 + 0{,}375 = 0{,}45.$$

Це означає, що геологам при змішаному плані гарантується імовірність знаходження нафти 0,45. На жаль, не дуже багато, але поза всякими сумнівами більше, ніж можна було б одержати, складаючи план якось інакше.

Теорія ігор підготувала нас до відповіді ще на одне запитання, поставлене аж на початку книжки: як слабшому перемогти сильного?

Спробуємо і на нього відповісти.

ВЕЛИКИЙ ПОЛКОВОДЕЦЬ БЕРЕ ПЕРЕВАЛ

Чому великим полководцям вдається з малими силами розбити ворога, що числом переважає у багато разів?

Історія неспростовно засвідчує: видатні полководці відрізнялися від своїх посередніх колег, зокрема, тим, що вміли своєчасно і правильно ризикувати.

Розглянемо механізм такого обдуманого риску. Найкраще зробити це на прикладі.

Великому Полководцеві (для зручності називатимемо його скорочено В. П.), що має три дивізії, будь що треба прорватися через гірський перевал. Завдання це не легке, оскільки перевал охороняють чотири дивізії ворога. Щоправда, їх очолює Пересічний Полководець (П. П.). Озброєння й військова підготовка дивізій супротивників беруться за однакові.

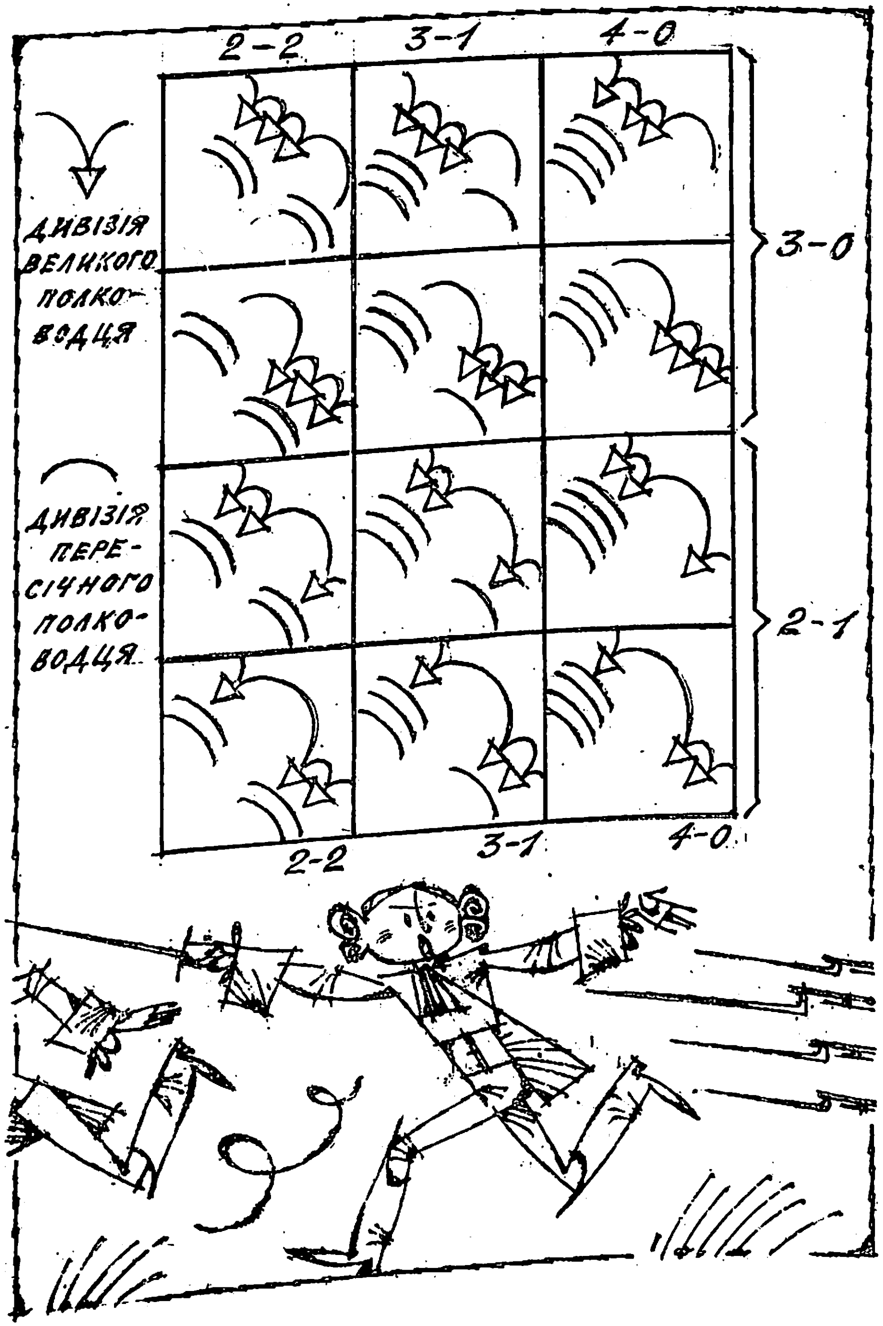
Через перевал два проходи. За умовами нашої баталії перемагає та з ворогуючих сторін, у якої при зустрічі на перевалі виявиться більше дивізій на одному з його проходів: вона знищує ворога і залишає за собою перевал.

Здавалося б, шанси В. П. на перемогу дорівнюють нулю — адже сили його війська набагато менші. Та, виявляється, ще не все втрачено. Адже він може ризикнути прорватися через перевал, забезпечивши собі перевагу на одному з проходів.

Великий Полководець починає з того, що аналізує виниклу ситуацію. Для цього він оцінює можливі результати битви, враховуючи всі варіанти співвідношення сил на перевалі. Простежимо за міркуваннями Великого Полководця. Він мислив приблизно так.

У П. П. є три ходи — варіанти розподілу своїх чотирьох дивізій на захист двох проходів: 4 і 0, 3 і 1, 2 і 2 дивізії відповідно на перший і другий прохід.

В. П. має два варіанти. Він може розподілити свої три дивізії так: 3 і 0 або 2 і 1 дивізії. Причому, оскільки він може переставити дивізії по перевалах місцями (0 і 3 або 1 і 2), то кількість варіантів у В. П. подвоюється.



Отже, всього у нас є 12 варіантів взаємного розташування сил В. П. і П. П. по проходах. Всі вони зображені на нашому малюнку, кожен у своїй клітинці.

Оскільки В. П. заздалегідь не знає, який варіант розподілу сил обрав П. П., то він має зробити розрахунки сподіваних результатів битви для кожного з можливих варіантів.

Так, якщо при варіанті П. П. 4 — 0 дивізій В. П. застосує свій варіант 3 — 0, то в результаті битви на першому проході 3 або 0 дивізій зустрінуться з чотирма дивізіями П. П. На другому проході 0 або 3 дивізії В. П. зустрінуться з 0 дивізій П. П.

У відповідних проходах у колах проставлені числа, що характеризують результат битви: три дивізії В. П. проти чотирьох дивізій П. П. зазнають поразки; це означає, що один прохід лишається за П. П. В колі на проході, де зустрічаються три дивізії В. П. і чотири дивізії П. П., ставиться цифра 1. Якщо три дивізії В. П. зустрічаються на другому проході з 0 дивізій П. П., то це означає, що П. П. втрачає один прохід, і в колі ставиться цифра 1. Якщо 0 дивізій В. П. сходяться з 0 дивізій П. П., то результат битви нічийний і у відповідному колі з'являється цифра 0.

Знайдемо далі середній результат — середнє число збережених проходів за варіантом розподілу сил В. П. 3 — 0 і варіантом П. П. 4 — 0. Воно дорівнює співвідношенню сумарного результату до числа проходів:

$$\frac{1+1-1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Цей результат показано у подвійному колі на перетині відповідних варіантів (ходів) В. П. і П. П. Він означає: якщо В. П. ризикне розподілити сили по проходах у співвідношенні 3 і 0, а П. П. розподілятиме сили у співвідношенні 4 і 0, то П. П. в середньому вдасться відстояти лише $^1/_2$ проходу. Якщо б П. П. поміняв сили першого й другого проходів, то це на середньому результаті не позначилося б, оскільки В. П. ці варіанти враховує (змінилася б лише нумерація проходів).

Розглянемо далі стан справ за інших ходів — варіантів розподілу сил В. П. і П. П. і внесемо одержані результати у відповідні клітинки.

Середні значення результатів битв при всіх варіантах співвідношення сил на перевалах зручно для наочності зобразити у вигляді окремої таблиці.

СЕРЕДНІ ЗНАЧЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ БИТВ ПРИ ВСІХ ВАРІАНТАХ СПІВВІДНОШЕННЯ СИЛ НА ПЕРЕВАЛІ (СЕРЕДНЄ ЧИСЛО ЗБЕРЕЖЕНИХ ПРОХОДІВ)

ВАРІАНТИ РОЗПОДІЛУ СИЛ ВЕЛИКОГО ПОЛКОВОДЦЯ

ВАРІАНТИ РОЗПОДІЛУ СИЛ ПЕРЕСІЧНОГО ПОЛКОВОДЦЯ

	Варіант 3—0	Варіант 2—1	Найгірший результат В.П.
Варіант 4—0	$\frac{1}{2}$	0	0
Варіант 3—1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Варіант 2—2	0	1	0
Найгірший результат П.П.	$\frac{1^*}{2}$	1	

Оцінюючи одержані середні результати за всіма варіантами, можна помітити, що найкращий серед усіх для В. П. виходить тоді, коли він розподіляє сили у співвідношенні 2 і 1, а П. П. має при цьому співвідношення сил 4 і 0. Або у В. П. 3 і 0, а у П. П. 2 і 2. У цих випадках середнє число проходів, збережених П. П., дорівнює 0, тобто П. П. зазнає нищівної поразки і втрачає перевал.

Проте варіант В. П. 2 — 1 при ретельнішій перевірці для нього не підходить. Справді, цей варіант добрий лише при варіанті П. П. 4 — 0.

Та варто П. П. випадково обрати варіант 2 — 2, як одразу ж оборона його стає найкращою з усіх можливих — середнє число збережених проходів дорівнює одиниці, тобто максимуму.

Через це В. П. доцільно зупинитися на своєму варіанті 3 — 0. При цьому в будь-якому випадку гарантується середній результат не гірший, ніж $\frac{1}{2}$. З'явилася наша давня знайома — сідлова точка. А оскільки супротивник у В. П. пересічний і не знає теорії ігор, то можливо, що він обере і до краю пересічне рішення — без усякого риску розділити сили у співвідношенні 2 і 2 — і буде вщент розбитий.

Так, завдяки продуманому риску, слабший перемагає сильнішого.

ЗАКІНЧЕННЯ,

у якому підбиваються певні підсумки

Дійшовши до цього місця й усвідомивши, що до кінця книжки залишилося вочевидь менше, ніж прочитано, читач має право поставити собі (і авторові) запитання:

— А в чому ж усе-таки головний секрет великих полководців?

Я б на це відповів так.

Великими полководцями у цій книжці ми називаємо тих, хто повинен обирати важливі рішення в складній обстановці. Це люди праці: робітники й колгоспники, інженери й агрономи, воєначальники й лікарі.

Головний секрет майстерності цих людей у тому, що вони вміють за найскладніших обставин знаходити найкраще рішення. Те єдине, яке дає перемогу.

У нашу добу науково-технічної революції вже не можна обирати серйозних рішень по-старому, покладаючись лише на свій досвід та інтуїцію. Сталися величезні зміни в усіх сферах людської діяльності. Люди глибше сягнули у таємниці природи. Незмірно складнішими і потужнішими стали машини. Озброєна небаченою раніше технікою, людина стала набагато сильнішою, ніж колись. Вона у тисячі разів краще й далі бачить, швидше пересувається, у неї в руках велетенські механізми, здатні міняти обличчя планети.

Отже, зросла могутність людини, а разом з цим і відповідальність. Господар Землі повинен бути мудрим і обачним у своїх рішеннях. Адже тепер від його дій залежить незрівнянно більше, ніж раніше. Неправильні і навіть просто не дуже вдалі рішення обертаються страшним лихом, ведуть до марнування величезних ресурсів та людських сил, до мільйонних збитків.

А от правильне, обгрунтоване рішення обіцяє плановому соціалістичному господарству величезні переваги. Пригадаймо розраховані нами найкращі плани перевезень руди чи розкрою металу й те вагоме заощадження, яке вони дають. Розумне рішення здатне творити чудеса.

Особливу роль при розробці найкращих рішень відіграє радянська наука, яка тепер, в епоху науково-технічної революції, не лише джерело знань, а й безпосередня продуктивна сила суспільства. Це означає, що успіхи науки сьогодні здатні одразу ж зробити людину сильнішою. Звідси випливає: щоб бути сильним, треба бездоганно володіти наукою про найкращі рішення — дослідженням операцій. Треба зрозуміти й опанувати увесь арсенал її методів.

Як сучасний лікар не може нормально працювати без необхідного технічного устаткування — мікроскопа, рентгенівського апарата, електрокардіографа,— так і той, хто приймає рішення, не може обійтися сьогодні без теорії ймовірностей, математичного планування, теорії ігор. Опанування цього «технічного устаткування» під загальною назвою «дослідження операцій» і відбувалося на сторінках нашої книжки.

Нелегка це справа!

Як писав один з основоположників дослідження операцій, ми пройшли «прямою й вузькою стежиною між пастками Надспрощень і болотом Надускладнень».

Чи можна сказати, що ми вже проникли в усі таїнства вироблення рішень, опанували науку дослідження операцій? Ні, поки ще не можна. Так само, як уміння розв'язувати арифметичну задачу про плавальний басейн із трубами ще не означає, що ви можете спроектувати і збудувати такий басейн.

Ця книжка — лише буквар із дослідження операцій. І в цьому нема нічого прикрого: з букваря починають усі, в тому числі й найвидатніші полководці.

І ще. Дослідження операцій не заміняє знань «своїх» наук, якими повинні володіти люди найрізноманітніших спеціальностей. Щоб обирати в житті правильні рішення, потрібні знання конкретної справи, практичний досвід, довга й наполеглива праця.

Справедливо буде сказати:

«Зроблено лише перший крок на важкому шляху великих полководців. Це і мало і багато. Мало тому, що крок поки один. Багато, оскільки перший крок означає початок шляху».

ЗМІСТ

Абчук В. А.

Секрет великих полководців: Нариси. /Пер. з рос. Т. А. Кінька. Худ. оформл. Ю. Є. Жолудєва/.— К.: Веселка, 1981.— 147 с., іл.

Цікаві нариси про науку, яку називають «Дослідженням операцій». Наука ця допомагає обирати правильні рішення за найскладніших обставин.

А $\frac{70803-049}{М206(04)-81}$ 167. 81. 4803010102.

Владимир Аврамович Абчук

СЕКРЕТ
ВЕЛИКИХ ПОЛКОВОДЦЕВ

Очерки

(На украинском языке)

Для среднего и старшего школьного возраста

Перевод с русского
Тараса Андреевича Кинько

Художественное оформление
Юрия Ефимовича Желудева

Издательство «Веселка»,
Киев-4, Бассейная, 1/2

Редактор
Є. П. Литвиненко
Художній редактор
М. М. Ємельянов
Технічний редактор
В. І. Дмухар
Коректори
Е. І. Саталкіна,
В. М. Шешеня

Інформ. бланк № 1929

Здано на виробництво 10. 10. 80. Підписано до друку 28. 11. 80. Формат 60×84 1/16. Папір друкарський № 1. Гарнітура літературна. Друк високий. Умовн. друк. арк. 8,84. Обл.-вид. арк. 8,74. Тираж 65000. Зам. 1287-0. Ціна 30 коп.

Видавництво «Веселка». Київ-4, Басейна, 1/2. Львівська книжкова фабрика «Атлас» республіканського виробничого об'єднання «Поліграфкнига» Держкомвидаву УРСР. Львів-5, Зелена, 20.

У видавництві «Веселка» у 1981 році вийдуть такі науково-художні книжки про природу:

Дмитрієв Ю. Д. Ця дивовижна наука зоологія...

У книжці розповідається про науку зоологію, про її різноманітні професії, яких налічується кілька десятків.
Читач довідається про те, що роблять люди, які вивчають звірів, птахів, риб, метеликів, павуків, про пошуки і відкриття, які робляться сьогодні в науці.

Топачевський А. О. Симфонія життя.

Андрій Топачевський, автор багатьох сценаріїв до фільмів про тварин, на великій кількості прикладів досліджує історію стосунків людини з природою.
Спираючись на власні спостереження, він приходить до несподіваних висновків: природа активно пристосовується до діяльності людини, іде їй назустріч.
Як, коли і в якій формі виявляється мирний контрнаступ природи, читач довідається, прочитавши цю книжку.