А. Г. Конфорович

ДОБРИЙ ДЕНЬ, АРХІМЕДЕ!

Цікаві задачі, ігри, головоломки

КИЇВ
ВИДАВНИЦТВО
ЦК ЛКСМУ
«МОЛОДЬ»
1988

ББК 22.1
К 65

Книжка залучає до своєрідної подорожі в світ цікавої логіки та математики. Ігровий характер завдань не самоціль, а лише один з можливих шляхів до пізнання законів науки як моделей певних явищ навколишнього світу. Ігри — каталізатори та фільтри інтересів, задоволення яких може привести читачів і до серйозних занять у галузях, які подані в книжці своєю найдоступнішою і дещо оздобленою гранню.

Книга приобщает к своеобразному путешествию в мир занимательной логики и математики. Игровой характер заданий не самоцель, а только один из возможных путей познания законов жизни как моделей определенных явлений действительного мира. Игры — катализаторы и фильтры интересов, удовлетворение которых может привести читателей и к серьезным занятиям в областях, предстающих в книге своей наиболее доступной и несколько расцвеченной стороной.

Рецензент *Н. Г. Токар*

Художнє оформлення *В. І. Глазунова*

К $\frac{4403010000-117}{М228(04)-88}$ БЗ.18.7.87

ISBN 5-7720-0026-8

Було колись у Сіракузах

Це було так давно, що час перемолов на порох мармурові палати й міцні фортечні стіни. Але він не затьмарив слави великого Архімеда. Людська пам'ять через покоління пронесла силу його розуму.

Кажуть, що, зачарований математикою, він, навіть сидячи у ванні, креслив пальцем на панелі геометричні фігури або й просто на своєму тілі. Тут учений відкрив закон, який став основою теорії плавання тіл у рідинах та газах. Після цього біг вулицею рідних Сіракуз, вигукуючи: «Еврика! Еврика!»

Архімед креслив і на піску. Щоб переконати інших в ефективності винайденої системи числення, перелічив число пилинок у кулі, діаметр якої в 10^8 разів перевищує діаметр Землі. 10^4 цих пилинок вміщується в маковому зерні, а в згаданій кулі в десятковій системі — 10^{63}.

Слід сказати й про супергігант, до якого вчений довів свою лічбу. Він становить $10^{8\cdot10^{16}}$. Якщо в книзі на 400 сторінок кожна сторінка містить 50 рядків, а в кожному рядку 50 цифр, то загалом у ній буде мільйон цифр. Тоді для запису Архімедового супергіганта потрібна була б бібліотека на 80 мільярдів таких книг. Їхня шеренга п'ятдесят разів обгорне Землю по екватору.

Коли над Архімедовими Сіракузами навис меч завойовника, обороні їх він віддав усю силу свого генія математика, фізика, винахідника, військового інженера і стратега. Він гукав ворогові:

— Не чіпай мої кола!

До останніх миттєвостей життя йшов Архімед шляхом ще нерозгаданих таємниць природи, закодованих у числах і фігурах, слухаючи ще ніким не збагнену симфонію математики і математичного природознавства.

Хвилі людської пам'яті змивають пил забуття з креслень на сіракузькому піску, і автор їх завжди близький нам.

— Добрий день, Архімеде! Ми теж креслитимемо кола. Можливо, якесь з них збережеться, як твої. Можливо... Хоча ой як це нелегко!..

Мабуть, не можна осягнути все, що відомо сьогодні математиці. Крізь призму математичних моделей люди бачать і вивчають об'єкти навколишнього світу. Тому відкриті закономірності не консервуються в скарбницях математичних коштовностей. На них завжди чекають природодослідники, техніки і навіть фахівці гуманітарних наук.

Багато важливих математичних понять і навіть теорій входили в науку у формі цікавих задач, ігор або головоломок. Створенням їх займалися визначні математики. І в наш час Архімедів Стомахій приносить радість шанувальникам точної думки і красивих геометричних конструкцій.

Зрозуміло, було б недоцільно віддаватися іграм і розвагам тільки з тим наміром, що якась з них збагатить у майбутньому науку. І все ж таки використати їх як одні з можливих форм розумового відпочинку, як знаряддя для тренування кмітливості, зрештою, як одну із стежок у науку цілком виправдано попередньою історією цих математичних мініатюр. Геніальний французький учений Блез Паскаль, який у молоді роки пізнав найвищі злети натхнення, писав: «Предмет математики настільки серйозний, що не варто пропускати нагоди зробити його трохи цікавішим».

Від читання популярних книжок дехто чекає надто швидкого й легкого вдоволення, без зусиль. Це хибний шлях. Таке читання не залишить сліду ні в житті, ні в душі. Математичні книжки, серед них і науково-популярні, слід не просто читати. З ними треба працювати. Пам'ятаючи, що чим більше ми звикаємо користуватися готовими рецептами, тим більша ймовірність прогледіти приховані закономірності не лише в задачах, а й в об'єктах навколишнього світу. Потрібно шукати власне вирішення навіть тоді, коли не знаєш, як підійти до розв'язання поставленої задачі. Навіть великі не завжди з маршу брали математичні бастіони. Великий німецький математик К. Ф. Гаусс писав про розв'язання однієї задачі: «Протягом чотирьох років майже щотижня я вдавався до тієї чи іншої спроби розв'язати цей вузол. Але всі намагання, всі зусилля були марні, і я сумно клав перо. А нещавно... загадка з'ясувалася із швидкістю блискавки... І ніхто не зможе уявити собі, якого напруження потребувало це».

Отож тимчасові невдачі слід розглядати як сходження до переможного «Еврика!».

1

Що хатка, то інша гадка

Формування й засвоєння логіки відбувається непомітно.

Алгебраїчним способом вчені встановили, що первісне мислення не хаотичне, воно по-своєму цілком логічне, хоча й відображає не об'єктивні відношення предметів дійсності, а потребу пристосування людини до навколишнього величезного й безконечно складного світу, пояснити який вона, як правило, була ще не в змозі. Раннє дитинство людства проходило, так би мовити, без нагляду. Тому шлях до пізнання істинних законів світу виявився довгим, складним і не по прямій лінії. Як зазначає В. І. Ленін, «практична діяльність людини мільярди разів повинна була приводити свідомість людини до повторення різних логічних фігур, щоб ці фігури могли набути значення аксіом» (Ленін В. І. Повне зібр. творів, т. 29, с. 160).

Так вироблявся один з найпотужніших і притаманний лише людині інструмент пізнання — логічне мислення, закони якого й вивчає логіка.

Довести будь-яке твердження — означає показати, що воно є наслідком інших тверджень, істинність яких уже встановлена.

Про логічний взаємозв'язок всіх наслідків міркувань влучно висловився німецький математик Давід Гільберт: «Дозвольте мені погодитися, що двічі по два дорівнює п'яти, і я доведу, що з димаря вилітають відьми».

У казках, приказках, усній та писемній творчості люди блискуче розкривали логічну стрункість і багатство зв'язків навколишніх явищ, показуючи водночас суперечливий характер відображення життєвих ситуацій методами формальної логіки.

Цей збірник відкривають задачі, для розв'язання яких досить володіти стихійною логікою. Шлях до неї лежить через спостереження, вміння виявляти певні закономірності в об'єктах, відокремлювати істотні ознаки від другорядних, класифікувати об'єкти за ознаками. А виконувати ці дії означає вміти логічно міркувати, що надзвичайно корисно, навіть необхідно всім. Можливо, спочатку доведеться просто вгадати відповідь. Не біда. «Те, що першого разу хитрість, на третій стає методом» (Ж. Дьєдонне).

1. П'ятеро хлопців вирішили записатися до гуртка логіків. Керівник гуртка запропонував їм спочатку витримати вступний екзамен: «Ви приходитимете до нас щочетверга, сім днів поспіль, дотримуючи при цьому таких умов: якщо Андрій приходить разом з Дмитром, то Борис має бути відсутнім; якщо ж Дмитро відсутній, то Борис має бути, а Віктор нехай не приходить; Андрій і Віктор не можуть одночасно бути ні присутніми, ні відсутніми; якщо Дмитро прийде, то Григорій має не приходити; якщо Борис відсутній, то Дмитро має бути присутній, але це в тому разі, коли не присутній Віктор; а якщо Віктор присутній, то Дмитро приходити не повинен, а Григорій має прийти; кожного із семи днів ви маєте приходити до нас групою, склад якої жодного разу не повинен повторитися».

Хлопці стали членами гуртка логіків. Як це вони зробили?

2. Знайдіть закономірності, за якими розміщені групи фігур на кожному з малюнків 1.1—1.8 *; виберіть із занумерованих фігур ту, яка задовольняє закономірності для відповідної групи фігур і має бути на вільному місці.

3. Знайшовши закономірності, за якими розміщені фігури (мал. 1.9 і 1.10), накресліть фігури, які мають бути на вільних місцях.

4. Знайдіть закономірності, за якими розподілені деталі чайників і будиночків (мал. 1.11 і 1.12), і домалюйте на окремих аркушах паперу серії зображень, яких бракує, і таких, що задовольняють знайдені закономірності.

5. Знайдіть закономірності розміщення фігур (мал. 1.13 і 1.14) і виявіть фігури, які ці властивості не задовольняють, тобто є зайвими.

---

* Усі малюнки в умовах задач мають подвійну нумерацію: перше число означає номер розділу, друге — порядковий номер малюнка в розділі. У відповідях (розділ «Не річ наказати — треба показати») малюнки позначені одним числом.

6. Фігурі А (мал. 1.15) відповідає за певним законом фігура Б. Яка з восьми занумерованих унизу фігур відповідає за тим самим законом фігурі В?

7. Які фігури має використати майстер (мал. 1.16), щоб закінчити монтаж вітража?

8. Яку з трьох кнопок має натиснути робітник (мал. 1.17), щоб перекрити трубу, з якої витікає рідина?

9. Яким шляхом має йти скрипаль на репетицію тріо (мал. 1.18)?

10. Яка з шести ваз розбилася (мал. 1.19)?

11. У якому порядку спортсмен долав снаряди А, В, С і D (мал. 1.20)?

12. Вал мотора (унизу, у лівому куті) обертається проти годинникової стрілки і обертає серію інших валів (мал. 1.21). У якому напрямі обертається вал, позначений літерою К?

13. Мурашка стартувала в своєму квадратику (мал. 1.22) і рухалася тільки паралельно сторонам квадратиків. Обминувши зайняті павуками, вона точно по одному разу побувала в 56 вільних квадратиках і, не перетнувши жодного разу свого шляху, повернулася в свій квадратик. Яким був маршрут мурашки?

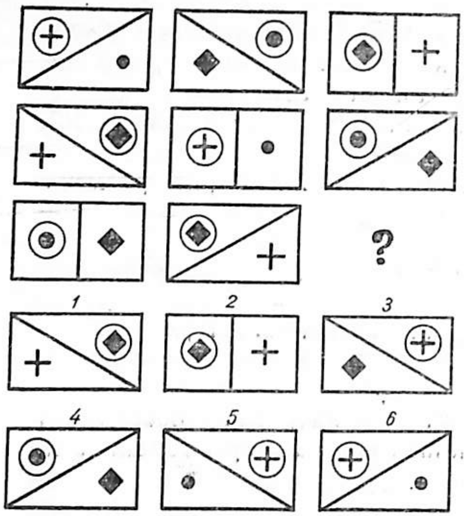
14. Автомашини можуть рухатися дорогами міста, роблячи ліві та праві повороти лише під прямим кутом (мал. 1.23). Машини можуть в'їжджати в місто по дорозі, вказаній стрілкою, а виїжджати з нього в будь-якому напрямі.

Якось одна дорога була перекрита на ремонт, і тоді з'ясувалося, що машини взагалі не могли виїхати з міста. Де перекрили дорогу?

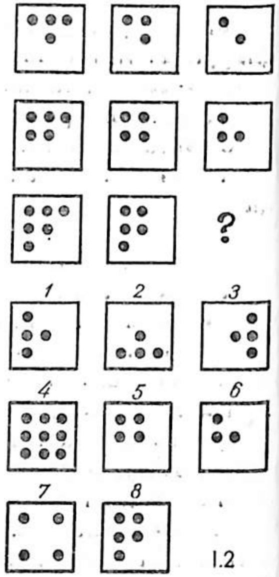
15. Цей механізм (мал. 1.24) винайшов шотландський астроном XVII ст. Джеймс Фергюсон. Триб А закріплений на осі. Якщо корбою повернути навколо неї всю систему за годинниковою стрілкою, то триб В теж обертатиметься в цьому напрямі навколо своєї осі. Кожний з трьох таких трибів С, D і Е обертається незалежно один від одного. Триби А, В і Е мають по 30 зубців, триб С — 29, D — 31. Як рухатимуться тонкі триби, коли систему обертати за годинниковою стрілкою?

16. Ганнуся, повернувшись із школи додому, розповідала, як вона одна на гуртку юних логіків розв'язала задачу:

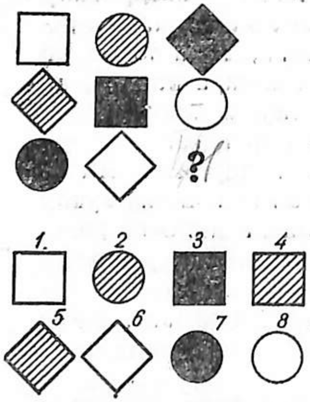
— Учителька викликала до дошки Катрусю, Зіну й мене. Вона поставила нас одну за одною перед класом:



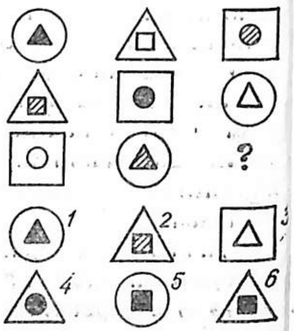
1.1



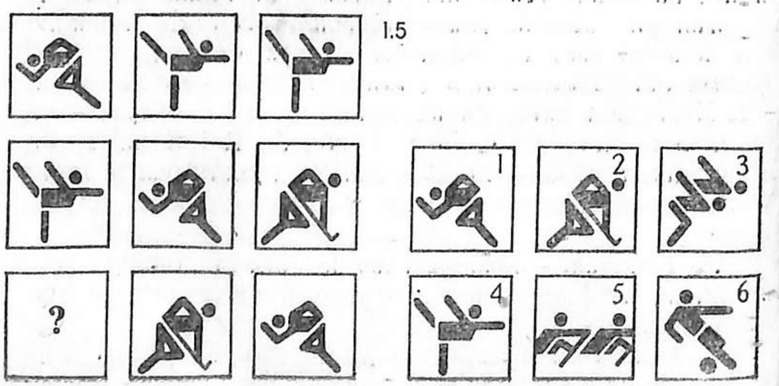
1.2



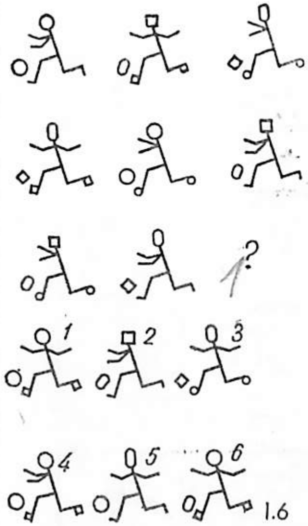
1.3



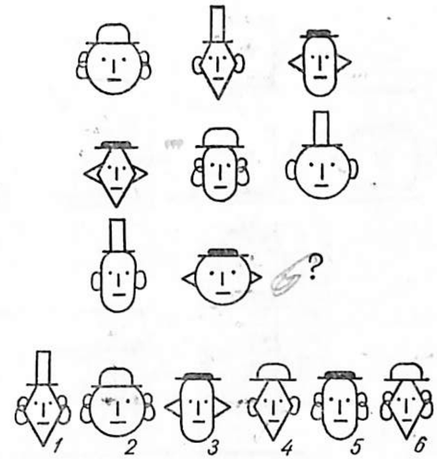
1.4



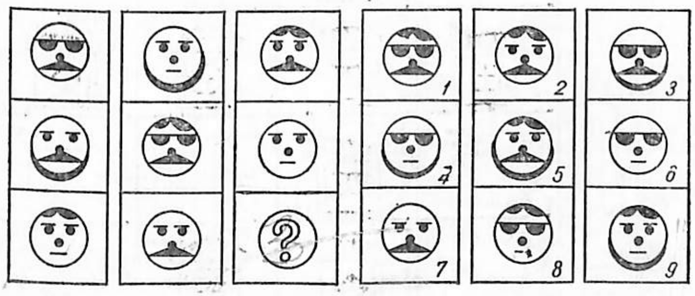
1.5



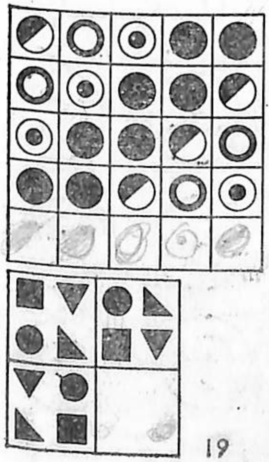
1.6



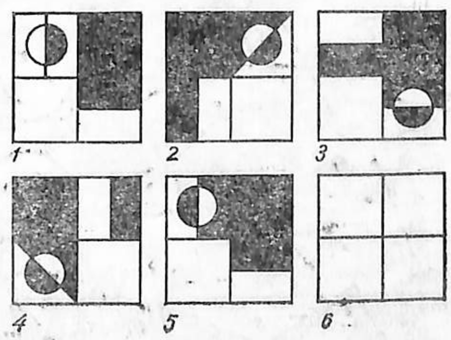
1.7



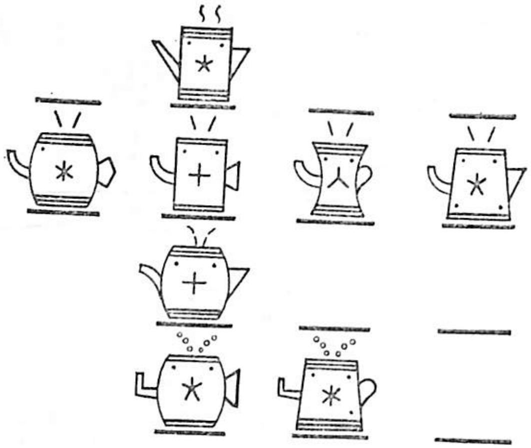
1.8



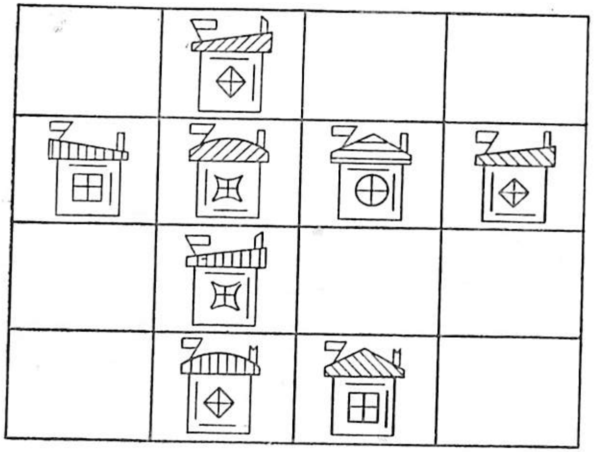
19



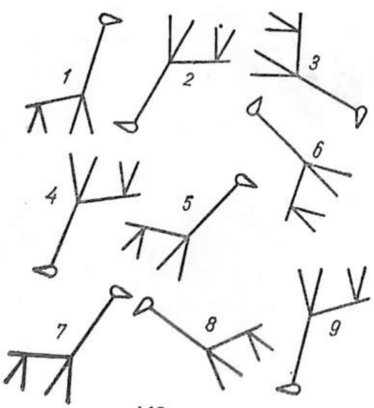
1.10



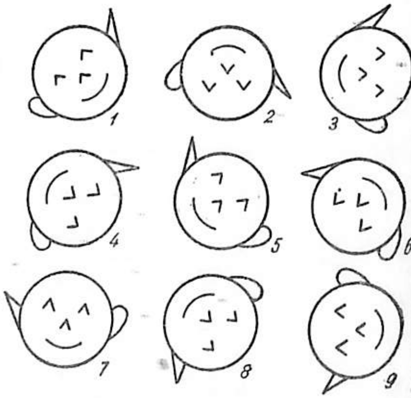
1.11



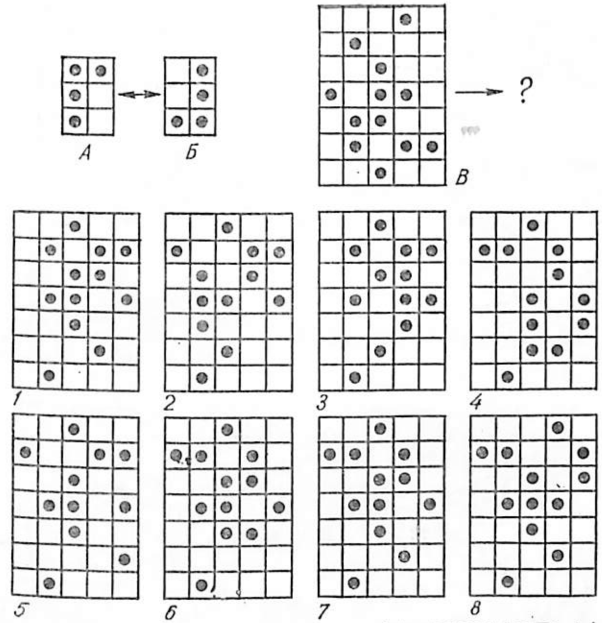
1.12



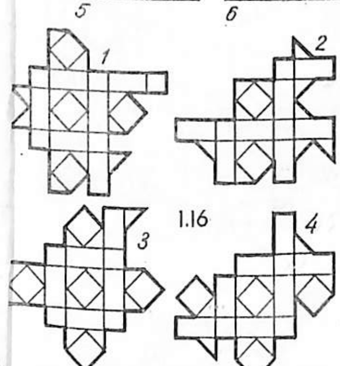
1.13



1.14

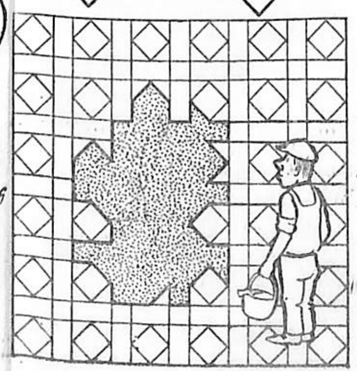


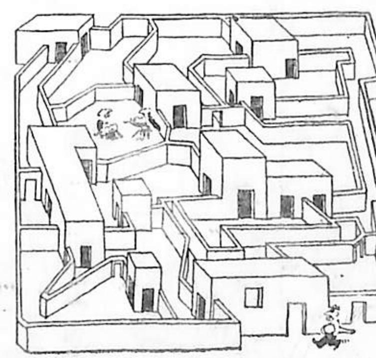
1.15



1.16

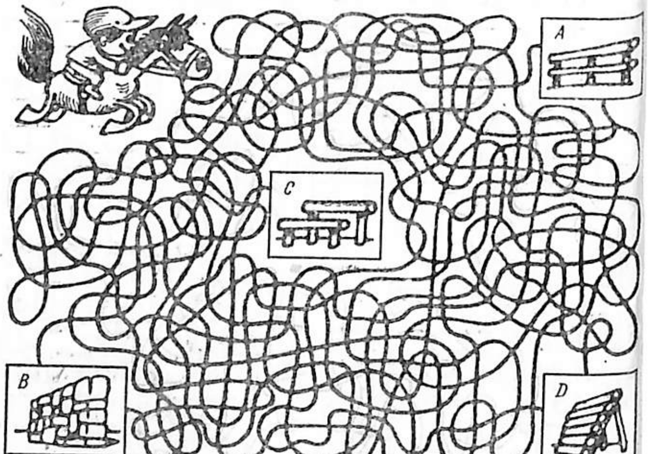
1.17



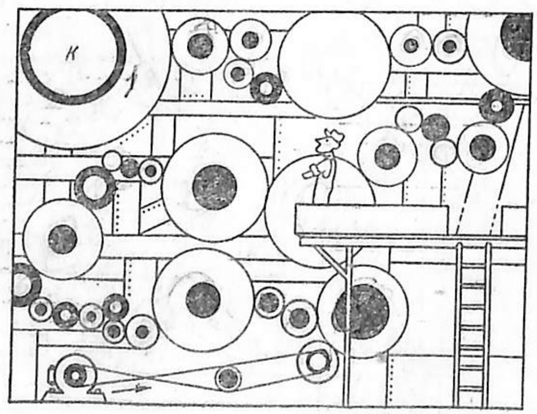


1.18

1.19

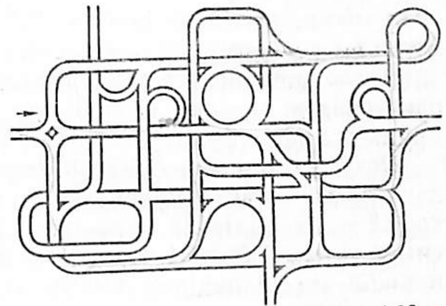


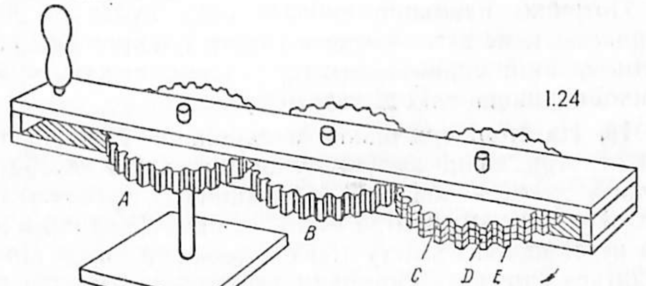
1.20



1.21

1.22



1.23



1.24

мене попереду, за мною Зіну, за Зіною — Катрусю. При цьому не дозволяла нам обертатися. Потім учителька показала всім відкриту коробку, у якій було 5 бантиків: 2 білих і 3 темних. Один бантик учителька прикріпила до моїх кіс, другий — Зіні, третій — Катрусі. Жодна з нас не знала, який бант у кого на голові і які банти лишилися в коробці. Катрусі було найпростіше, бо вона бачила і мене, і Зіну. Зіна бачила тільки мене, а я нікого не бачила. Коли вчителька запитала Катрусю, чи вона не знає, який бант у неї на голові, Катруся відповіла, що не знає. Зіна теж не знала. Тоді я шляхом логічних міркувань прийшла до правильної відповіді.

Ніхто не вірив, що це можна було зробити, і тоді Ганнуся пояснила, як вона міркувала. Як?

17. На заміщення посади радника одного східного володаря претендували чотири мудреці. Щоб зробити остаточний вибір, претендентів перевірили на кмітливість.

Усім чотирьом зав'язали очі і, посадивши навколо столу, сказали: «На лобі кожного з вас поставили чорну або білу мітку, причому чорних більше, ніж білих». Потім у претендентів зняли пов'язки і кожен зміг побачити мітки, зроблені іншим. Той, хто визначить колір мітки на власному лобі, мав стати радником.

Довго дивилися претенденти один на одного. Нарешті один сказав: «У мене на лобі чорна мітка». Відповідь виявилася правильною. Як він міркував?

18. На столі три однакові скриньки. В одній з них лежать дві чорні кульки, у другій — чорна і біла, у третій — дві білі. На кришках скриньок зроблено написи: «2 білі», «1 біла, 1 чорна», «2 чорні». Однак жодний з написів не відповідав умісту скриньки, на якій він знаходився.

Потрібно навмання вибрати одну кульку з якоїсь скриньки і, не заглядаючи в жодну із скриньок, визначити, у якій скриньці якого кольору лежать кульки. З якої скриньки слід діставати кульку?

19. На столі три однакові скриньки. В одній з них лежать три чорні кульки, у другій — дві чорні, одна біла, у третій — дві білі. На скриньках зроблено написи: «3 чорні», «2 чорні, 1 біла», «3 білі». Жодний з написів не відповідає вмісту тієї скриньки, на якій він знаходиться, причому скриньки поставлено так, що написів не видно.

Кожний учасник гри мав дістати з однієї зі скриньок дві кульки, прочитати напис на відповідній скриньці і, не заглядаючи в неї, визначити колір кульки, яка там залишилася.

Перший дістав дві кульки, прочитав напис і сказав: «Я дістав дві чорні кульки і можу визначити колір кульки, яка залишилася в скриньці». Другий дістав дві кульки, прочитав напис на своїй скриньці і сказав: «Я дістав дві чорні кульки, але визначити колір кульки, яка залишилася в скриньці, не можу». Третій, почувши повідомлення своїх товаришів, трохи подумав і сказав: «Мені не потрібно діставати кульки. Я й так знаю колір кожної кульки, які лежать у третій скриньці». Як він міркував?

20. Гру із скриньками з попередньої задачі, написи на яких учасникам гри знову були невідомі, привели до такого варіанта. Перший учасник дістав дві кульки, прочитав напис на скриньці і відповів: «Я дістав дві чорні кульки і знаю, що в скриньці біла кулька». Другий дістав дві кульки, прочитав напис на своїй скриньці і сказав: «Я дістав дві білі кульки, але визначити, якого кольору кульки лишилися в скриньці, неможливо». Третій, почувши відповіді, сказав: «Я не буду діставати жодної кульки, але певен, що вони всі три чорні». Як він міркував?

21. На столі чотири однакові скриньки. В одній три чорні кульки, у другій дві чорні і одна біла, у третій одна чорна і дві білі, у четвертій — три білі. На скриньках зроблено написи: «3 чорні», «2 чорні, 1 біла», «1 чорна, 2 білі», «3 білі». Напис на жодній зі скриньок знову не відповідає кольору покладених до неї кульок.

Чотирьом учасникам гри вручили по скриньці і розсадили їх так, що кожний бачив лише напис на своїй скриньці. Потрібно дістати зі скриньки дві кульки і визначити, якого кольору кулька залишилася в скриньці.

Перший дістав кульки й сказав: «Я дістав дві чорні кульки і знаю, якого кольору кулька лишилася в скриньці». Другий повідомив: «Я дістав одну чорну і одну білу кульки і знаю колір кульки в скриньці». Третій дістав дві кульки, ще раз прочитав напис на скриньці і сказав: «Я дістав дві білі кульки, але визначити, якого кольору кулька в скриньці, неможливо». Четвертий, почувши такі три відповіді, сказав: «Я не читав напису на своїй скриньці і, не дістаючи з неї жодної кульки, знаю кольори кульок, які лежать у ній. Я знаю також кольори кульок, які лежать у скриньках кожного учасника гри». Як він міркував?

22. Логік мандрував по острову Бінарний, на якому були два поселення — Лицарське і Рокоманське. Лицарі завжди говорили лише правду, рокоманці — лише неправду. Яке запитання поставив логік в одному із поселень зустрічному острів'янину (той міг бути з будь-якого поселення), якщо з однієї відповіді («так» чи «ні») довідався, у якому поселенні перебуває?

23. Яке запитання поставив логік мешканцю острова Бінарний (див. задачу 22), якщо з відповіді дізнався, у якому поселенні живе співрозмовник?

24. Від розгалуження двох доріг на острові Бінарний (див. задачу 22) лише одна веде до озера. Тут логік зустрів двох острів'ян — лицаря і рокоманця, але не знав, хто з них лицар, а хто рокоманець. Яке запитання поставив логік одному із зустрічних, якщо за відповіддю («так» чи «ні») дізнався, яка дорога веде до озера?

25. Логіка звинуватили в чародійстві (див. задачу 22). Щоб перевірити, що він справді сам, без магічних сил, довідується про все, що його цікавить, йому придумали таке випробування. Як підозрюваного його затримали в кімнаті, з якої було лише два виходи. Через

одні двері він міг вийти й продовжити подорож, а в разі вибору інших — мав дістати покарання. Вибрати двері мали допомогти два вартові, які стояли біля цих дверей. Один з вартових воїнів був лицар, а другий рокоманець. Логік мав поставити лише одне запитання вартовому, щоб за відповіддю («так» чи «ні») визначити двері, які вели на волю. І логік вийшов з кімнати. З яким запитанням він звернувся до одного з вартових?

26. Витримавши випробування на острові Бінарний (задачі 22—25), тепер логік подорожував островом Тернарний, на якому жили лицарі, рокоманці й непостійні. Лицарі, як годиться, завжди говорили правду, рокоманці — лише неправду, а непостійні чергували у своїх відповідях правду з неправдою.

Зустрівши тамтешнього острів'янина, логік поставив перед ним два запитання, які вимагали відповідей «так» чи «ні», і дізнався, з мешканцем якого поселення розмовляє. Які запитання поставив логік?

27. На острові Тернарний (див. задачу 26) логік зустрів відразу п'ятьох тамтешніх острів'ян: Косого, Бороду, Кирпаня, Аваса і Довговуха. Бажаючи довідатися, хто з них з якого поселення, логік попросив, щоб перші два з них самі сказали, хто з якого поселення. Косий відповів, що Борода — непостійний, Кирпань — лицар, Авас — непостійний, а Довговух — рокоманець; Борода повідомив, що Косий — непостійний, Кирпань — рокоманець, Авас — лицар, Довговух — непостійний. Логік подякував острів'янам і точно сказав, хто з якого поселення. Як він міркував?

28. Невгамовний Гек Фінн з відомого твору Марка Твена, переодягнувшись у жіноче вбрання, з'явився до місіс Джудід Лофтес, щоб з'ясувати ситуацію, яка склалася в містечку після його втечі. Жінка швидко розкрила обман, піддавши захожого немудрим житейським випробуванням. Проте такий спосіб не зовсім надійний. Достатньо було б місіс Лофтес поставити Геку одне-єдине запитання, щоб з відповіді («так» чи «ні») з'ясувати, хто приховується під жіночим одягом — юнак чи дівчина. Яке це запитання?

29. Якось Ходжа Насреддін дістався до Бухари.

На ночівлі, де він влаштувався, було ще чотири чоловіки. Вони говорили між собою кількома мовами, і часто один перекладав другому сказане третім. Скоро Ходжа дізнався, як звати кожного співрозмовника. Він помітив також, що не було мови, яку б знали всі чотири співрозмовники, але кожен знав дві мови. Го-

ворили ж вони вірменською, перською, грецькою і турецькою мовами.

Наймолодший, Салал, не знав перської, але був перекладачем, коли старий перс Абдул хотів порозумітися з Мохаммедом. Захожий з Босфору Мохаммед добре розмовляв своєю рідною турецькою мовою і вільно розмовляв з Юсуфом, хоча останній не розумів жодного турецького слова.

Ні Салал, ні Абдул, ні Юсуф не знали тієї мови, якою могли б поговорити всі троє між собою. Між цими особами не було й такої, яка б одночасно знала турецьку й вірменську.

Тільки один Ходжа чудово розумів кожного з них. Якими мовами володів кожний з чотирьох?

30. Коли вранці Ходжа (див. задачу № 29) сказав співрозмовникам, хто з них якими мовами розмовляє, ті були так вражені його мудрістю, що розповіли, чому опинилися в місті і попросили допомоги.

У в'язниці еміра поневірялися десять бідаків, яких потрібно було визволити. Дуже просили, щоб Ходжа щось придумав.

В'язниця мала 100 камер. Кожна камера оснащена засувом, який може перебувати лише в двох положеннях: «відчинено» або «зачинено». Вивідавши це, Ходжа намовив еміра так заплутати в'язнів, щоб ніби позбавити їх будь-якої надії на порятунок. За порадою Ходжі емір наказав варті щогодини обходити всі камери. Першого разу вартові мусять потай поставити всі засуви на «відчинено», при другому обході змінити положення засува на протилежне на кожних других (по порядку лічби) дверях, при третьому обході — ще раз змінити на протилежне положення засува на кожних третіх дверях і т. д. до того часу, поки при сотому обході вартові не змінять на протилежне положення засува на дверях сотої камери. Коли емір наказав звільнити в'язнів, які перебували в камерах з відчиненими дверима, то всі десять бідаків вийшли на волю, бо Ходжа заздалегідь подбав, у які саме камери їх слід помістити, щоб визволити. Як він міркував?

31. Старий шейх покликав двох своїх синів і розповів їм, що в поблизькому оазисі закопано величезний скарб. Він повелів синам вирушити на пошук скарбу, заповівши його повністю тому, чий верблюд досягне оазису другим. Сини замислилися. Якщо кожний з них прагнутиме відстати від іншого, то вони ніколи не досягнуть оазису і не зможуть заволодіти скарбом. Доволі

посушивши голову, але так нічого й не придумавши, брати поїхали на пораду до кадія. Той повелів братам зійти з верблюдів і, покликавши їх до себе, прошепотів щось кожному на вухо. Вислухавши пораду кадія, нащадки шейха поспіхом посідали на верблюдів, що чекали на них, і щодуху помчали до оазису. Скарб дістався тому, хто перший дістався туди. Яку пораду дав кадій синам шейха?

32. Математик почав розв'язувати задачу між 21-ю і 22-ю годинами, коли дві стрілки годинника стали на одну лінію, показуючи в протилежні боки від осі. А розв'язував у ту мить, коли стрілки злилися між собою. Скільки часу він розв'язував задачу? А скільки ви розв'язували цю задачу?

33. Три мандрівники, музиканти з однієї середньовічної билиці, зняли в готелі трикімнатний номер за 30 марок. Кожен з них заплатив портьє по 10 марок. Потім з'ясувалося, що відведений номер коштує лише 25 марок. Узявши із собою 5 марок здачі, портьє пішов до мешканців. По дорозі він здогадався, що розділити 5 марок на трьох досить складно. Поклавши в свою кишеню дві марки, він віддав кожному мешканцю по марці й зробив ще одне відкриття. Кожен музикант заплатив по 9 марок, а всі разом витратили $9 \times 3 = 27$ марок. Дві марки лежали в кишені портьє. Отже, перебування в готелі обійшлося музикантам 29 марок. Куди ж поділася тридцята? Це запитання так стурбувало портьє, що він повернув мешканцям приховані дві марки, а ті пояснили, чому в нього немає підстав для хвилювання. Що сказали музиканти?

34. Покупець придбав у художньому салоні картину за 1500 марок. Наступного дня він прийшов у салон з дружиною. Виявилося, що куплена картина не сподобалася дружині. Подружжя вибрало іншу картину вартістю 3000 марок. Повернувши попередню покупку і взявши із собою картину вартістю 3000 марок, покупці вийшли із салону. Але продавець наздогнав їх і зажадав доплати 1500 марок. Любитель живопису заперечив: «Учора ж я заплатив вам 1500 марок, а сьогодні залишив і картину вартістю 1500 марок. Усього це становить 3000 марок, тобто ми повністю розрахувалися». Продавець спростував це твердження. Що сказав продавець?

Задачі 33 та 34 нагадують словесні пастки, до яких можуть потрапити необережні учасники певних подій.

Наступні завдання належать до дивовижних винаходів людської думки — парадоксів.

Під парадоксом (від грец. παράδοξος — несподіваний, дивовижний) розуміють міркування, у якому формулюється запитання, що вимагає відповіді «так» або «ні», але жодна з них не підходить. Інакше можна ще сказати так: у процесі доведення можуть створитися умови (ситуації) для одночасного доведення істинності і хибності певного висловлювання. При цьому доведення істинності висловлювання неодмінно приводить до його хибності і навпаки.

Парадокси відкрили в глибокій давнині, а разом з ними постали важливі проблеми про те, у чому підводять нас деякі звичні методи утворення понять і міркувань. Проблема пояснення парадоксів усе ще залишається важливою і відкритою, незважаючи на те, що їй присвячена численна література.

35. Парадокс «Брехун» легендарного грецького поета Епіменіда (VI ст. до н. е.), який жив на острові Кріт, вважається королем парадоксів. Епіменід стверджує: «Усі крітяни брехуни». Доведіть, що це твердження є парадоксом, тобто: якщо воно істинне, то воно й хибне, і навпаки.

36. Існує багато варіацій на тему парадокса «Брехун». Найкоротша з них: «Я кажу неправду». Доведіть, що це висловлювання є парадоксом.

37. Доведіть, що висловлювання «Я кажу неправду, що кажу неправду» не є парадоксом.

38. — Наступне висловлювання Сократа буде хибним,— повідомив Платон.

— Те, що сказав Платон, істинне,— мовив Сократ.

Доведіть, що цей діалог є парадоксом.

Феноменальну популярність здобули апорії (від грец. ἀπορία—безвихідь) давньогрецького філософа Зенона Елейського (бл. 490—430 до н. е.) проти руху. Ось три з них.

39. Дихотомія (розтин навпіл). Тіло, яке б рухалося від точки A до точки B ($AB = 1$), ніколи не зрушить з місця.

Справді, щоб досягти точки B, тіло має пройти $1/2\ AB = 1/2$ і досягти середини AB — точки B_1. Щоб досягти B_1, треба пройти $1/4\ AB = 1/2\ AB_1$ і досягти середини AB_1 — точки B_2. Ще раніше доведеться пройти 1/2 AB_2, щоб досягти середини AB_2 — точки B_3, і т. д. ... до нескінченності. Отже, тіло мало б розпочати рух на першому відрізку ряду. А оскільки цей ряд нескінченний, то першого відрізка в нього нема і тіло не зрушить з місця. Таким чином, руху нема, бо він не може розпочатися.

40. Прудконогий Ахіллес ніколи не наздожене черепаху, якщо на початку погоні черепаха перебуває на деякій відстані попереду від нього. Нехай погоня розпочинається, коли черепаха перебуває на відстані $AB = 1$ і Ахіллес біжить у k разів швидше, ніж рухається черепаха, де k — якесь натуральне число, більше за одиницю,— 10, 20, 30 або 100 (це неістотно). За час, протягом якого Ахіллес пробіжить відстань $AB = 1$, черепаха проповзе відстань $1/k\ AB$, доки Ахіллес пробігатиме $1/k\ AB$, черепаха віддалиться на $1/k^2\ AB$ і т. д. до нескінченності. Скільки відрізків $1, 1/k, 1/k^2, 1/k^3 \ldots$ не пробігав би Ахіллес, черепаха завжди буде недосяжною попереду нього на відстані $1/k^n$. Звідси знову випливає, що руху нема, бо коли б він розпочався, то ніколи не закінчився б.

41. Якщо простір і час уявляти утвореними з неподільних далі частинок, то стріла, пущена з лука, яка здається летючою, є нерухома. Справді, у кожну неподільну далі мить (атом) часу вістря стріли займає певне рівне собі положення в якомусь теж неподільному далі атомі простору. Оскільки атом простору неподільний, то рух у ньому неможливий. У наступний атом часу вістря стріли перебуватиме в безпосередньо сусідньому атомі простору, у якому рух теж неможливий. Отже, вся траєкторія руху стріли складається із суми спокоїв — нерухомостей. Оскільки в стані спокою стріла не рухається, то шлях, пройдений нею кожної миті часу, дорівнює 0, а весь шлях — сумі $0 + 0 + 0 \ldots + 0 = 0$, тобто стріла нерухома.

42. Евбулід (IV ст. до н. е.) із Мілета сказав, що купи зерна не існує. Одне зерно не є купою. Поклавши ще зернину, купи також не отримаємо. Як же утворити купу, додаючи кожного разу по одній зернині, з яких жодна не становить купи?

43. Еватл брав уроки софістики у давньогрецького софіста Протагора (бл. 481—411 до н. е.) за тієї умови, що за навчання він сплатить після того, коли виграє свій перший судовий процес.

Закінчивши навчання, Еватл не взявся вести жодно-

го судового процесу, тому вважав, що може не платити вчителеві.

Протагор погрожував судом:

— Незалежно від того, присудять судді платити мені чи не присудять, ти обов'язково сплатиш. У першому випадку — за вироком суду, у другому — за нашою домовленістю.

Еватл, навчений мистецтву софістики, відповідав:

— Ні в першому, ні в другому випадку я не платитиму. Якщо присудять платити, то я не заплачу відповідно до нашої домовленості, бо програю свій перший судовий процес, у другому випадку я не платитиму згідно з вироком суду.

Чи може Протагор отримати гонорар за навчання Еватла?

44. Крокодил впіймав дитину. На благання матері про повернення дитини крокодил відповів: «Я поверну тобі дитину, якщо ти відгадаєш, що з нею зроблю — з'їм чи віддам».

Мати у відчаї закричала: «Ти з'їси її!» Доведіть, що це врятувало дитину.

45. Загадка середньовічних схоластів: «Чи може всемогутній бог створити такий камінь, якого він сам не зможе підняти?»

Доведіть, що це запитання є парадоксом.

46. Сільський перукар. Парадокс Б. Рассела (1872—1970). Сільський перукар має суворий наказ голити тих і лише тих чоловіків — мешканців села, які не голяться самі. Як має він діяти щодо себе — голити чи ні?

47. Мери Канторії. Канторія розбита на кантони. У кожному кантоні обирають мера, який не має права жити в кантоні, де він служить. Ці мери утворили новий кантон і обрали свого мера.

Де має проживати цей мер — у новому кантоні чи поза ним?

48. Туристи мали вийти на маршрут. Тренер оголосив, що вони вийдуть в один із днів наступного тижня, але за неодмінної умови, що учасники походу довідаються про це тільки вранці в день виходу. Тренер був педантом і вимагав неухильного виконання своїх вказівок. Один з туристів, аматор логічних міркувань, заявив, що в такому разі похід не відбудеться. І ось чому.

Очевидно, що в наступну суботу не можна вийти. Субота — останній день тижня, і в п'ятницю ви б знали напевне, що вийдете в суботу. Таким чином, про день виходу стало б відомо до офіційного повідомлення в суботу вранці, що порушує умову тренера. У п'ятницю теж не можна вирушити, бо після четверга залишаються лише п'ятниця та субота. Оскільки субота не може бути днем виходу, то лишається лише п'ятниця, про що стане відомо в четвер, а це знову порушить вимогу тренера. Таким чином, і п'ятниця відпадає. Останнім днем початку походу лишається четвер, який теж не підходить, бо, не вирушивши в середу, туристи знатимуть, що підуть в четвер. Точно такими самими міркуваннями виключаються середа, вівторок і понеділок. Лишається лише завтрашній день. Але завтра напевне не вирушають, бо знають про це вже сьогодні. Отже, маршрут ніколи не відбудеться. То відбудеться маршрут чи ні?

49. Одна принцеса хотіла вийти заміж за вчителя танців. Батько принцеси погодився віддати її за нього, якщо той вб'є тигра, що перебуває за одними з п'яти дверей Учителю доведеться відчиняти двері одні за одними поспіль, починаючи з перших. За якими саме ховатиметься тигр, йому наперед не буде відомо. Він довідається про це лише тоді, коли відчинить двері, за якими чатує звір. Таким чином, тигр для нього буде повною несподіванкою. Учитель танців міркував так. Якщо я відчиню четверо дверей і за жодними з них не зустріну тигра, то наперед знатиму, що тигр за п'ятими дверима. Отже, тигр не може бути за п'ятими дверима, а має бути за одними з перших чотирьох. Якщо відчинивши троє перших дверей, я не виявлю тигра, то знатиму наперед, що він за четвертими. Тоді теж ніякої несподіванки не буде. Отже, тигр може бути лише за одними з трьох перших дверей. Міркуючи так само й далі, претендент на руку принцеси прийшов до висновку, що ніякого тигра взагалі нема і почав сміливо відчиняти двері. Але як тільки він відчинив другі двері, на нього несподівано вистрибнув тигр. Де в міркування вчителя танців вкралася помилка?

50. Старт марафонської дистанції гнома знаходиться на одному кінці гумового каната довжиною 1 кілометр. Гном крокує по канату з швидкістю 1 см/сек. Через 1 сек. після старту канат розтягують і його довжина стає 2 км. Кожної натупної секунди канат подовжують на 1 км. Чи буде фініш у марафоні гнома?

2
Лічба всю правду скаже

Небагато найвеличніших винаходів людства можна поставити поряд з винаходом чисел. Створені як узагальнення кількісної характеристики скінченних сукупностей об'єктів числа виявилися універсальним знаряддям пізнання закономірностей дійсного світу, зокрема розв'язування найрізноманітніших задач.

Запитання «скільки?» в житті зустрічається не рідше, ніж «чому?» Саме тому математика — близька родичка багатьох наук.

Цікаво, що в багатьох народів роль цифр тривалий час виконували літери. І так само, як з невеликої кількості літер виникали будь-які слова, так лише 10 цифр достатньо для породження безмежної галактики світу чисел. Ці числа дуже не схожі між собою і зовні, і за характером. Що ближче людина знайомилася з ними, то більше захоплюючих властивостей помічала в них. Винахідник десяткових дробів у Європі голландський інженер С. Стевін (1548—1620) писав, що «серед чисел існує така досконалість і згода, що нам треба міркувати дні і ночі над їхньою дивовижною закінченістю». Виявилося, що числа не лише служать людям, а ще й ніби живуть своїм окремим загадковим життям. В сиву давнину люди надавали загадкам магічного значення. Закономірно, що багато відкритих дивовижних відношень і закономірностей між числами потрапляли в розряд таємничих, незбагненних. Невідомо навіть, скільки тисячоліть тому, де і хто з числолюбів здогадався розмістити числа в квадратну таблицю, розділити їх лініями. Тоді кожне число ніби опинилося в персональній комірці. Їх легко переселяти з однієї комірки в іншу, і одне з переселень дало вражаючий результат: суми чисел по рядках, стовпчиках і діагоналях таблиці стали однаковими. Це справило надзвичайне враження Відкриття подібних фактів у давнину часто супроводжувалося виникненням легенд, які підкреслювали винятковість події. В одній з них розповідається, що найстародавнішу з таких таблиць один східний мудрець вперше побачив на спині священної черепахи (мал. 21). Закономірно, що числовим таблицям з такими рідкісними властивостями приписали надзвичайні можливості і назвали магічними квадратами (далі писатимемо скорочено МК).

Якщо МК складається з $n \times n$ чисел, то число n і сталу суму (S_n) називають відповідно порядком і магічною сумою МК. Далі МК n-го порядку записуватимемо скорочено $МК_n$, де індекс n позначає порядок МК. Отож легендарний східний мудрець сподобився побачити $МК_3$. Для кожного $МК_n$ існує єдина S_n, яку легко обчислити. Сума чисел в кожному стовпчику (або рядку) дорівнює S_n, а всіх стовпчиків n. Отже, сума всіх чисел в $МК_n$ дорівнює nS_n. Але $1 + 2 + 3 + \ldots + n^2 = 1/2\,(n^2 + 1)\,n^2$. Тому $S_n = 1/2\,(n^2+1)\,n$, або $S_n = 1/2\,n\,(n^2+1)$.

Легко перевірити, що не існує $МК_2$. Легендарний $МК_3$ був відомий на Сході близько 5000 років до н. е. Для нього $S_3 = 1/2 \cdot 3\,(3^2 + 1) = 15$. Це єдиний $МК_3$. Найстародавніший $МК_4$, з тих, що дійшли до нас, виявили в Індії (мал. 2.2). Для нього $S_4 = 1/2 \cdot 4\,(4^2 + 1) = 34$. Цей числовий шедевр майже 2000-річної давності належить до різновидності МК, які називаються «диявольськими» (або пандіагональними, чи ще насіками). Крім звичайних властивостей МК, насіки зберігають S_n по всіх «ламаних діагоналях». Наприклад: $2 + 12 + 15 + 5 = 16 + 6 + 1 + 11 = S_4$ і т. д.

Зрозуміло, що в магічних квадратах нема і не може бути ніякої магії і магічної сили. Але зовсім не так думали в ті прадавні часи. Вважали, що подібні рідкісні конфігурації чисел не випадкові і мусять володіти силою, яка може оберігати власника МК від будь-якого лиха. Так МК опинились на талісманах та амулетах. При цьому для підсилення дії магічної сили на амулетах часто зображали символіку певного небесного світила і відповідний йому МК (мал. 2.3). Тому МК називають ще часто планетними таблицями.

В Європу МК потрапили в XIV ст. із Сходу. $МК_4$ в ролі амулета зобразив А. Дюрер (1471—1528) на своїй відомій гравюрі «Меланхолія» (мал. 2.4). Він захищав крилатого генія — жінку, яка втілює велич людської думки і праці.

В «Фаусті» Й. В. Гете відьма декламує з книги:

Як досягти
До десяти?
Один — як дим,
А два — сплива,
А три — зітри,
Чотири ж — виріж,
А п'ять — украдь,
А шість — ізчисть,
А сім — знесім,
А дев'ять що?— Невідь-що.
А десять — кудесять,
Отак-то лічим ми, відьми.

(Гете Й. В. Фауст, К., Дніпро, 1981, с. 108—109). В примітці до цього тексту вказується, що «сам Гете сміявся з коментаторів, які намагалися розшифрувати «таємничий зміст» відьомської таблиці множення, яка насправді є сатирою на містичну «символіку чисел». Відомий же радянський популяризатор математики Б. А. Кордемський у своїй «Математичній кмітливості» (К., Радянська школа, 1963, с. 258—259) показує, що коли проробити рекомендації персонажа трагедії, то з числової таблиці

1 2 3
4 5 6
7 8 9

утвориться талісман, в якого $S_n = 15$ входить до кожного рядка та стовпчика і лише до однієї діагоналі. Тобто утворився напівмагічний квадрат.

10 2 3
0 7 8
5 6 4

МК (зрозуміло, лише як цікаві математичні задачі) надихали на науковий пошук П. Ферма, Б. Паскаля, Л. Ейлера, К. Ф. Гаусса та інших визначних математиків, які відкрили багато пов'язаних з МК цікавих і глибоких теоретико-числових залежностей, розробили способи їх побудови.

Рекорд обчислень, пов'язаних з пошуком МК, встановив французький вчений академік Б. Френікль (1605—1675). Він і тепер лишається єдиним математиком, якому вдалося обчислити і побудувати всі 880 варіантів МК четвертого порядку. Наступний крок уже неможливий без ЕОМ. Адже припускають, що існує понад 13 000 000 варіантів $МК_5$. Далі цього бар'єра сьогодні ніхто не наважується й прогнозувати. Донедавна МК розроблялися як один із розділів теорії чисел. Тепер вони знаходять все ширше застосування при розв'язанні господарських, економічних, інженерних задач та у квантовій фізиці. Чудовим грунтом, на якому розросталася сім'я магічних квадратів, стала цікава, розважальна математика. Велика армія любителів цікавих задач з невичерпною фантазією створюють все нові головоломки, які розвивають і поглиблюють стародавню і невичерпну гему «магії» чисел. Різні варіації її читачі легко впізнають в багатьох задачах цього розділу.

Не порахувати доведених теорем і розв'язаних задач про числа. А від того кількість нерозгаданих таємниць світу чисел не тільки не спадає, а навіть збільшується. Бо кожна теорема чи задача найчастіше прокладає кілька стежок до нових, ще не взятих бастіонів світу чисел.

Доцільно нагадати, що ігри, головоломки і цікаві задачі — це не тільки розважальне містечко теорії чисел. Багато важливих теорій і проблем теж входили в науку в формі математичних ігор та головоломок. При бажанні таким же трампліном у науку про числа може послужити для читачів і ця теоретико-числова суміш.

1. На кожній таблиці перелічіть послідовно всі 90 натуральних чисел, починаючи від найменшого (мал. 2.5). Якщо це вдається зробити за 3—4 хвилини, переходьте до виконання наступного завдання.

2. Прокладіть між А і В (мал. 2.6) такі чотири маршрути, щоб: перший проходив тільки через парні числа, другий — тільки непарні, третій — тільки прості і четвертий — тільки через числа, кратні трьом.

3. Прокладіть маршрут від вітрильника до гавані через такі ділянки, щоб сума чисел, записаних на ділянках, через які проляже маршрут: І) була найменшою; II) дорівнювала 60 (мал. 2.7).

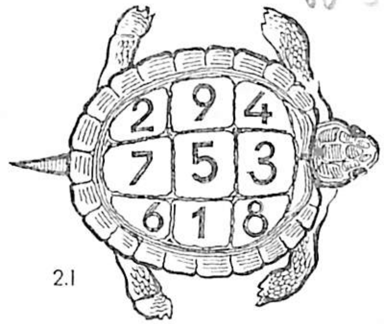
4. Від пункту А до пункту Б можна рухатися, переходячи лише від верхнього кружечка до нижнього по відрізках, які їх сполучають (мал. 2.8). Дотримуючи цих умов, прокладіть такий маршрут між А і Б, щоб сума чисел по вибраному маршруту дорівнювала 1000. Знайдіть маршрути з найбільшою і найменшою сумами.

5. Знайдіть маршрути від вершини цифрової піраміди до основи, щоб сума чисел по маршрутах: І) дорівнювала 60, 50, 45; II) була найбільшою; III) найменшою (мал. 2.9).

6. Початок і кінець маршруту відмічені стрілками (мал 2.10). Прокладіть між ними маршрут так, щоб сума чисел, записаних на кружечках, дорівнювала 45.

7. Починаючи від кола з числом 1, прокладіть замкнений маршрут, який проходить через всі кола точно по одному разу і закінчується в колі з 1 (мал. 2.11). Кожну ланку маршруту теж можна проходити не більше одного разу, при цьому по деяких ланках можна не проходити зовсім.

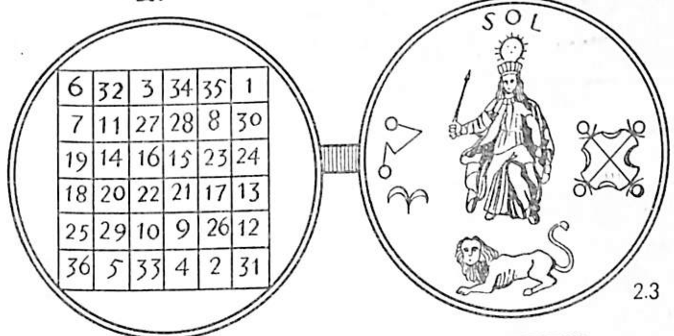
60 50 45



2.1

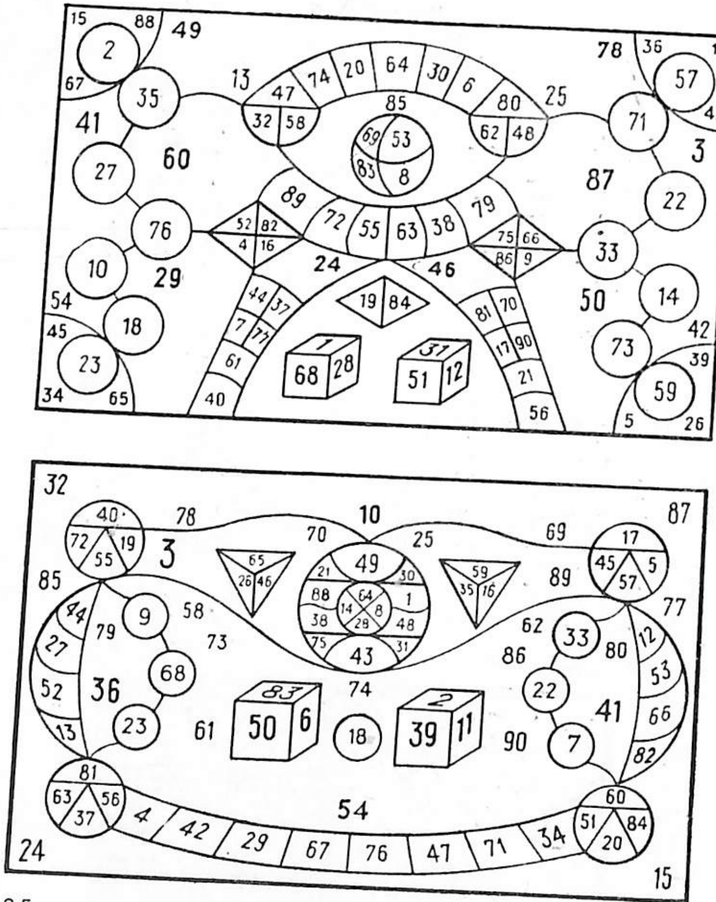
1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

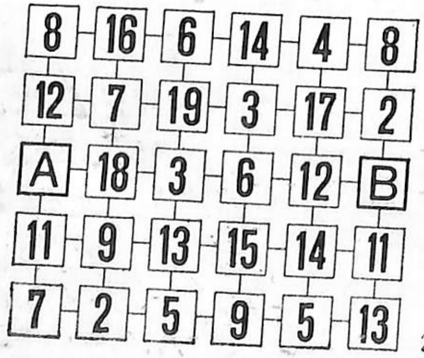
2.2



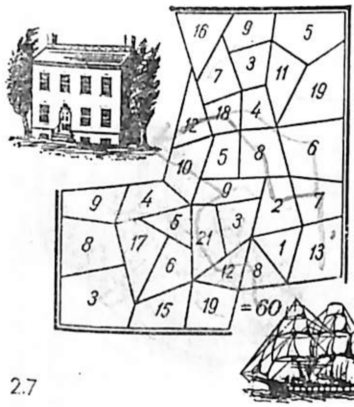
2.3

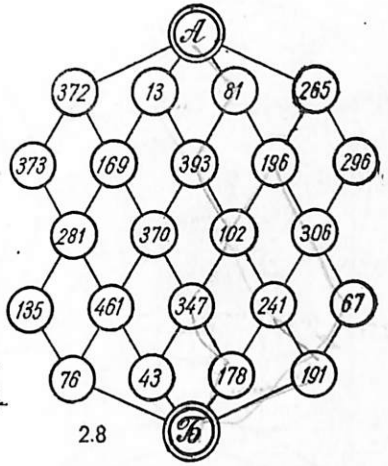

2.4


2.5

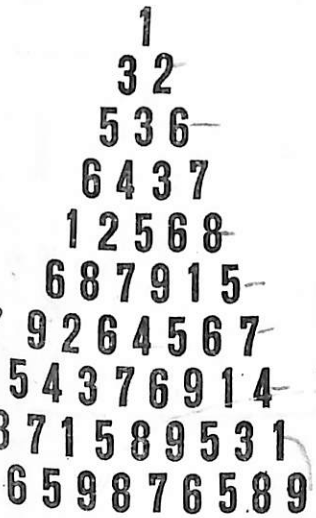


2.6

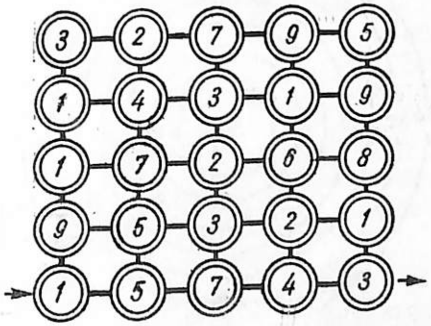

2.7



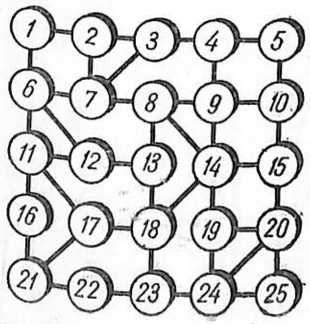
2.8



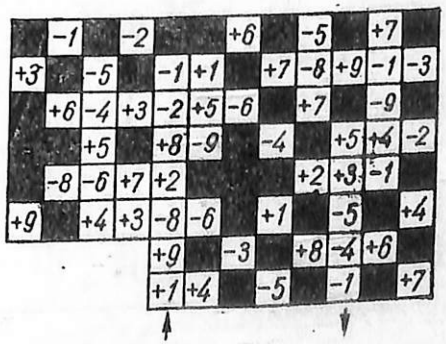
2.9

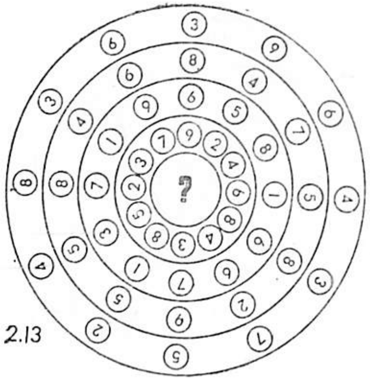


2.10

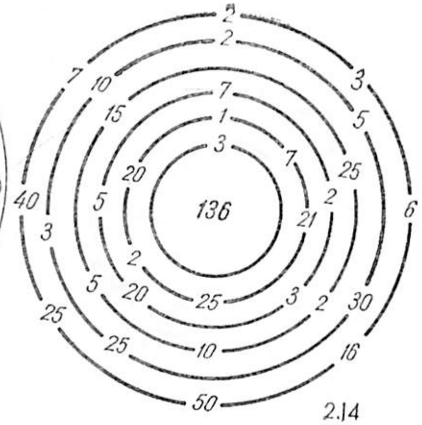


2.11

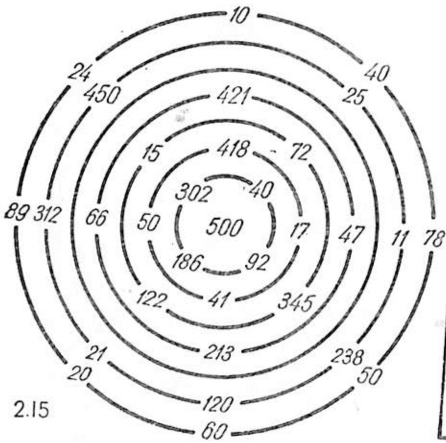

2.12



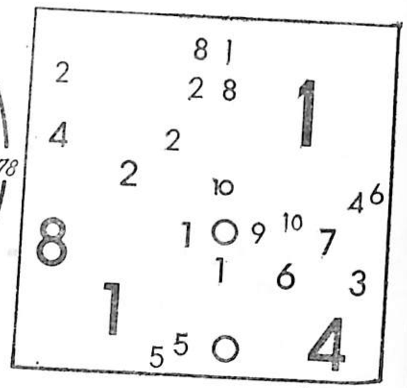
2.13



2.14



2.15



2.16

8	8	5	0	5	0
0	7	0	5	7	8
1	2	4	0	7	5
7	7	1	8	3	2
3	0	0	1	8	7
8	2	5	7	1	8

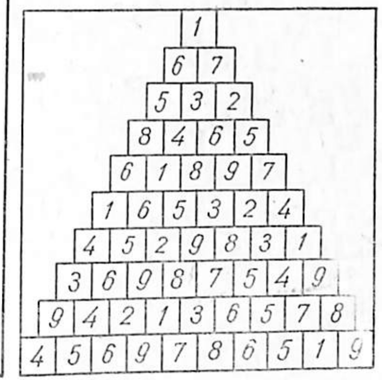
2.17

23	1	24	2	7	18
3	22	13	14	17	8
21	4	11	12	5	6
15	10	16	9	20	19

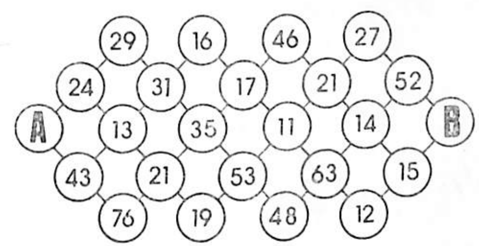
2.18

1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9

2.19



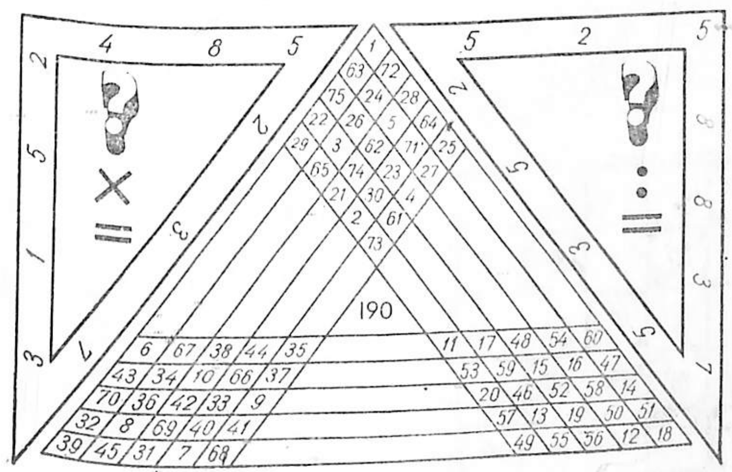
2.20



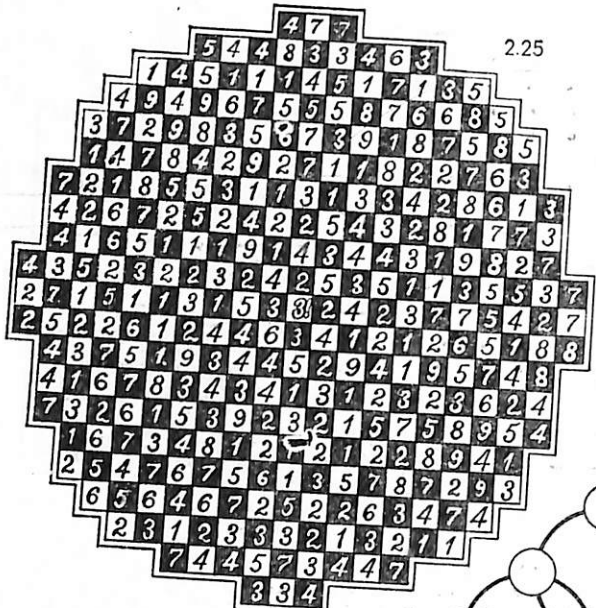
2.22

2.21

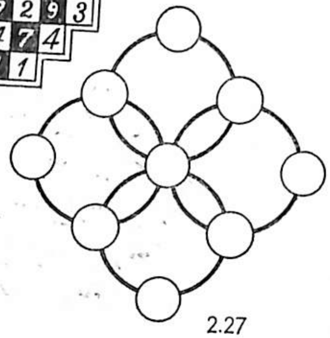
2.24



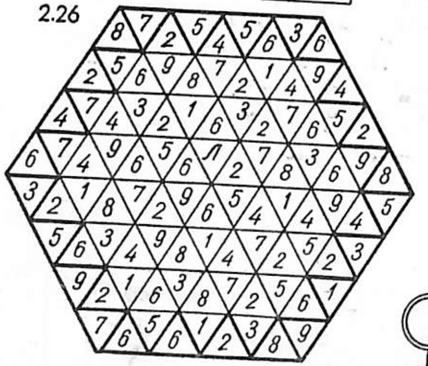
2.23



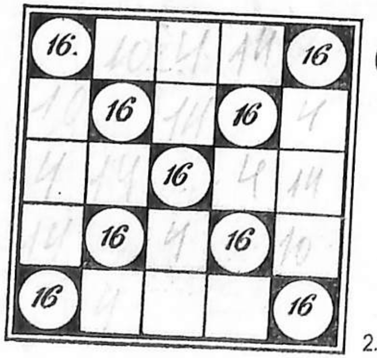
2.25



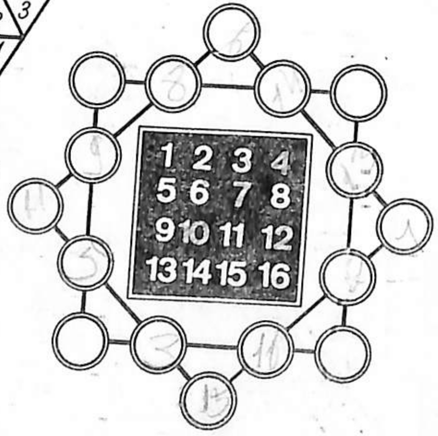
2.27



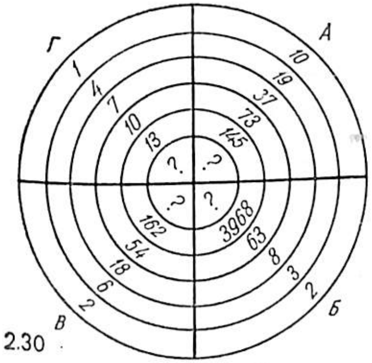
2.26



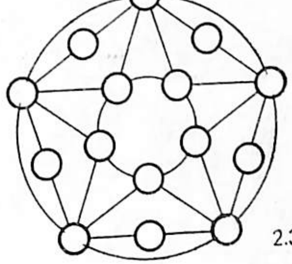
2.28



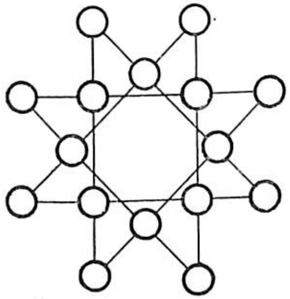
2.29



2.30



2.31



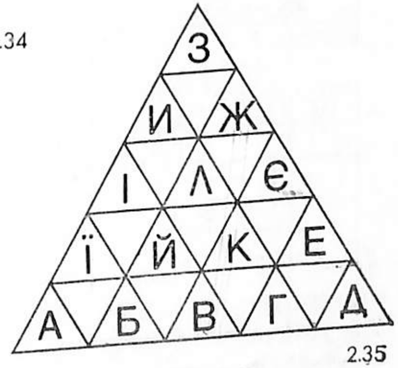
2.32

	6	5		
			16	10
11	20			
9			15	18
	13	19	7	

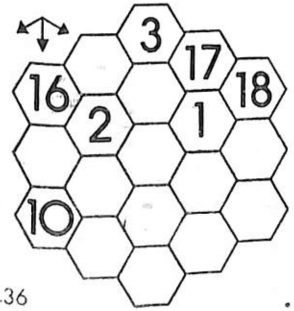
2.33

31	8			30	5
34	1			35	4
7	32			6	29
2	33			3	36

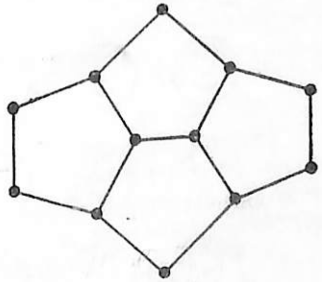
2.34



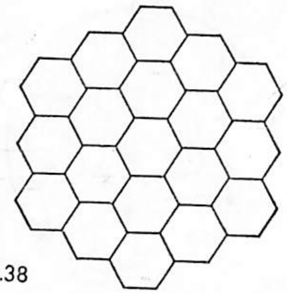
2.35



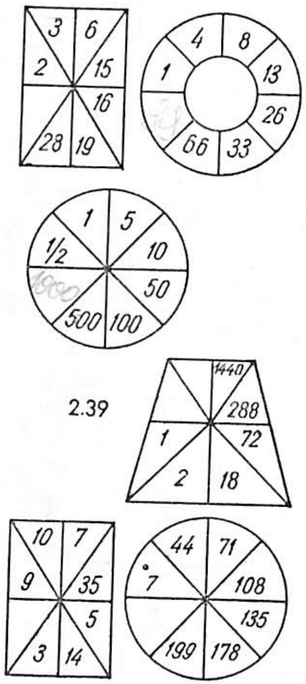
2.36



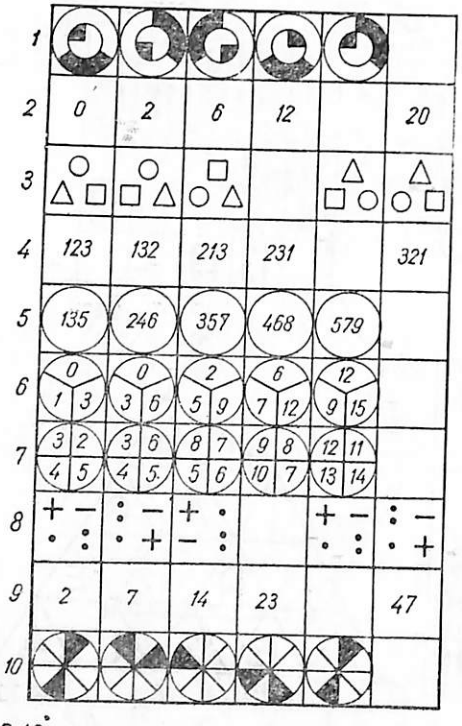
2.37



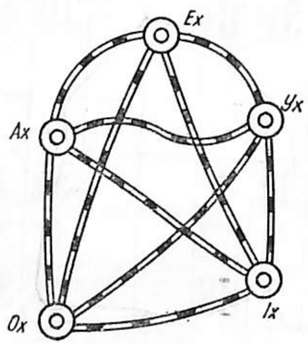
2.38



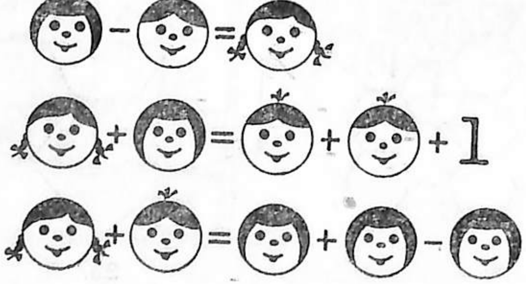
2.39



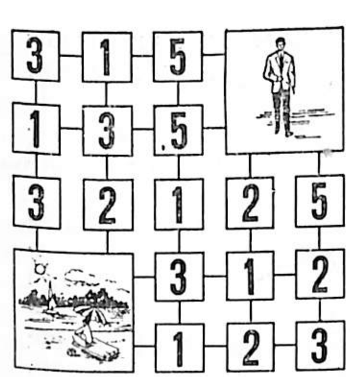
2.40



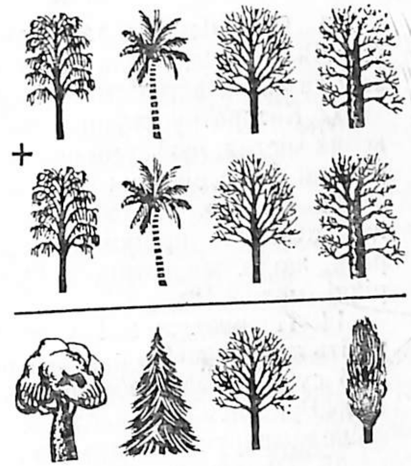
2.41



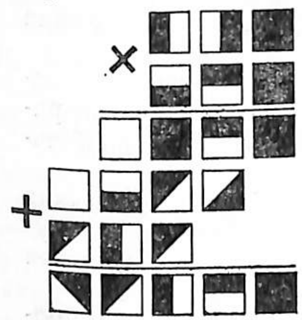
2.42



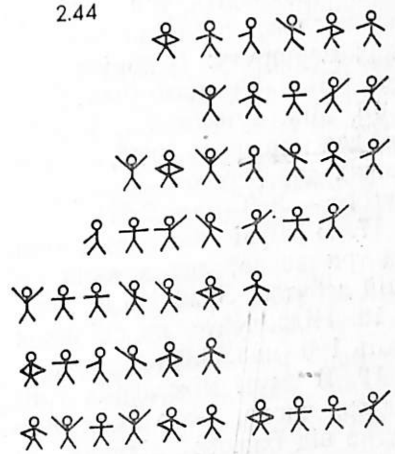
2.43



2.44



2.45



2.46

8. Переходити від одного білого квадрата до наступного можна через спільну сторону або спільну вершину (мал. 2.12). Але обов'язково потрібно виконувати дію, знак якої стоїть перед числом, записаним у відповідному квадраті. Дотримуючи цих умов, прокладіть маршрут від входу до виходу, щоб в результаті виконання вказаних дій отримати нуль.

9. Розмістіть чотири числові кільця так, щоб суми чисел в кожному з 12 секторів були однакові (мал. 2.13).

10. Прокладіть маршрути до центрів числових лабіринтів, щоб, підсумовуючи числа на кожному з них, отримати суми, записані в центрі відповідного лабіринту. Прокладіть в кожному лабіринті (мал. 2.14, 2.15) маршрути з найбільшою і найменшою сумами.

11. Розділіть квадрат прямими на такі частини, щоб у кожній частині числа мали якусь одну, спільну для всіх частин властивість (мал. 2.16).

12 Квадратну таблицю розділіть на такі шість однакових частин, щоб суми шести чисел, записаних в кожній частині, були рівними (мал. 2.17).

13. Прямокутну таблицю розділіть на шість частин — два однакові прямокутники і чотири однакові квадрати, щоб суми чотирьох чисел в кожній частині були рівні (мал. 2.18).

14. Починаючи з 1 у верхньому лівому куті, проведіть ламану до 9 в правому нижньому куті таблиці так, щоб сума чисел, перекреслених ламаною, дорівнювала 100. Рухатися від числа до наступного числа можна лише праворуч або вниз (мал. 2.19).

15. Прокладіть три маршрути від вершини до основи числової піраміди так, щоб сума чисел у квадратиках маршруту: I) дорівнювала 50; II) була найбільшою; III) найменшою (мал. 2.20).

16. Між пунктами А і Б прокладіть по кружечках такі два маршрути, щоб сума чисел у відповідних кружечках для першого маршруту дорівнювала 250, а для другого — 350 (мал. 2.21).

17. В смузі між двома трикутниками записані підряд три числа, два з яких співмножники, а третє — їхній добуток. Знайдіть ці числа (мал. 2.22).

18. Підрахуйте, на скількох доріжках числа в сумі дають 190 (мал. 2.23).

19. В смузі між двома трикутниками записані підряд три числа, два з яких ділене і дільник, а третє — частка від їхнього ділення (мал. 2.24). Знайдіть ці числа.

20. Знайдіть вихід з позначеного знаком оклику центрального квадратика числового лабіринту за таким алгоритмом руху (мал. 2.25). Рухатися можна в будь-якому з восьми напрямів: на північ, південь, схід, захід, північний схід, північний захід, південний схід або південний захід. З кожного (серед них і центрального) квадратика дозволяється пройти в будь-якому з восьми названих напрямів точно таке число квадратиків, яке записане в квадратику, з якого почався рух. Таким чином, з центрального квадратика дозволяється зробити три кроки в одному з восьми напрямів. Прибувши в новий квадратик, потрібно прочитати записане там число і зробити відповідне число кроків у будь-якому із восьми напрямків. Потрапивши в нову точку, знову потрібно

рухатися у одному з восьми можливих напрямів відповідно до прочитаного числа кроків і т. д., доки не буде досягнуто квадрата, з якого вже досить зробити один крок, щоб опинитися за межами цього числового лабіринту. Вибравшись з нього, вигукуйте: «Еврика!»

21. Будинок лісовика (далі Л) розміщений в центральному трикутнику (мал. 2.26). Кроком Л вважається перехід від одного трикутника до іншого, але тільки через сторону, а не через вершину. І ще Л знає, що, потрапивши в якийсь трикутник, далі він зобов'язаний зробити стільки кроків, число яких вказує записане в цьому ж трикутнику число. Наприклад, ввійшовши в трикутник з числом 4 (центральне поле верхнього ряду трикутників), Л зобов'язаний зробити далі чотири кроки, пройти, наприклад, через трикутники 7, 8, 1 в трикутник з числом 2, звідси робити два кроки (наприклад, трикутники 5, 6) і т. д.

Вийшовши якось за межі свого шестикутного володіння, Л виявив, що з якого б з 24 зафарбованих трикутників він не розпочинав маршрут, йому ніяк не вдається потрапити і зупинитися в своєму будинку. Маючи в запасі нескінченність, Л сподівається знайти маршрут, який приведе його до будинку. Доведіть, що такого маршруту не існує.

22. Впишіть в круги без повторень числа від 1 до 9 так, щоб у кожному з чотирьох великих кругів сума дорівнювала 24 (мал. 2.27).

23. Впишіть у вільні клітини такі числа, щоб у кожному горизонтальному і вертикальному рядку сума їх дорівнювала 60. Будь-яку цифру можна використовувати довільне число разів (мал. 2.28).

24. Числа, записані в квадраті, розставте по кружечках так, щоб суми по горизонтальних, вертикальних і діагональних лініях, які сполучають кружечки, дорівнювали 34 (мал. 2.29).

25. Які числа мають бути записані в числових рядах, що починаються від літер А, Б, В, Г (мал. 2.30)?

26. Впишіть в кружечки числа від 1 до 15 (кожне по одному разу) так, щоб суми на кожному з двох кіл і на кожному з п'яти трикутників дорівнювали 30 (мал. 2.31).

27. В кружечки восьмикутної зірки впишіть числа від 1 до 16 (кожне по одному разу) так, щоб сума їх вздовж кожної прямої дорівнювала 34 (мал. 2.32).

28. Повернемося до «Меланхолії» Дюрера (мал. 2.4). Числа 15 і 14, записані внизу в двох внутрішніх

стовпчиках, утворюють число 1514, яке є датою створення гравюри. Чи міг би Дюрер використати інші магічні квадрати, в яких та ж дата фігурувала б у такому ж положенні?

29. Чи міг би Дюрер датувати яку-небудь із своїх пізніших картин таким же чином (мал. 2.4)?

30. Які з числових залежностей, що приховує дюрерівський квадрат, вдасться відкрити вам (мал. 2.4)?

31. З 25 чисел МК п'ятого порядку 12 вже вписані (мал. 2.33). Тепер можна методом проб і помилок вписати решту 13 чисел. Для $МК_5$ $S_5 = 1/2 \cdot 5\,(2^5 + 1) = 65$.

32. Хтось розпочав побудову $МК_6$ (мал. 2.34). Вписані числа — добрий початок. Сума їх в кожному рядку дорівнює 74. Допишіть числа, яких не вистачає для створення $МК_6$, пам'ятаючи, що $S_6 = 1/2 \cdot 6 \cdot (6^2 + 1) = 111$.

33. Замініть літери в магічному трикутнику (мал. 2.35) такими числами, щоб виконувалися співвідношення: 1) А + Б + В + Г + Д = Д + Е + Є + Ж + З = З + И + І + Ї + А; 2) Ї + Й + К + Е = Г + К + Л + И = Ж + Л + Й + Б; 3) А + Д + З = В + Є + М = Й + К + Л; 4) Г + Е = Ж + И = Б + Ї.

Задача має 300 різних варіантів розв'язків. Знайдіть кілька з них.

34. Здається, рекордним залишається пошук магічного шестикутника. Один числолюб витратив 47 років, щоб знайти спосіб, як записати 19 послідовних натуральних чисел в 19 шестикутних комірок, щоб уся фігура, контури якої теж нагадують шестикутник, стала магічною (мал. 2.36). Тобто, щоб суми чисел в рядах комірок, вказаних стрілкою, були однакові. Зрозуміло, що наші читачі не мають часу для такого марафону. Тому 7 чисел вже вписані у відповідні комірки. Розпишіть решту так, щоб отримати магічний шестикутник з $S_6 = 38$. Це все ще складне завдання, адже існує $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = 12!$ способів розстановки цих чисел і лише один задовольняє умову задачі, бо шуканий шестикутник єдиний.

35. Для цієї задачі досить кількох хвилин точної думки. Адже це ж так просто — розписати перші 12 натуральних чисел біля вершин фігури так, щоб суми чисел біля вершин кожного з чотирьох п'ятикутників були однакові і дорівнювали 36 (мал. 2.37).

36. В комірках шестикутника знову потрібно розписати числа від 1 до 19 (кожне по одному разу) таким способом, щоб сума чисел в рядах із трьох шестикутників дорівнювала 22, у всіх рядах із чотирьох шестикутників — 42, в рядах із п'яти шестикутників — 62 (мал. 2.38).

37. Виявіть закономірності утворення числових рядів, записаних в комірках кожної фігури, і встановіть, які числа мають бути у вільних комірках (мал. 2.39).

38. Встановіть закономірності розміщення чисел і фігур в десяти рядах таблиці і встановіть, які числа або фігури мають бути у вільних клітинках (мал. 2.40).

39. На схемі (мал. 2.41) показано розміщення п'яти міст: Ах, Ех, Ух, Іх і Ох, а таблиця дає відстані між ними:

	Ах	Іх	Ох	Ух	Ех
Ах	0	60	40	50	20
Іх	60	0	30	35	45
Ох	40	30	0	55	50
Ух	50	35	55	0	20
Ех	20	45	50	20	0

Знайдіть найкоротший шлях, по якому можна, виїхавши з міста Ух, об'їхати всі інші міста і повернутися в місто Ух. Яка довжина цього маршруту?

40. Відтворіть три числові рівності, якщо в кожній з них однаковими масками зашифровані однакові числа (мал. 2.42).

41. Знайдіть такий шлях відпочиваючого до пляжу, щоб добуток чисел у квадратах, які він проходитиме, дорівнював 1000 (мал. 2.43).

42. Це зовсім не куточок лісу, а закодовані за допомогою силуетів дерев доданки і їхні суми. Розшифруйте їх (мал. 2.44).

43. Розшифруйте добуток двох трицифрових чисел (мал. 2.45).

44. У Шерлока Холмса, як відомо, була цікава справа з «танцюючими чоловічками». Він її блискуче розплутав. Легко здогадатися, що чоловічки витанцьовують добуток двох якихось чисел (мал. 2.46). Яких?

45. Корона царя Гієрона, виготовлена із срібла та золота, мала вагу (в сучасних одиницях вимірювання) 10 кг. У воді її вага становить 93,55 % її ваги в повітрі. Відомо, що 1 кг золота втрачає в воді 4/77 кг, а срібло $9^{11}/_{21}$ % своєї ваги. Скільки золота і скільки срібла витратив майстер на виготовлення корони?

Розв'язавши саме цю задачу, Архімед вигукнув своє славнозвісне: «Еврика!» Ви маєте можливість повторити його переможний поклик.

3

Усяке діло міра прикрашає

Від найдавніших часів вимірювання невіддільні від усієї трудової і пізнавальної діяльності людини. Не випадково слово «міра» відзначається величезною словотворчою активністю і фразеологічними можливостями. Воно зустрічається в найрізноманітніших формах і значеннях: міра щастя, міра радості, міра покарання, мірошник, намір, землемір і т. ін. Слово «міркувати» теж, можливо, використовувалось в давнину в розумінні «міриrи» (міряти) і, таким чином, порівнювати, зіставляти, зважувати. Слово «міра» вживалося у слов'янських мовах для означення посуду, використовуваного при вимірюваннях сипучих та рідинних матеріалів.

Особливістю сукупності слів для позначення одиниць виміру є її глибока давність, найтісніший зв'язок з життям народу, його історією. Геометрія (від грецького γεωμετρία — землемірство), та й вся математика, починає свій родовід від найпростіших вимірювань і лічби. Тривалий час результати вимірювань були часто якісними. Від тих часів дійшли до нас відомі прислів'я: «Чим далі в ліс, тим більше дров»; «Де багато крику, там мало роботи»; «Стільки зробив, як комар надзижчав». Величезним кроком на шляху пізнавальної діяльності стало вираження результатів вимірювання додатними числами. Люди використали числа не лише для вираження результатів вимірювання, а й для характеристики ролі самих вимірювань: «Тричі міряй, а раз відріж», «Сім раз міряй, а раз відріж». Сьогодні говорять, що часто навіть сім разів по сім мало міряти перед тим, як раз різати.

Вимірювання як спосіб кількісного відображення властивостей об'єктивного світу відіграло виключну роль в розвитку математики.

До вимірювання величин зводиться, зрештою, переважна більшість задач природознавства й техніки. А оскільки результати вимірювань виражаються певними числами, то величини й числа тісно пов'язані в практичній і пізнавальній діяльності людини. Щоб виразити числом результат вимірювання, наприклад, певного відрізка прямої, потрібно вибрати якийсь відрізок e за одиничний, тобто приписати йому міру довжини, що дорівнює одиниці. Таким чином, e береться одиницею вимірювання даної величини (довжини). Тоді будь-якому іншому відрізку a ставиться у відповідність якесь додатне число $l_e(a)$, що називається довжиною a при одиниці вимірювання e. При вимірюванні площ, об'ємів за одиниці вимірювань беруть відповідно одиничний квадрат і одиничний куб.

Вимірювання величин надзвичайно складна наукова (головним чином математична) і технічна проблема.

Наступні завдання — лише перші кроки в світ геометричних фігур, форм і величин, які їх характеризують. При розв'язанні практичних задач геометричні величини виступають в тісних взаємозв'язках з фізичними, як різні характеристики одного і того ж явища дійсного світу. Німецький математик Д. Гільберт писав: «У величезному саду геометрії кожний може підібрати собі букет за смаком...» В справедливості цих слів переконують і пропоновані завдання.

1. Поглянувши на спідометр, шофер помітив, що кількість кілометрів, пройдених машиною, виражалась симетричним числом: його можна було читати однаково зліва направо і справа наліво: 15951. «Цікаво!— подумав шофер.— А чи не з'явиться на лічильнику друге число, яке має таку саму властивість симетрії?»

Рівно через дві години таке число з'явилось. Воно теж з обох боків читалося однаково. З якою середньою швидкістю вів шофер машину ці дві години?

2. Дві групи автотуристів оглядали місто М (мал. 3.1). Обидві групи виїхали з пункту А в пункт Г: перша через пункт В, друга — через пункт Б. Відстань АВ = 5 км, БГ = 15 км. У пункті Г шофери звірили спідометри і виявили, що кожен з них проїхав від А до Г однакову відстань. Яка відстань між А і Г?

3. Автоінспектор, виїхавши з пункту А, проїхав найкоротшим шляхом всі дороги району (мал. 3.2). Відстані між населеними пунктами вказані на схемі. Лише по двох найкоротших дорогах автоінспектор проїжджав двічі. Яким був його маршрут, якщо повертатися в пункт А не було потреби?

4. На кільцевій дорозі проводили естафету мотоциклістів. Старт і фініш були в одному й тому ж місці. Довжина кільцевої дороги 33 км, а довжина кожного етапу 75 км (рух по дорозі односторонній). Скільки було пунктів, в яких передавалася естафета, і яка відстань між сусідніми пунктами?

5. Гарові доріжки мають форму чотирьох однакових кіл, довжиною 1/3 км (мал. 3.3). Чотири учні стартували опівдні і їздили, доки вчетверте не зустрілися в спільній точці всіх доріжок. Учні розвивали швидкість 15 км/год, 12 км/год, 9 км/год і 6 км/год. Яку відстань проїхав за цей час кожен учень?

6. Учню була запропонована така задача. Гіпотенуза прямокутного трикутника лежить в площині p, один катет утворює з площиною p кут 45°, а другий — кут в 60°. Більший катет дорівнює a. Обчислити гіпотенузу (мал. 3.4).

Учень виконав креслення (мал. 3.4). З прямокутного трикутника АОВ знайшов $BO = a \sin 45° = a\sqrt{2}/2$, з прямокутного трикутника ОБВ знайшов $БВ = OB : \sin 60° = a\sqrt{2/3}$ і по теоремі Піфагора $АБ = \sqrt{AB^2 + БВ^2} = a\sqrt{1 + 2/3} = a\sqrt{5/3}$. Чи правильний отриманий результат?

7. Еней, герой уславленої «Енеїди» І. П. Котляревського, зазнавши численних морських пригод, приплив нарешті до берега і подався у місто.

> В тім городі жила Дідона,
> А город звався Карфаген,
> Розумна пані і моторна,
> Для неї трохи сих імен:
> Трудяща, дуже працьовита,
> Весела, гарна, сановита.

Як розповідає легенда, близько 825 р. до н. е. фінікійська царівна Дідона з невеликим загоном воїнів, шукаючи щастя, обрала зручне місце на північному узбережжі Африки (нинішня Туніська затока). Король Нумідії Ярб погодився продати їй ділянку землі, але «не більше, ніж можна обмежити шкірою бика». Дідона не розгубилася. Вона розрізала шкіру на тоненькі смужки і, зв'язавши з них ремінь довжиною l, обмежила ділянку найбільшої площі. Так був заснований Карфаген, першою легендарною правителькою якого стала Дідона.

Дідона мала кілька варіантів вибору ділянки, а саме: а) прямокутник максимальної площі, б) прямокутний трикутник максимальної площі, в) фігуру максимальної площі довільної форми. Які результати одержала б Дідона для цих варіантів?

8. Десантник перебував десь у лісі, площа якого S. Форма лісу йому невідома, але він знає, що в ньому нема галявин. Доведіть, що він зможе вийти з лісу, пройшовши шлях не більший $2\sqrt{\pi S}$ (вважається, що десантник може рухатися по шляху наперед наміченої траєкторії).

9. У ліску всі дерева вищі за 10 м і нижчі за 50 м, відстані між кожними двома деревами не перевищують різниці їх висот. Доведіть, що цей лісок можна обгородити парканом довжиною 80 м.

10. Вислів «квадратура круга» характеризує безвихідну, складну ситуацію. А почалося все в математиці і дуже давно. Коли цілком практичні задачі на обчислення площ привели до формулювання найзнаменитішої геометричної задачі давнини — квадратури круга: за допомогою лінійки без поділок і циркуля побудувати за скінченне число операцій квадрат, рівновеликий даному кругу. Надихаючим став приклад визначного математика античності Гіппократа Хіоського (V ст. до н. е.). Він зумів квадрувати три види фігур, обмежених дугами кіл (серпків Гіппократа). Наприклад, якщо на гіпотенузі с і катетах a і b прямокутного трикутника як по діаметрах побудувати півкруги, то сума площ заштрихованих серпків Гіппократа рівновелика площі даного трикутника (мал. 3.5). Позначивши довжину гіпотенузи і катетів трикутника відповідно через c, a, b, доведіть, що $S_1 + S_2 = 1/2\, ab$.

11. Красиві приклади рівновеликості криволінійних фігур знайшов геніальний вчений, ім'я якого винесено в назву нашої книжки. Найвідоміші з них — задачі обчислення площі кушнірського ножа або двогострої сокири (арбелона) і осьового перерізу сільниці (саліона), побудова яких очевидна (мал. 3.6, 3.7). Доведіть, що площа арбелона дорівнює площі круга з діаметром БГ, а площа саліона — площі круга з діаметром ДЄ.

12. На радіусах чверті круга як на діаметрах побудовані півкруги (мал. 3.8). Яка з фігур має більшу площу — фігура 1 чи 2?

13. Бісекція, тобто поділ кута на дві рівні частини,— легка геометрична задача на побудову. Трисекція ж кута за допомогою лише циркуля і лінійки без поділок за скінченне число операцій виявилась нерозв'язуваною.

Не взявши цього бастіону лобовою атакою, математики подолали його обхідним шляхом — знайшли багато некласичних трисекцій. Найкрасивішу з них методом вставки знайшов Архімед.

Нехай потрібно розділити кут АЕД на три рівні частини (мал. 3.9). Побудуємо півколо довільного радіуса, центр якого знаходиться в точці Е. Потім на прямій ДЕ знайдемо таку точку С, щоб ВС = АЕ. Тобто, задача звелася до того, щоб між дугою півкола і прямою ДЕ вставити відрізок, рівний радіусу півкола. Тоді $\angle$ ВЕС = 1/3 $\angle$ АЕД. Доведіть це.

14. Достатньо лише трохи втратити пильності, як площі можуть продемонструвати й несподіванки. Квадрат АБВГ розділили на 17 частин (мал. 3.10). Потім поміняли місцями деякі з них і утворили квадрат $А_1Б_1В_1Г_1$ того самого розміру, причому один з п'яти маленьких квадратиків виявився зайвим. А оскільки площа першого квадрата 145, другого — 144, виходить, що 145=144. Щось тут не так... Що?

15. Цього разу квадрат розрізали на чотири частини: два попарно рівні прямокутні трикутники і дві попарно рівні трапеції (мал. 3.11). Переставляючи ці фігури різними способами, отримаєте прямокутник, рівнобедрений трикутник або неопуклий восьмикутник. Ніби й нема нічого надзвичайного. Всі чотири фігури рівноскладені, тобто й рівновеликі. Але площа квадрата становить 64 кв. од., площа прямокутника і рівнобедреного трикутника 65 кв. од., а неопуклого восьмикутника 63 кв. од. Виходить, що 63 = 64 = 65.

Ми поділили сторони квадрата на такі частини, що $x = 5$, $y = 3$. Коли б ми поділили їх на частини $x = 6$ і $y = 2$, то з одержаних двох рівних трапецій і двох рівних прямокутників не вдавалося б утворити прямокутник, лінія $В_1Д_1$, очевидно, була б ламаною. Не утвориться прямокутник при $x = 4\frac{1}{2}$, $y = 3\frac{1}{2}$ та інших значеннях x і y.

При $x = 5$ і $y = 3$ дістанемо прямокутник із сторонами $x + x + y = 2x + y = 2\cdot5 + 3 = 13$, $x = 5$. Площа його $S_1 = 13\cdot5 = 65$. Якщо сторони квадрата, площа якого 169 кв. од., поділити на частини $x = 8$, $y = 5$ і розрізати на пару рівних трапецій і пару рівних прямокутних трикутників, то з них утворюється прямокутник із сторонами $2x + y = 2\cdot8 + 5 = 21$ і $x = 8$, для нього $S_2 = 168$ кв. од.

Як бачимо, при одних варіантах перетворень квадратів з'являється зайвою площа 1 кв. од., при інших точно таких перетвореннях площа зникає. Можна показати, що подібні несподіванки чекають на нас при обчисленні площі трикутників, «рівноскладених» з перекроєним квадратом. Щось тут не так... Що?

16. Периметр рівностороннього трикутника дорівнює 3 одиницям довжини (мал. 3.12). Поділимо кожну сторону трикутника на три рівні частини і, викинувши центральні частини, побудуємо на середніх проміжках рівносторонні трикутники із сторонами 1/3. Кожну сторону зірчастого дванадцятикутника теж поділимо на три рівні частини, викинемо середні частини, а на утворених проміжках побудуємо правильні трикутники із сторонами 1/9. Обчисліть периметр фігури, яка утвориться, коли такі побудови продовжити до нескінченності.

17. Поділимо одиничний квадрат на 9 однакових квадратів і викинемо внутрішню частину центрального квадрата (мал. 3.13). Кожний з решти квадратів теж поділимо на 9 однакових квадратів ще меншого розміру і знову викинемо в кожному внутрішні частини центральних квадратів. На малюнку показано три етапи такої операції. Продовживши її до нескінченності, дістанемо фігуру, яка називається килимом Серпінського. Обчисліть його площу.

18. Передню грань куба розрізали на чотири частини (мал. 3.14). Потім фігуру по бічній грані розсікли на чотири частини ще раз. Скільки частин отримали всього? Намалюйте їх.

19. Чотири правильні многогранники, які оточують одиничний гексаедр (куб), отримані в результаті застосування (в різних випадках по-різному) однієї і тієї ж операції щодо куба (мал. 3.15). Що це за операція? Які довжини ребер отриманих многогранників?

20. Турист запевняв, що довжина його пішохідних маршрутів в десять разів перевищує довжину земного екватора (мал. 3.16). При цьому підкреслював, що шлях, пройдений головою, набагато довший, ніж ступнями ніг.

Підрахуйте, який шлях пробила голова туриста, якщо його зріст дорівнює 175 см?

21. Площа найменшого із чотирьох концентричних кругів дорівнює одиниці (мал. 3.17). Найменше з трьох кілець розділили на дві рівні частини і позначили номерами 2 і 3. Центральне кільце розділили на чотири рівні частини і позначили 4, 5, 6, 7. Найбільше кільце розділили на 8 однакових частин з номерами 8, 9 ... 14, 15.

Якими мають бути радіуси кіл, щоб всі 15 частин були рівновеликими?

22. У квадрат із стороною 1 кинули 51 точку. Доведіть, що принаймні три з них можна накрити кругом радіуса 1/7.

23. Місто розбите на 50 кварталів, кожен з яких має периметр 600 м. По зовнішніх сторонах кварталів проходить кільцева дорога. Турист обійшов місто по цій дорозі за півтори години і прочитав у довіднику, що сумарна довжина всіх вулиць міста, не рахуючи кільцевої дороги, становить 12 км. З якою швидкістю йшов турист?

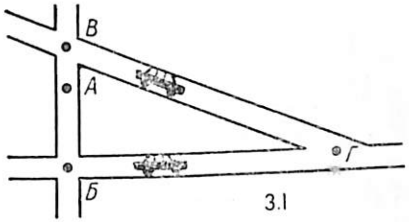
24. Цеглинка складена з двох склеєних одиничних кубиків. Чи можна утворити з таких цеглинок заготовку для кубика Рубика, тобто тіло — куб, який містить 27 одиничних кубиків?

25. Терміти організовують свій конкурс з кубиком Рубика 3 × 3 × 3. Рухати грані їм незручно, зате вони майстри тунелів. От і вирішили: прогризати в кубику тунель у центрі одного кубика до центра якогось сусіднього, починаючи від центра одного з периферійних кубиків. Рухатись дозволяється лише паралельно ребрам куба і через центр кожного маленького проходити тільки один раз. Переможцем визнають учасника змагання, якщо він, дотримуючись умов конкурсу, прокладе тунель через центри всіх кубиків і закінчить маршрут у центральному кубику. Чи буде переможець у такому конкурсі?..

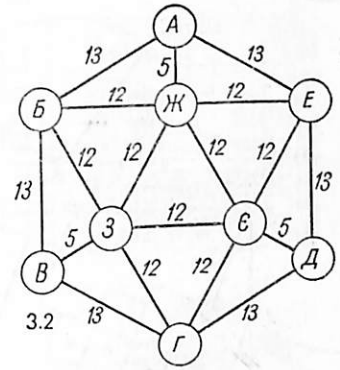
26. Чи можна на непрозорій планеті, яка має форму кулі, розмістити 8 станцій спостереження так, щоб будь-яке тіло, яке перебуває над планетою на висоті, що дорівнює довжині її діаметра, було видно принаймні з двох станцій?

27. Іванко і його сестричка Оленка живуть на півострові між річками Кисільною та Молочною (мал. 3.18). Іванко живе в будиночку А, Оленка в будиночку Б. Іванко зібрався в гості до Оленки і взяв із собою два відра, щоб зачерпнути одним для сестрички киселю, а другим — молока. Який маршрут має вибрати Іванко, щоб найкоротшим шляхом потрапити до Оленки?

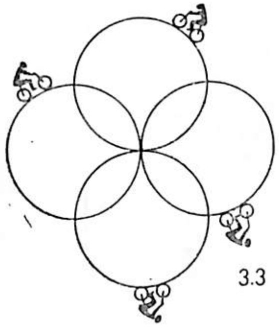
28. Пішов Івасик куди очі бачать шукати свою сестричку, викрадену розбійниками. Коли назустріч йому Лісовик. «Знаю,— каже,— я дорогу до розбійни-

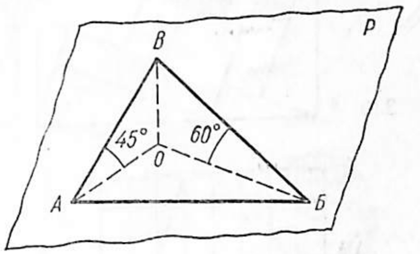


3.1

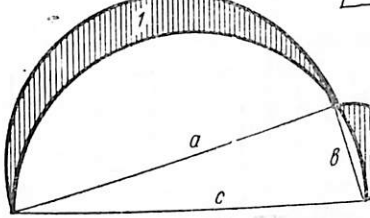


3.2

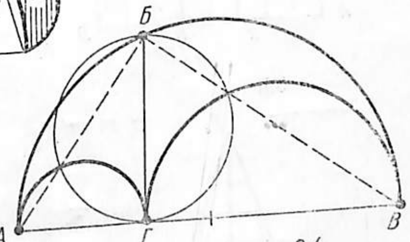

3.3



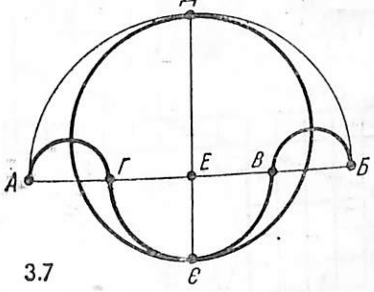
3.4



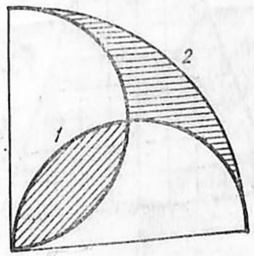
3.5



3.6

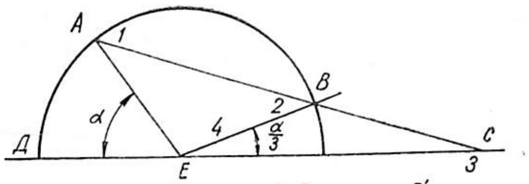


3.7

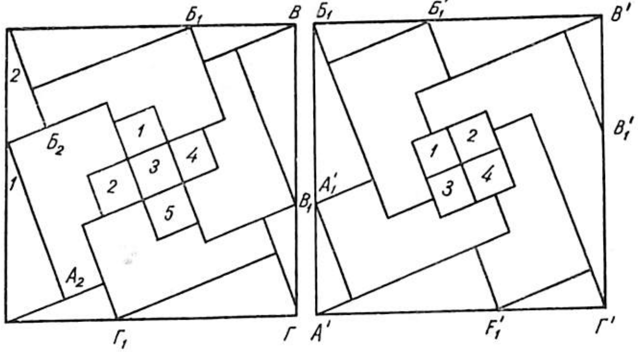


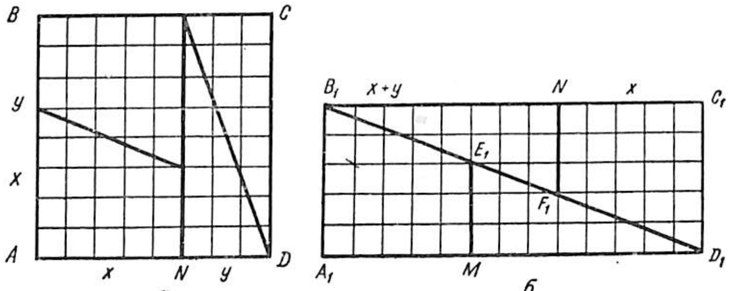
3.8

3.9

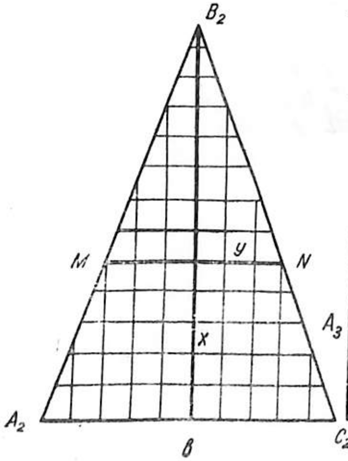


3.10

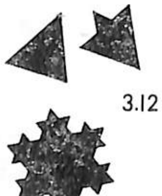


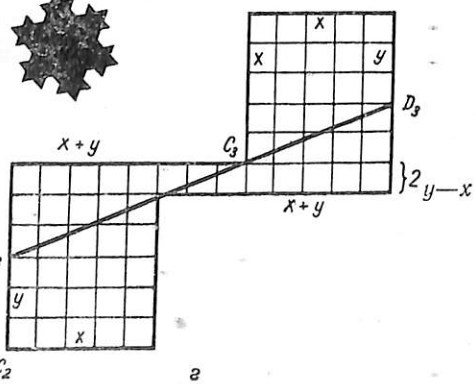


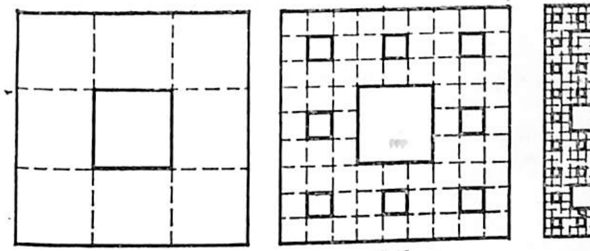
3.11



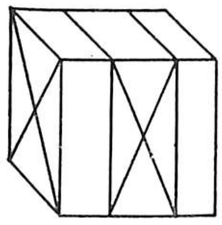
3.12



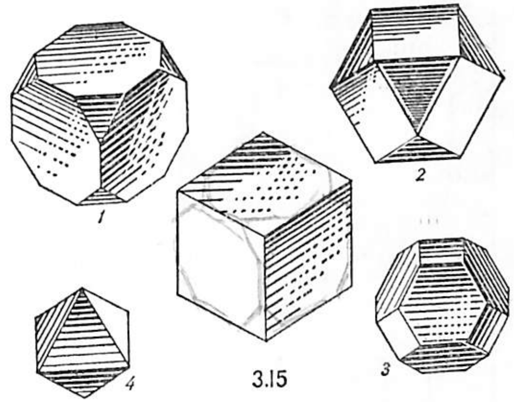




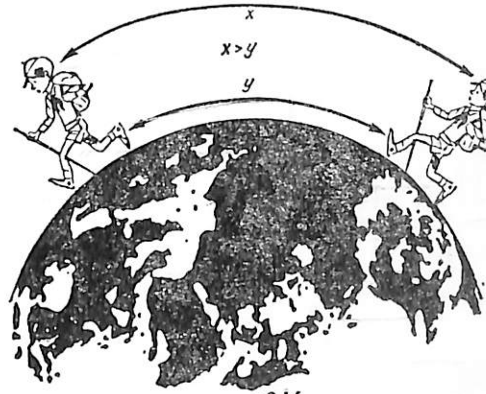
3.13



3.14

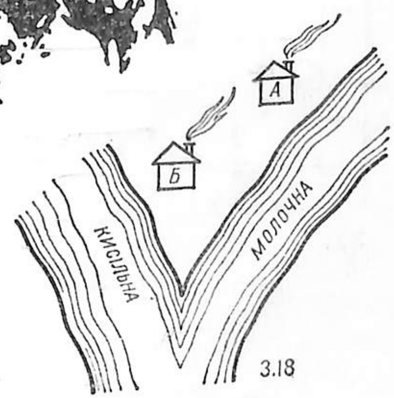


3.15



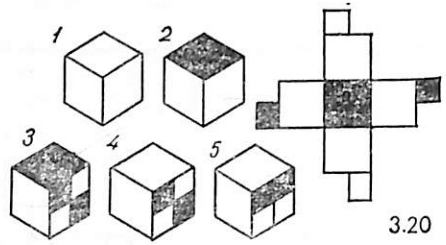
3.16

3.17

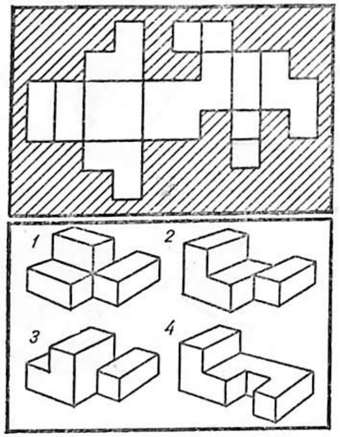


3.18

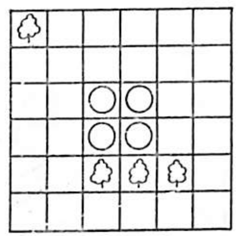
3.19



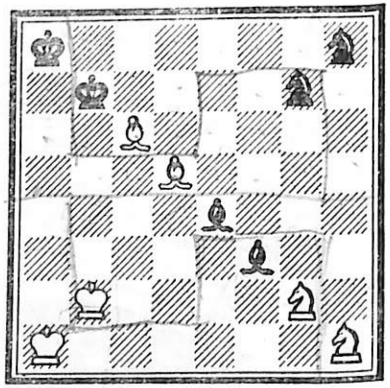
3.20



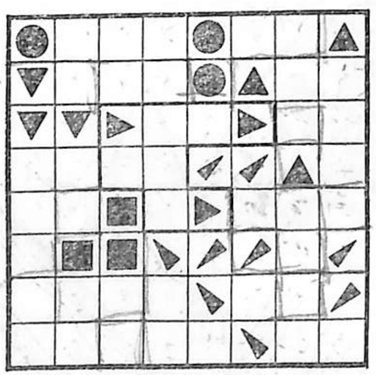
3.21



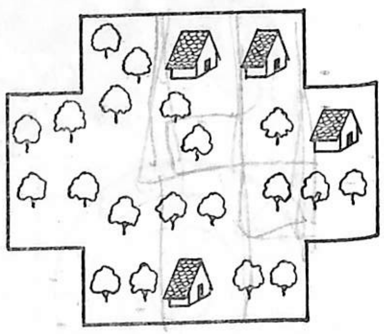
3.22



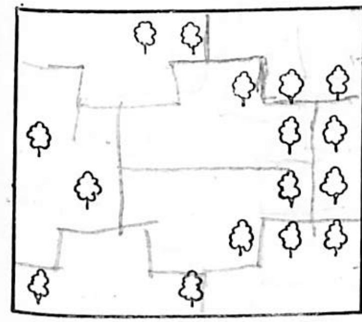
3.23



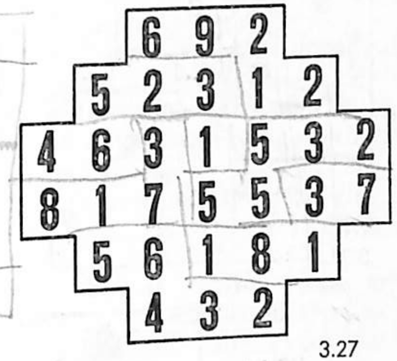
3.24



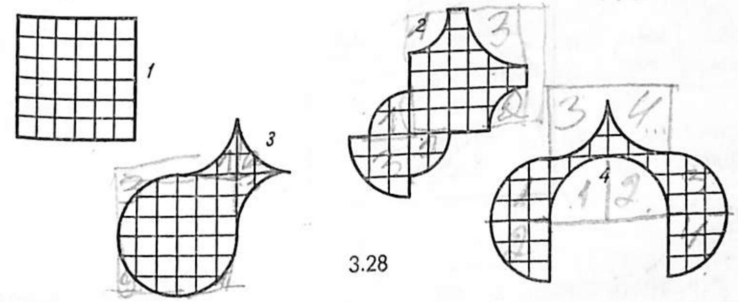
3.25



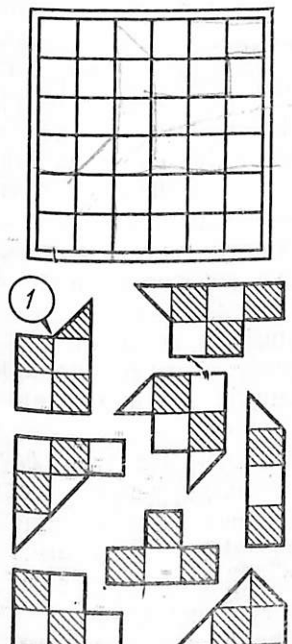
3.26



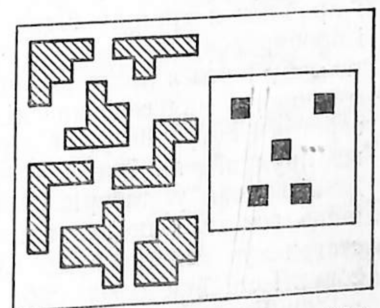
3.27



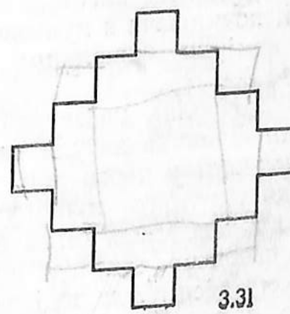
3.28



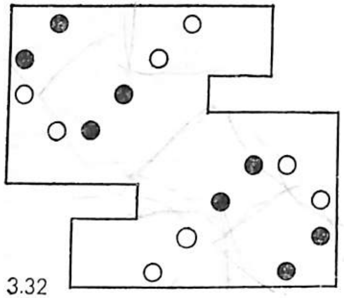
3.29



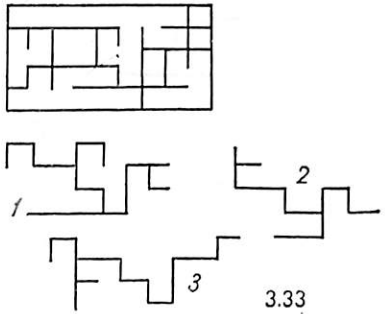
3.30



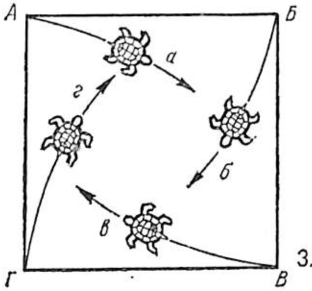
3.31



3.32



3.33



3.34

ків, траплялося, ходив туди. Йшов я чотири дні і чотири ночі. Перший день і ніч — прямою дорогою на північ, і пройшов я третину шляху. Потім повернув на захід, і пробирався лісом добу, і пройшов вдвічі менше. І третю добу йшов я лісом уже на південь, і вийшов на пряму дорогу, яка веде на схід. Прокрокував я нею сто верстов і потрапив у табір розбійників. Ти ходак такий же прудкий, як і я, йди, Івасику, дивись, на п'ятий день будеш у таборі».— «Ні,— відповідав Івасик,— якщо все так, як ти кажеш, то вже завтра я виручу сестричку». Чи так буде? Скільки верстов пройшов Лісовик і скільки думав пройти Івасик?

29. Бджоли виготовляють комірки своїх стільників самі, починаючи з нульового циклу. А як можна скласти комірки бджолиних стільників з таких деталей (мал. 3.19)?

30. Кролик надзвичайно поспішав. На тому березі річки Лисичка забула валізу. Кролик добрий весляр, і в очереті у нього прихований човен. Але як пливти? Якщо вирушити точно упоперек річки, його знесе течією і доведеться бігти берегом. Можна скерувати човен навскоси, так, щоб пришвартуватися в точно визначеному місці. Але тоді сама переправа займе надто багато часу. А кролик дуже поспішав. Ширина річки

500 м, швидкість течії — 3,5 км/год, швидкість, з якою веслує Кролик,— 4 км/год. Як діяв Кролик?

31. Розгортки якого з п'яти кубів і якої з чотирьох деталей виконані креслярем (мал. 3.20, 3.21)?

32. Розділіть квадратну ділянку на такі чотири однакові ділянки, щоб на кожній з них була одна криниця і одне дерево (мал. 3.22).

33. Розділіть шахівницю на такі чотири рівні частини, щоб на кожній з них були один король, слон і офіцер (мал. 3.23).

34. Розділіть квадрат на 8 рівних частин таким чином, щоб у кожній з них були три однакові фігури (мал. 3.24). Для полегшення завдання одна з цих частин вже визначена.

35. Розділіть територію на такі чотири рівні частини, щоб на кожній з них був будинок і два дерева (мал. 3.25).

36. Прямокутну територію розділіть на 8 однакових ділянок, щоб на кожній з них росли два дерева (мал. 3.26).

37. Розділіть фігуру на 6 рівних частин, щоб суми чисел, записаних на кожній з частин, були рівні (мал. 3.27).

38. Покажіть, що фігури 2, 3 і 4 рівновеликі і рівноскладені з квадратом 1 (мал. 3.28).

39. З восьми частин складіть шахівницю 6×6 (мал. 3.29).

40. Розмістіть сім фігур у квадраті так, щоб вони
не покривали п'ять чорних квадратиків (мал. 3.30).
Розділіть прямими лініями фігуру на такі 8 ча-
41. Розділіть прямими лініями фігуру на такі 8 ча-
стин, щоб з них можна було скласти квадрат (мал. 3.31).
Розділіть фігуру прямими лініями на 6 попарно
42. Розділіть фігуру прямими лініями на 6 попарно
рівних частин (мал. 3.32). Складіть з них квадрат так,
щоб по одній діагоналі розміщувалися лише білі кружечки, а по другій — лише чорні.

43. Шпигуна знешкодили, коли він встиг накреслити три фрагменти плану важливого об'єкта (мал. 3.33). Виявилося, що лише один фрагмент був накреслений правильно. Який?

44. В чотирьох вершинах квадрата АБВГ з довжиною сторони q сидять чотири черепахи a, $б$, $в$, $г$ (мал. 3.34). В певну мить часу вони починають одночасно рухатися з однією і тією ж швидкістю v, при цьому a рухається весь час прямо на $б$, $б$ — весь час прямо

на $в$, $в$ — прямо на $г$, $г$ — прямо на a. Де і через який час вони зустрінуться?

45. Давньогрецький письменник і історик Плутарх (бл. 45 — бл. 127) писав, що Архімед настільки був упевнений у силі механізмів, що якось вигукнув: «Дайте мені точку опори — і я зрушу Землю!» Зрозуміло, що точка опори мала бути поза Землею. Обчисліть, на яку відстань пересунувся б вільний кінець важеля за 1 сек., якщо вдалося б зрушити Землю, маса якої приблизно дорівнює $6 \cdot 10^{24}$ кг, а людина за 1 сек. може підняти 60 кг на висоту 1 м від поверхні Землі?

ВИКОРИСТАНА ТА РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА *

Абчук В. А. Секрет великих полководцев. К. : Веселка, 1981.

Абчук В. А. 7 : 1 в нашу пользу. М. : Радио и связь, 1982.

Аршинов М. Н., **Садовский Л. Е.** Коды и математика. М. : Наука, 1983.

Байиф Ж. К. Логические задачи. М. : Мир, 1983.

Балк М. Б., **Балк Г. Д.** Поиск решения. М. : Дет. лит., 1983.

Барр Ст. Россыпи головоломок. М. : Мир, 1987.

Березина Л. Ю. Графы и их применения. М. : Просвещение, 1979.

Беррондо М. Занимательные задачи. М. : Мир, 1983.

Бизам Д., **Герцег Я.** Игра и логика. М. : Мир, 1975.

Бизам Д., **Герцег Я.** Многоцветная логика. Л. : Мир, 1978.

Болл У., **Коксетер Г.** Математические эссе и развлечения. М. : Мир, 1986.

Виленкин Н. Я. Популярная комбинаторика. М. : Наука, 1975.

Виленкин Н. Я. В поисках бесконечности. М. : Наука, 1983.

Гарднер М. А ну-ка, догадайся. М. : Мир, 1984.

* Продовження на с. 59, 73, 90, 106, 150.

4

Народ скаже, як зав'яже

Численні афоризми і мудрі сентенції народів свідчать про споконвічне прагнення людини до знань. Віками позбавлений можливості одержувати систематичні шкільні знання, народ використовував з освітньою метою засоби усної творчості. Не без фантазії передавалися від покоління до покоління відомості про навколишній світ. Для розвитку мислення, уяви, кмітливості, пам'яті широко використовувалися загадки. Для розвитку математичного мислення дітей народна педагогіка користувалася даними народної математики. Велике місце в розвитку математичного мислення молоді посідали різноманітні задачі й головоломки. Дітям семивосьмирічного віку пропонувалися загадки-задачі, які оперували з невеликими числами. На зміну їм приходили складніші задачі, у яких підрахунки ускладнюються.

При цьому народна педагогіка враховувала те, що чим цікавіша форма навчання, тим ефективніші його результати, тим легше вчитися. Заради цього до афористичності відшліфовувалися умови задач-загадок, задачі подавалися у формі казкових сюжетів, незвичайних ситуацій, діалогів.

Народна математика широко використовувалася в предметно-практичній діяльності людини — від арифметичних розрахунків до складних і ще не завжди розшифрованих геометричних побудов у архітектурі, при закладанні й побудові нових міст, а також реконструкції старих.

Тематика задач з народної скарбниці охоплює різні розділи елементарної математики, сягає й вищих її сфер: підсумування числових рядів, розв'язування діофантових рівнянь, топології.

Учені виявили в народній математиці задачі, які прийшли з глибокої давнини і буквально мандрували по світу від одного народу до іншого. Ці витвори народної мудрості не втратили свого освітнього потенціалу і в наш час. Вони не музейні експонати історії, а все ще активні трудівники.

Деякі з цих задач пропонуємо увазі наших читачів.

1. Летіли горобці, сіли на стовпці, як сядуть по два — один стовпець зайвий, як сядуть по одному — один горобець зайвий. Скільки горобців?

2. Пасли два хлопці поросят, і один каже другому: «Дай мені одне порося, то в нас буде порівну». А другий каже: «Дай ти мені одного, то в мене буде якраз вдвічі більше, як у тебе». По скільки було в них поросят?

3. П'ять, п'ятнадцять, без двох двадцять, семеро, троє, ще й малих двоє. Скільки всіх?

4. Як сорок п'ять горіхів розкласти на дев'ять тарілок так, щоб у кожній була різна кількість горіхів?

5. Летіли гуси, а назустріч одна: «Добридень, сто гусей!» — каже. «Нас не сто, а щоб було сто, треба ще стільки, та півстільки, та чвертьстільки і ти одна». Скільки летіло гусей?

6. Сто кіп собак, скільки в них лап?

7. У хлопчика стільки ж сестер, скільки й братів, а в його сестри сестер вдвоє менше, ніж братів. Скільки в сім'ї сестер і братів?

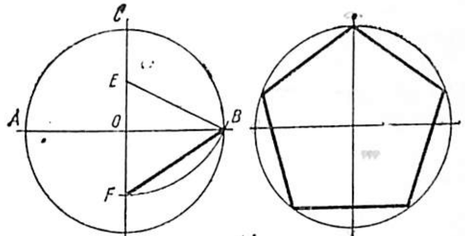
8. Знайшли гривеника й поділили: чоловікам по півтори копійки, жінкам по копійці, а дітям по чверті копійки. Скільки було чоловіків, жінок і дітей?

9. Ішло сім сестриць, несло по сім палиць, на кожній палиці по сім сучків, на кожному сучку по сім торбин, у кожній торбині по сім паляниць. Скільки всіх паляниць?

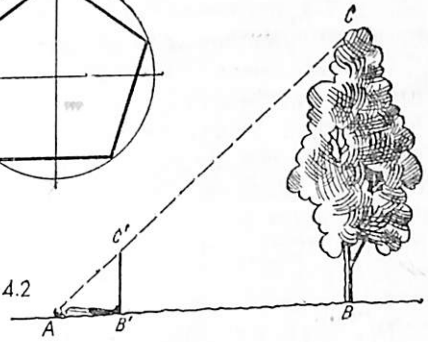
10. Стоїть стовп, а на стовпі сорок кілець, до кожного кільця прив'язано по 40 кобил, у кожної кобили 40 лошат. Скільки всього лошат?

11. На 100 карбованців купили 100 голів худоби: коней, корів і овець. За коней заплатили по 10 крб., за корів — по 5 крб., а за овець — по 50 коп. Скільки було голів кожної худоби?

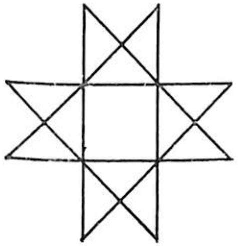
12. На півночі Чернігівської області була збудована клуня у вигляді правильного п'ятикутника. Селянин, якому вона належала, розповів, що розмітку кутів правильного п'ятикутника теслярі робили таким чином. Мотузком, як циркулем, проводили коло і в ньому будували два взаємно перпендикулярні діаметри (мал. 4.1.). Радіус OC ділили пополам у точці E; з точки E радіусом



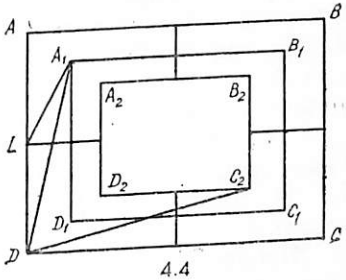
4.1



4.2



4.3



4.4

BE робили засічку на нижній частині діаметра і одержували точку F. Лінія BF — довжина стіни клуні. Доведіть, що проведені побудови справді дають сторону правильного вписаного п'ятикутника.

13. Щоб виміряти висоту недоступного предмета, діяли таким чином. Палицю розміром у свій зріст забивали в ногах на такій відстані від об'єкта, щоб, лежачи, бачити на одній лінії верхівку вимірюваного об'єкта і кінець палиці (мал. 4.2). Відстань від голови до основи предмета становить його висоту. На яких геометричних відношеннях заснований цей метод?

14. Виписати «решетилівську толоку» за одним махом (мал. 4.3). Тобто одним розчерком, не відриваючись від паперу і не проводячи двічі по одній лінії, накреслити замкнену лінію.

15. Давньоруські архітектори і майстри використовували в своїй роботі універсальні інструменти — еталони, які називалися вавілонами. Вавілон являв собою фігуру, утворену трьома прямокутниками, побудованими один всередині іншого (мал. 4.4). При цьому довжини сторін прямокутників мали такі відношення:

$AB : BC = 1 : \sqrt{2/2}$ $A_1B_1 = BC$, $A_2B_2 = 1/2AB$; $B_2C_2 = 1/2BC$. Ці відношення і відстані між точками вавілона приховують у собі багато співвідношень, які використовувалися в архітектурі й прикладній геометрії середньовіччя. За допомогою вавілона можна наближено розв'язати багато цікавих задач на побудову. Позначивши площу квадрата із стороною AB через S ($AB^2 = S$), побудуйте за допомогою вавілона:

I) три рівні квадрати, такі, що площа кожного з них дорівнює $1/3S$;

II) рівносторонній трикутник, рівновеликий $AB^2 = S$;

III) правильний шестикутник, рівновеликий AB^2;

IV) круг, рівновеликий AB^2.

Обчисліть похибку для кожної побудови.

16. Під час будівництва відомого вірменського монастиря X ст. Ваанаванка везли з каменоломні двохсотпудовий камінь. Півдороги чотири бики везли його три дні. Камінь був важкий, довелося його розбити, від нього лишилося 150 пудів, а биків взяли на половину більше, ніж було. Скільки часу тягли камінь у двір Ваанаванка?

17. Мірошник розділив 100 мір пшениці на три частини, щоб навантажити на коня, осла й ослика. Якщо від вантажу коня відняти один вантаж осла, то решту ослик може перевезти за шість прийомів, а якщо відняти два вантажі осла, то решту ослик зможе перевезти в чотири прийоми, а на п'ятий залишиться вантаж, на половину менший, ніж кожен із попередніх чотирьох. Скільки мір зерна навантажив мірошник на коня, осла і ослика?

18. Дочки Навасарда були килимарки. Якби Навасард дав кожній дочці по сім мотків ниток без одного, то в нього ще лишилась би така сама частина мотків. А якби він дав кожній по сім і ще по одному мотку, то одній дочці ниток не дісталося б зовсім. Скільки дочок і скільки мотків ниток було в Навасарда?

19. На семи горах ростуть по сім дерев, під кожним деревом по сім нір, у кожній норі живуть по сім лисиць, у кожної лисиці по сім лисенят. Скільки всього лисиць?

20. Дуже давно на Сході жив-був чоловік, який, вмираючи, залишив своїм трьом синам 17 верблюдів. Він заповів старшому синові половину, середньому — третину, молодшому — дев'яту частину.

Не знайшовши розв'язання самостійно (адже задача в цілих верблюдах розв'язку не має), брати звернулися до мудреця.

— О мудрий! — сказав старший брат.— Батько залишив нам 17 верблюдів і велів розділити між собою таким чином... Але 17 не ділиться ні на 2, ні на 3, ні на 9. Чи зможеш ти, о вельмишановний, допомогти нашій біді, бо ми хочемо виконати волю батька?

— Нема нічого простішого,— відповів мудрець,— якщо до 17 ваших чудових приєднати ще й мого старенького верблюда. Ось слухайте.

Брати слухали й дуже дякували мудрецю, який задовольнив всі умови батьківського заповіту і не випадково, замість свого старенького, сів, щоб їхати далі, на найкращого з верблюдів. Як розділив мудрець спадщину?

ВИКОРИСТАНА ТА РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Гарднер М. Есть идея. М. : Мир, 1982.

Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. М. : Мир, 1971.

Гарднер М. Математические досуги. М. : Мир, 1972.

Гарднер М. Математические новеллы. М. : Мир, 1974.

Гарднер М. Математические чудеса и тайны. М. : Наука, 1986.

Глебко Ю. Г. В часы досуга. К. : Реклама, 1985.

Голомб С. В. Полимино. М. : Мир, 1975.

Гуревич Е. Я. Тайна древнего талисмана. М. : Наука, 1969.

Доморяд А. П. Математические игры и развлечения. М. : Физматгиз, 1961.

Дьюдени Г. Э. Кентерберийские головоломки. М. : Мир, 1979.

Дьюдени Г. Э. 520 головоломок. М. : Мир, 1975.

Еленьский Щ. По следам Пифагора. Занимательная математика. М. : Детгиз, 1961. С. 486.

Ивин А. А. По законам логики. М. : Мол. гвардия, 1983.

5

Бодай ходити, та не блудити

Задача — це своєрідний лабіринт, до якого потрібно знайти ключ, якщо хочемо її розв'язати. Лабіринтом у багатьох задачах можна вважати приховані відношення між даними й шуканими об'єктами. У різних варіантах пропонується виявити порядок, структурність у системах, які на перший погляд здаються хаотичними.

Зрозуміло, що пропоновані завдання — лише цікаві задачі та головоломки. І все ж, працюючи з ними, пам'ятатимемо, що ігрова діяльність теж приводить до відкриттів, дозволяє накопичити великий і виключно важливий для подальшої діяльності досвід, часто ефективніший, ніж той, якого набуто іншими шляхами.

1. 13 березня 1736 року математик Леонард Ейлер писав з Петербурга італійському математику й інженеру Маріоні: «Колись мені було запропоновано задачу про острів, розташований в місті Кенігсберзі і оточений річкою, через яку перекинуто сім мостів (мал. 5.1). Питається, чи може хтось неперервно обійти їх, проходячи лише одного разу через кожний міст. І тут же мені було повідомлено, що ніхто й досі не зміг цього зробити і водночас ніхто не довів, що це неможливо. Питання це, хоча й банальне, здалося мені вартим уваги завдяки тому, що для його розв'язування недостатньо ні самої геометрії, ні алгебри, ні комбінаторного мистецтва... Після тривалих роздумів я знайшов просте правило, яке грунтується на переконливому доведенні і за допомогою якого можна в усіх задачах такого виду відразу визначити, чи можливо здійснити такий обхід довільної кількості і як завгодно розміщених мостів, чи не можливо».

Ейлер позначає точками B і C береги річки, A і D — острови, а лініями — мости, які сполучають ділянки берегів і островів. У результаті вийшла фігура, яку

пізніше назвали графом. Точки A, B, C і D — вершини графа, а відрізки ліній, які сполучають вершини,— дуги, або ребра. Вершини, з яких виходить непарне (парне) число дуг, називаються непарними (парними). Розв'язуючи задачу, Ейлер встановив таке:

а) коли всі вершини графа парні, то можна одним розчерком (тобто не відриваючи олівця від паперу і проводячи по кожній дузі лише один раз) накреслити такий граф, причому рух можна розпочинати з будь-якої вершини, і закінчиться він у тій самій вершині;

б) граф з двома непарними вершинами можна накреслити одним розчерком, при цьому непарні вершини обов'язково мають бути початком і кінцем руху;

в) граф з більш як двома непарними вершинами накреслити одним розчерком неможливо.

Лінії, які можна накреслити одним розчерком, називаються унікурсальними.

Граф виявився зручною математичною моделлю для надзвичайно широкого класу задач. Адже вершинами графа можуть бути острови, береги, квартали міста, планети, галактики і т. ін. Ця універсальність графів відкрила широкий шлях до розвитку математичної дисципліни — теорії графів, що сьогодні знайшла застосування в математиці, техніці, природничих і гуманітарних науках. Так із задачі-головоломки виросла надзвичайно важлива галузь математики.

Не вичерпується й потік нових цікавих задач, які, ніби пройшовши по сімох мостах Ейлерової головоломки, поповнюють арсенал цікавої математики. Перш ніж розглянути їх, з'ясуємо, якою була відповідь Ейлера щодо унікурсальності прогулянки по сімох мостах.

2. Навчені досвідом попередньої задачі, читачі не розгубляться перед унікурсальною прогулянкою по п'ятнадцяти мостах (мал. 5.2). Її можна попередньо розпланувати на графі системи, а можна й відразу вирушати в дорогу, поклавшись на метод спроб і помилок.

3. Великий російський полководець О. В. Суворов перевіряв кмітливість своїх офіцерів, пропонуючи їм таку задачу.

Комендант виходить з центрального приміщення фортеці й вирушає перевіряти, як несуть варту солдати (мал. 5.3). Яким маршрутом він має йти, щоб перевірити всі пости і жодної ділянки шляху не проходити двічі?

4. Зберігся план підземелля, в одній з кімнат якого захований скарб лицаря (мал. 5.4). У заповіті говориться, що для відшукання скарбу досить ввійти в одну з крайніх кімнат підземелля, пройти через усі двері, причому тільки один раз через кожні; скарб захований за тими дверима, які будуть пройдені останніми. Де захований скарб?

5. Мисливець за мертвими душами Павло Іванович Чичиков побував у своїх потенціальних клієнтів точно по одному разу. Він відвідав їх у такому порядку: Манилова, Коробочку, Ноздрьова, Собакевича, Плюшкіна, Тентетникова, генерала Бетрищева, Пєтуха, Констанжогло, полковника Кошкарьова. «Знайдено» складений Чичиковим граф взаємного розміщення маєтків і польових доріг, які сполучають їх (мал. 5.5). Встановіть, який маєток кому належить, якщо по жодній дорозі Чичиков не проїжджав більш ніж один раз.

6. У невеличкому ліску перебуває заєць (мал. 5.6). Вискочивши з ямки і бігаючи снігом від дерева до дерева, він залишив сліди у формі ліній і нарешті заховався під одним з дерев. Де перебуває тепер заєць, коли відомо, що по одній лінії він жодного разу не пробігав двічі? Під яким деревом його ямка?

7. На мал. 5.7 подано схему зоопарку (вершини графа — вхід, вихід, перехрестя, повороти, глухі кути, а ребра — доріжки, уздовж яких розміщені клітки). Знайдіть маршрут, яким екскурсовод міг би провести відвідувачів, показавши їм усіх звірів і не проходячи більш як один раз по жодній ділянці маршруту.

8. На графі (мал. 5.8) подано схему приміщень виставки. Вершини графа — вхід, вихід, двері, які сполучають зали, перехрестя, а ребра — зали й коридори. Чи зможе екскурсовод провести відвідувачів по виставці так, щоб вони побували в кожному залі тільки один раз?

9. Як можна, вийшовши з кімнати 20 (мал. 5.9), пройти всі кімнати так, щоб через кожні двері проходити лише один раз? У якій кімнаті закінчиться такий обхід?

10. Вахтер перевіряє всі кімнати приміщення (мал. 5.10). З якої кімнати він розпочинає маршрут, якщо через кожні двері приміщення проходить тільки по одному разу?

11. Піонери попросили піонервожату організувати екскурсію в міський парк. Піонервожата показала піонерам план парку (мал. 5.11) і зауважила, що вони мають зібратися на тому перехресті доріг, звідки можна пройти по всіх дорогах лише по одному разу. На якому перехресті зібралися піонери?

12. Водій снігоочисної машини помітив, що коли кожною вулицею району він проїде точно по одному разу, то закінчить маршрут на тому самому перехресті, де знаходиться гараж (мал. 5.12). З якого перехрестя має розпочати роботу водій і на якому перехресті знаходиться гараж?

13. Внутрішні й зовнішні двері складського приміщення розташовані так, що завгосп, починаючи обхід приміщень з кімнати B, міг пройти через кожні двері тільки один раз, наприклад, по маршруту, вказаному суцільною лінією (мал. 5.13).

Під час реконструкції складу зробили ще двоє зовнішніх дверей, і тоді завгоспу ніяк не вдавалося обійти всі кімнати, проходячи через кожні двері лише один раз. Архітектор, щоб не засмучувати завгоспа, погодився замурувати одні з дверей, зберігши при цьому двоє добудованих. Тоді завгосп знову знайшов такий маршрут, але тепер він розпочинався й закінчувався всередині приміщення.

Чи й справді не можна в реконструйованому приміщенні складу знайти маршрут, який проходив би через кожні двері лише один раз, чи, можливо, такий маршрут все ж таки існує і завгосп лише не зміг його знайти? Які двері в реконструйованому приміщенні потрібно замурувати, щоб такий маршрут знову з'явився?

14. Виставку розгорнуто в 20 залах (мал. 5.14). Зовнішні двері залу 3 зачинені. Вхід і вихід здійснюється через зал 1.

Для зручності відвідувачів у кожному залі вивішено таблички з написом: «Продовження огляду». Керуючись ними, можна обійти всі зали, побувавши в кожному з них лише один раз (крім, зрозуміло, залу 1, бо через нього доведеться пройти і вдруге — на вихід).

На плані приміщення виставки табличок-покажчиків нема.

I) Чи зумієте ви повторити маршрут огляду виставки, передбачений її організаторами?

II) У зв'язку із зміною експозиції зал 6 тимчасово закрили. Чи можна тепер пройти рештою 19 залів, починавши й закінчивши огляд, як і в попередньому випадку, у залі 1?

III) Чи зможе представник фірми, експонати якої розміщені в залі 11, пройти по всіх залах виставки і повернутися на своє місце в зал 11, побувавши в кожному з 19 залів лише по одному разу?

IV) Чи зможе представник тієї самої фірми виключити із свого обходу зали 1 й 18?

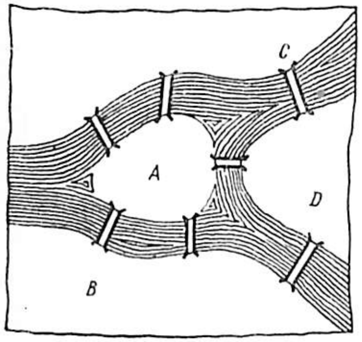
V) Відкрили зовнішні двері залу 3. Чи можна тепер оглянути експозицію, побувавши в кожному залі точно по одному разу? Вхід через зал 1, а вихід — через зал 3.

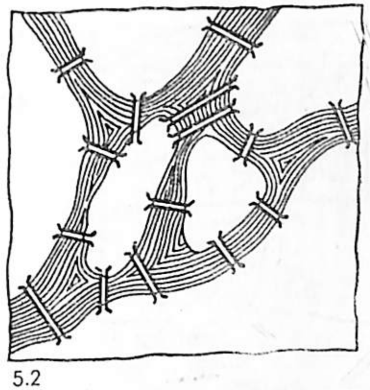
Попередні задачі впритул підвели нас до власне лабіринтів-головоломок. Ними заповнювали дозвілля вже стародавні греки та римляни. Про це свідчить креслення, виявлене на стіні одного з будинків міста Помпеї, засипаного попелом під час виверження Везувію в 79 р. Біля креслення лабіринту написано: «Лабіринт. Тут живе Мінотавр».

Давня історія лабіринтів багата легендами та героїчними і трагічними реальними фактами. Але ми обмежимося кількома головоломками, які варіюють невичерпну тему лабіринту.

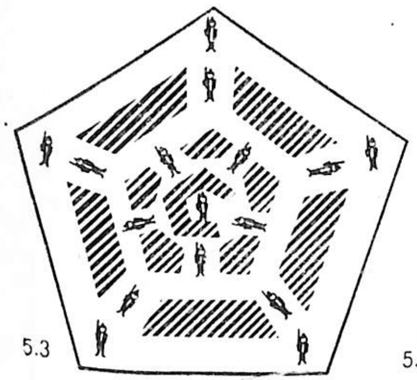
У повісті англійського письменника-гумориста Джерома К. Джерома «Троє в одному човні, як не рахувати собаки» розповідається про відвідини одним з героїв повісті відомого лабіринту-атракціону, спорудженого ще в 1690 р. поблизу Лондона, в парку Гемптон-Корт (мал. 5.15). Цей лабіринт завдав чимало турбот Гаррісу, хоч той вважав, що прогулянка не становитиме жодних ускладнень. Заблукав він тому, що не мав нитки Аріадни — хоча б найпростішого алгоритму розв'язування лабіринтних задач, наприклад, правила однієї руки. Потрібно було просто йти, не відриваючи правої (або лівої) руки від однієї із стін лабіринту. Тоді обов'язково можна знайти вихід, хоча, можливо, й не найкоротшим шляхом. Але цей алгоритм спрацює лише тоді, коли весь лабіринт складається з однієї, хоча й дуже розгалуженої стіни. Такі лабіринти називаються зв'язними. Якщо ж лабіринт містить ізольовану стіну, тоді, застосувавши правило однієї руки, можна без кінця кружляти навколо неї. Саме в такій пастці опинився Гарріс. У цьому випадку потрібно додержувати такого правила. Ввійшовши в лабіринт, застосуємо правило однієї руки, наприклад, правої. Дійшовши до перехрестя, йдемо в будь-якому напрямку. Опинившись у глухому куті, повертаємося у вихідну точку. З неї йдемо в той коридор, у якому ще не були. Не можна входити в коридор, на обох стінах якого уже зроблено позначки про наше перебування.

5.1

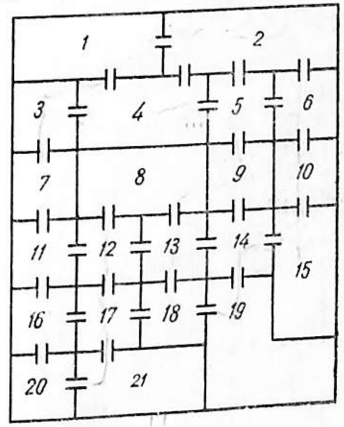




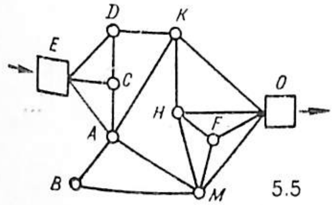
5.2



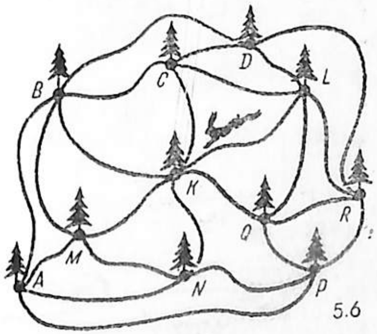
5.3



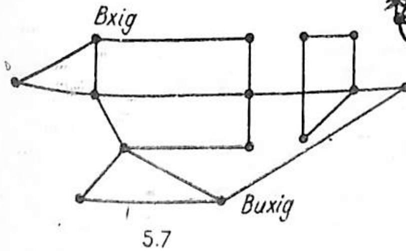
5.4



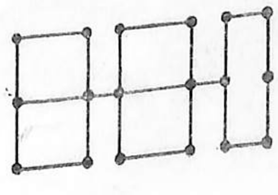
5.5



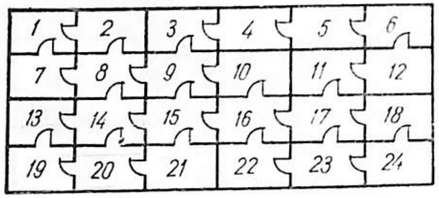
5.6



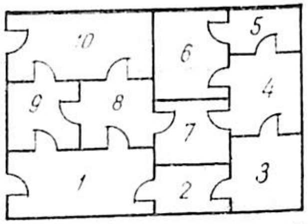
5.7



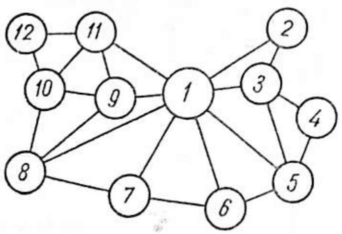
5.8

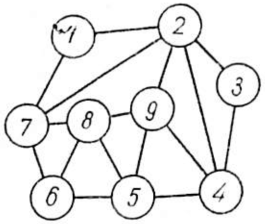


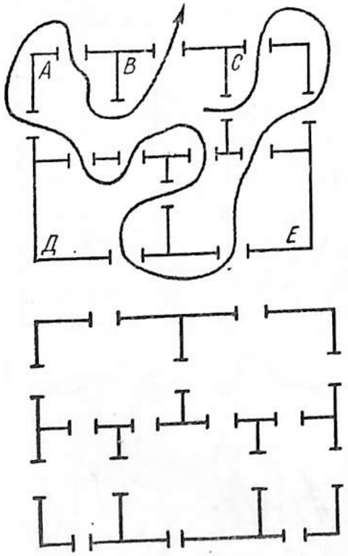
5.9



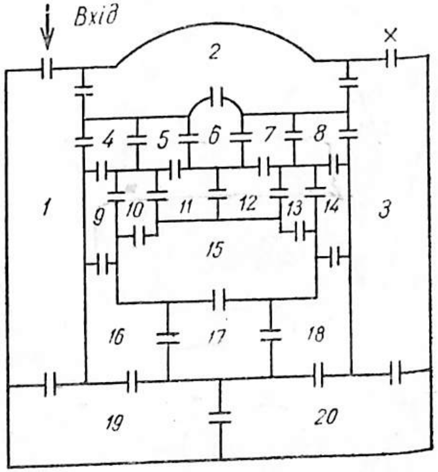
5.10


5.11

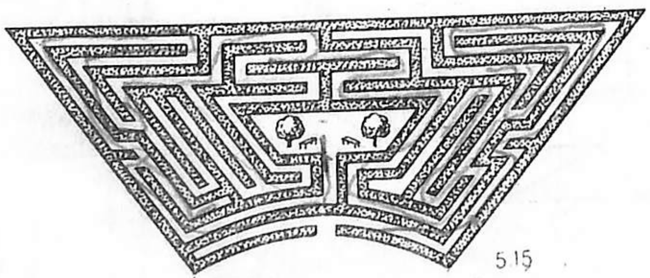

5.12

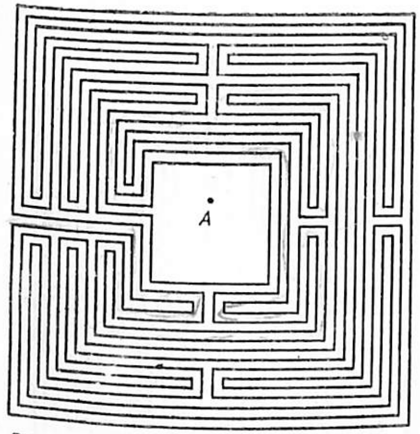


5.13



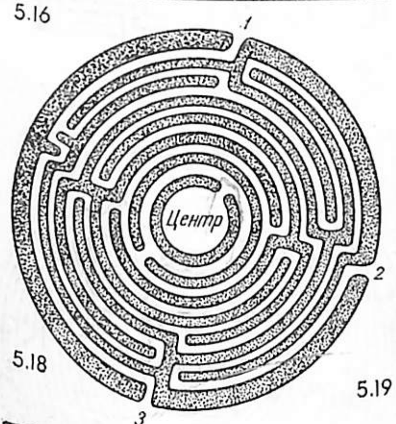
5.14


5.15



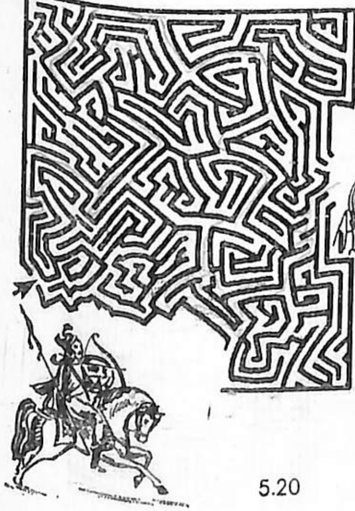
5.16

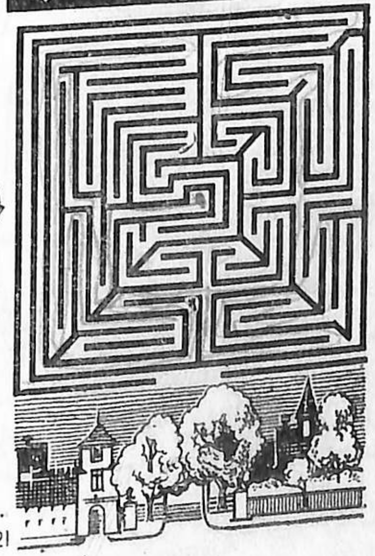
5.17

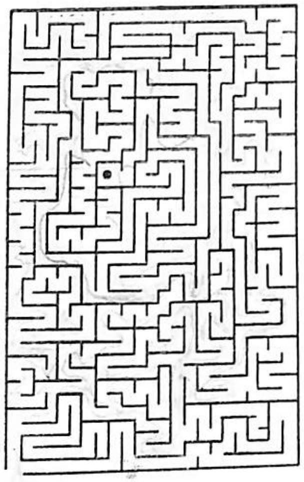


5.18

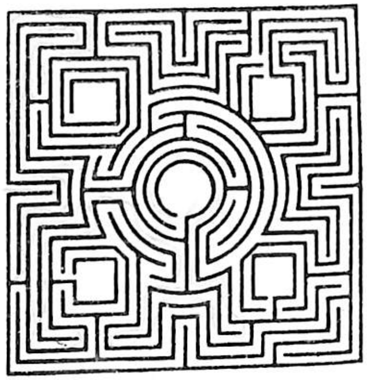
5.19


5.20

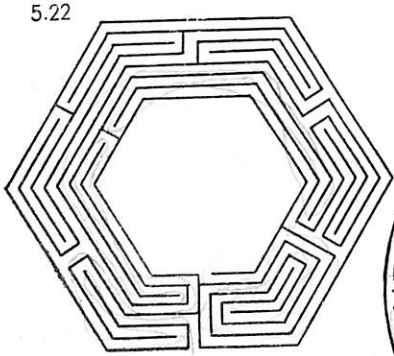

5.21



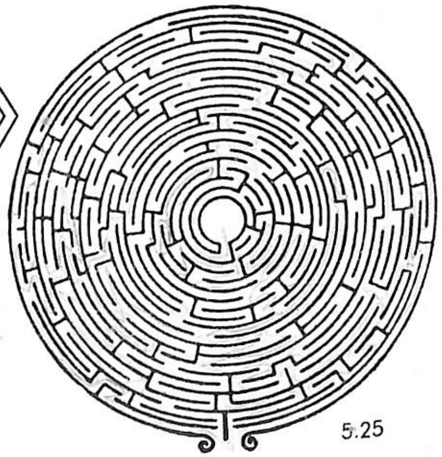
5.22



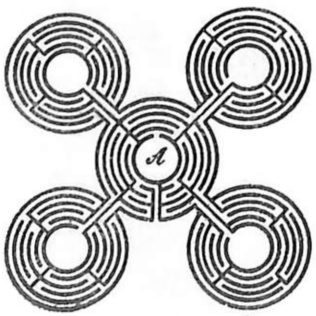
5.23



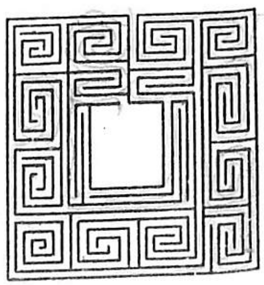
5.24



5.25



5.26



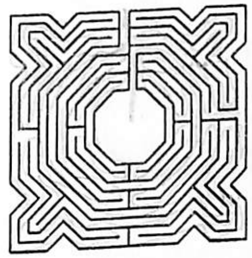
5.27

5.28

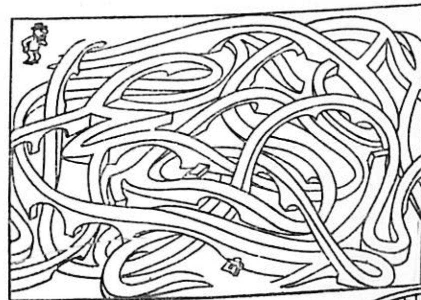
5.29

5.30

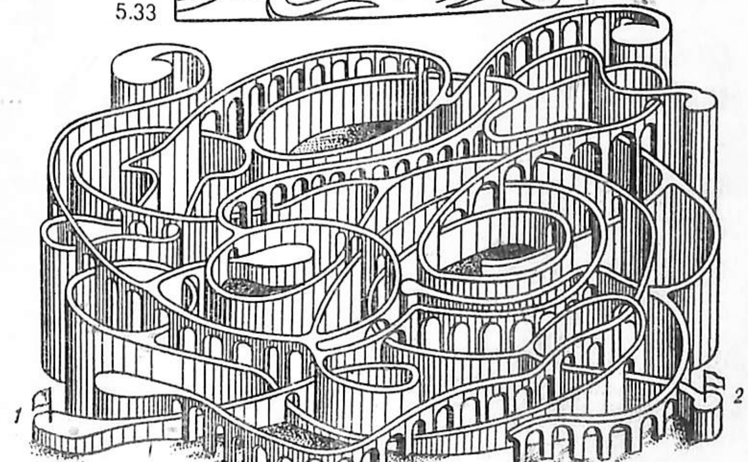
5.31



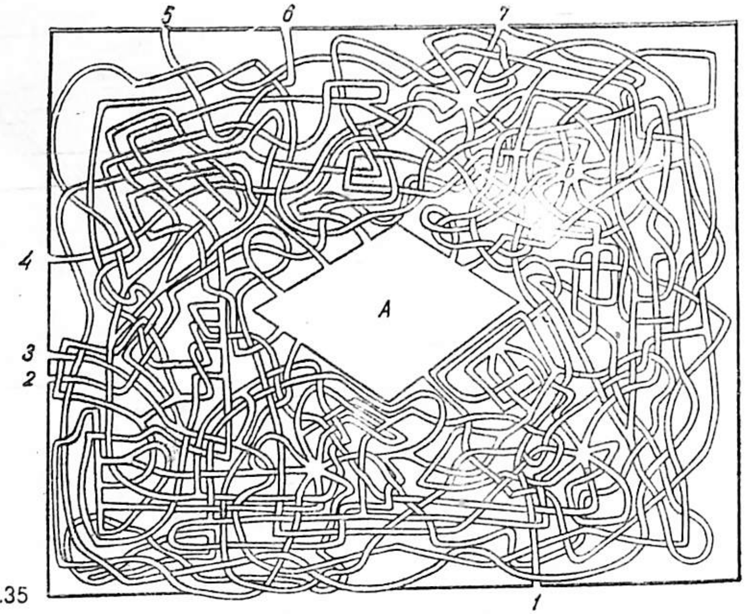
5.32



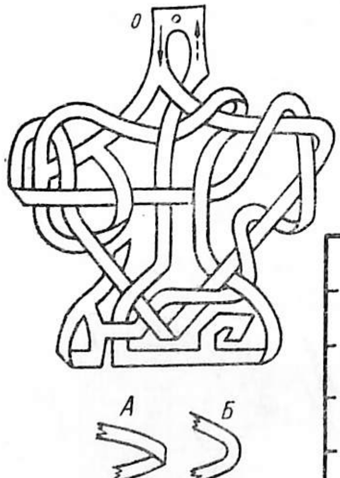
5.33



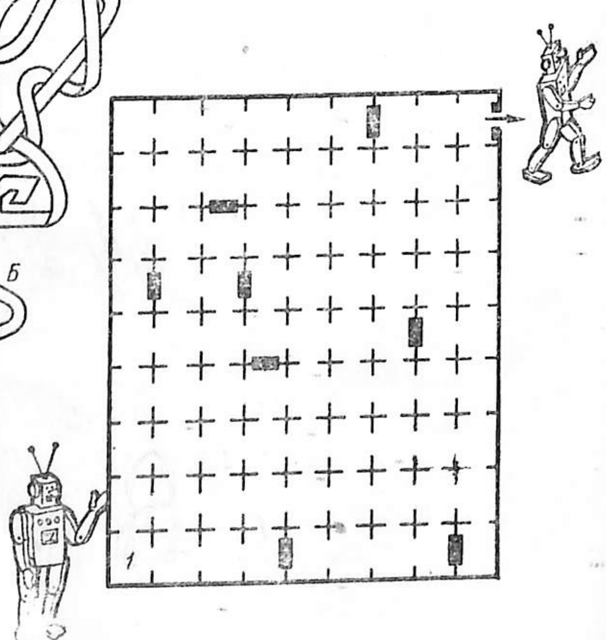
5.34



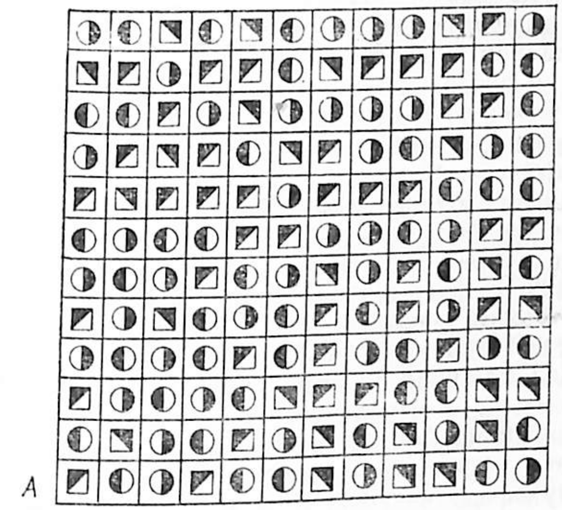
5.35



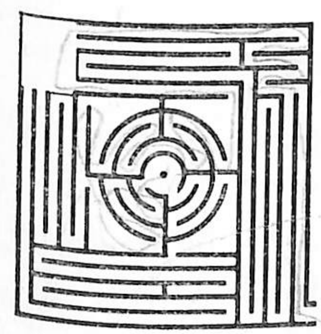
5.36

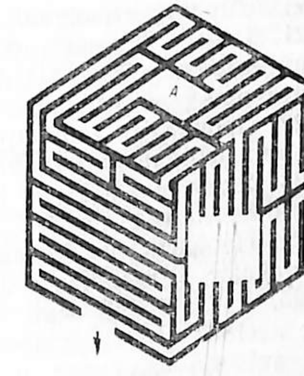


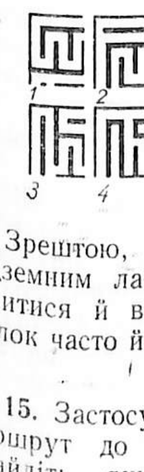
5.37



5.38

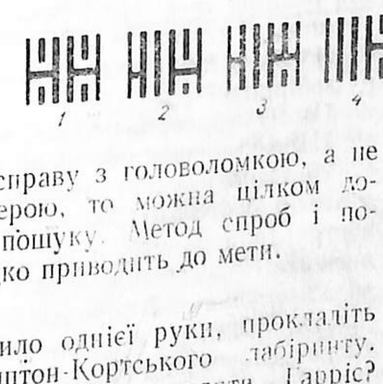






5.39

5.40



Зрештою, якщо маєш справу з головоломкою, а не підземним лабіринтом-печерою, то можна цілком довіритися й випадковому пошуку. Метод спроб і помилок часто й досить швидко приводить до мети.

15. Застосувавши правило однієї руки, прокладіть маршрут до центру Гемптон-Кортського лабіринту. Знайдіть, якими коридорами міг кружляти Гарріс?

16. Застосувавши правило однієї руки, прокладіть маршрут до центру цього лабіринту (мал. 5.16).

17. Лабіринти, подані на мал. 5.17 і мал. 5.18, мають по три входи кожний. Перевірте, через який вхід можна пройти до центру кожного лабіринту, застосувавши правило правої руки, правило лівої руки, правило однієї руки?

18. Лицар заблукав у лісі (мал. 5.19). Якою з п'яти доріг він має йти, щоб потрапити до замку? Правило якої руки — лівої чи правої — забезпечить йому коротший шлях? Чи буде він найкоротшим?

19. Вершник упевнено мчить уперед, бо знає, яка дорога веде до замку (мал. 5.20). Яка?

20. Цей лабіринт із зелених насаджень є в НДР (мал. 5.21). З центрального майдану відкриваються чарівні околиці. Але потрапити до центру зовсім нелегко. Ви переконаєтеся в цьому, прокладаючи маршрут до центру не в коридорах із зелених насаджень, а на схемі лабіринту-атракціону.

21. Такий лабіринт зробив у своєму саду англійський математик У. У. Роуз Болл (мал. 5.22). Потрібно знайти шлях до майданчика, позначеного точкою.

22. Прокладіть маршрути до центру кожного з десяти цих лабіринтів (мал. 5.23—5.32).

23. Яким шляхом має йти дідусь, щоб знайти забутий портфель (мал. 5.33)?

24. Пройдіть по естакадах міста Неевклідівська від майдану 1 до майдану 2 (мал. 5.34).

25. Англійський математик Чарлз Латуїдж Доджсон (1832—1898) уславився своїми казками про Алісу, які він друкував під літературним псевдонімом Льюїс Керролл. А цей лабіринт юний Доджсон придумав для розваги своєї сім'ї (мал. 5.35). Лабіринт Доджсона приховує багато задач. Ось три з них.

I) Через які із семи виходів можна пройти до центру лабіринту?

II) Які входи дають можливість пройти до площі?

III) Скількома шляхами з'єднані центр і площа А?

26. Одностороння поверхня, винайдена німецьким математиком Мебіусом (1790—1868), спочатку сприймалася як абстрактний монстр, породжений нестримною фантазією вченого. Потім Мебіусів листок знайшов цілком практичні застосування і породив близько 100 конкретних винаходів. Тепер він виступає в ролі й лабіринту (мал. 5.36). Знайдіть у ньому два способи проходження від точки *О* по верхній видимій стороні (напрям зазначено суцільною стрілкою) так, щоб шлях закінчувався в тій же точці, але з протилежної сторони (напрям зазначенній пунктирно стрілкою).

На малюнку А показано позначення переходу з однієї сторони на другу, на малюнку Б — позначення поворотів шляху без переходів на другу сторону.

27. Робот потрапив у приміщення, 145 дверей якого контролює електронна техніка (мал. 5.37). З нею щось трапилося, тому більшість дверей відчинено і тільки 9 зачинено. Робот знає, що зачинені двері запрограмовані так, що кожні з них відчиняються тільки тоді, коли раніше, ніж досягти їх, пройдеш рівно через 8 відчинених дверей. При цьому, як тільки проходиш якісь двері, вони автоматично зачиняються. Оглянувши план приміщення, робот (він перебуває у кімнаті 1), зрозумів, що необхідно шукати два алгоритми виходу з нього. Знайшовши їх і дотримуючись одного з них, він пройшов через всі 9 поки що зачинених дверей і вийшов з приміщення. Чому робот шукав два алгоритми виходу з приміщення? Які алгоритми він знайшов?

28. Прокладіть маршрут від А до В (мал. 5.38), але такий, щоб він увесь складався з ланцюга четвірок

 і саме в такій послідовності.

29. Які деталі потрібно встановити в частково демонтовані лабіринти (мал. 5.39 і мал. 5.40) так, щоб у першому можна було пройти до центру лабіринту, а в другому вийти від ділянки А до позначеного стрілкою виходу?

ВИКОРИСТАНА ТА РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Игнатьев Е. И. В царстве смекалки. М. : Наука, 1987.

Квант. Научно-популярный физико-математический журнал. 1970—1988.

Конфорович А. Г. Математичні софізми і парадокси. К. : Рад. шк., 1983.

Кордемський Б. А. Математична кмітливість. К.: Рад. шк., 1963.

Кэрролл Льюис. История с узелками. М. : Мир, 1973.

Леман И. Увлекательная математика. М. : Знание, 1985.

Линдгрен Г. Занимательные задачи на разрезывание. М. : Мир, 1977.

6

Що двір, то говір

Головний зміст усіх процесів керування в живих організмах, суспільстві і техніці полягає в сприйманні, нагромадженні, переробці і використанні різної інформації. Остання найчастіше зберігається у формі символів, які у процесі розв'язування різних задач моделюють предмети, явища, поняття.

Складна взаємодія образного й словесного використання символів здійснюється за допомогою кодування. Код (від лат. *codex* — звід законів) — це система символів для передавання, обробки й зберігання інформації. При цьому розв'язують одну з двох взаємно протилежних задач: домагаються, щоб закодовану інформацію міг кожен легко і швидко декодувати або, навпаки,— зробити її недоступною для всіх, крім того, кому вона адресована. У цьому випадку говорять ще, що інформацію зашифровано, і шифр саме і є тією сукупністю символів (цифр, літер і т. ін.), різними композиціями яких замінюють фрази, слова, склади або окремі літери при засекречуванні інформації. Зокрема, і при секретному листуванні. Тоді кодом називають ключ до способу шифрування і розшифрування тайнопису — криптограми. Звідси й термін криптографія — спосіб тайнопису, заснований на вживанні шифру.

Про криптографію згадує ще Геродот (V ст. до н.е.). Визначний сатирик античних часів Арістофан у комедії «Лісістрата» (411 р. до н. е.) говорить про Лаконське берло — вид шифрування листів у Спарті. Лист писали на спірально обмотаному навколо палиці ремені або пергаменті, а адресат прочитував його, намотавши одержаний ремінь на палицю такої самої довжини й товщини.

Легко здогадатися, що криптографія є не чим іншим, як лабіринтом, де прагнуть заховати якусь важливу інформацію. Оскільки до таких схованок доводилося вдаватися часто і в мирні, і у воєнні часи, то були знайдені численні способи криптографії, а її історія зберігає багато героїчних і трагічних сторінок. Досить ска-

зати, що під час другої світової війни одне з найбільших міст Англії, Ковентрі, англійський уряд приніс у жертву молоху війни (550 000 чоловік загинули під міськими руїнами і близько 5000 були скалічені) задля збереження таємниці про те, що англійська розвідка володіє кодом розшифрування наказів і цілком таємного листування фашистського вермахту.

До криптографії зверталися і в багатьох інших випадках, коли потрібно було з тих або інших причин заховати від сторонніх якусь важливу або й небезпечну інформацію. Так, майже через 120 років після вбивства Авраама Лінкольна, коли історик-аматор Нефф розшифрував записи полковника Бейкера, відкрилася таємниця початку зловісного рахунку вбивств американських президентів.

Езопова мова — це теж вид шифру, до якого часто вдаються письменники, художники, скульптори. Їхні твори повняться численними натяками, символами, зрозумілими лише деяким, декому із сучасників, можливо, найближчим людям. Так, говорячи про творчість М. Ю. Лермонтова, О. Блок писав: «Коли відшукують скарб, то насамперед витлумачують значення шифру, який вкаже місце скарбу, потім «сім разів відміряють»— але зате потім раз і назавжди безпомилково «визначають» ділянку землі, у якій приховується скарб. Лермонтовський скарб вартий наполегливих зусиль» (Блок А. Собр. соч. В 6-ти т., т. 4. Л., Худ. лит., 1982, с. 13).

Одночасно з винайденням нових методів криптографії розроблялись і методи дешифрування або криптоаналізу. Великий внесок у цю галузь зробили такі визначні математики, як Дж. Кардано, Ф. Вієт, Дж. Валліс та інші.

У зв'язку з проблемами передавання повідомлень по лініях зв'язку (телеграф, телефон, радіо, телебачення, космічний зв'язок і т. ін.) надзвичайно актуальними стали задачі розробки таких кодів, які б не засекречували повідомлення, а робили їх швидко, зручно і надійно декодованими. Розв'язуються ці задачі на основі потужних методів сучасної математики. Тому теорія кодування вважається одним з важливих розділів прикладної математики. Зрозуміло, що в збірнику цікавих задач ми обмежимося мінімумом математики і лише цікавою криптографією.

Шифри добре служать пригодницькій літературі і цікавому дозвіллю. Цікава криптографія — справді не-

вичерпне джерело головоломок, від немудрих розваг до
неприступних бастіонів таїни.

Способів тайнопису є величезна кількість. У цій галу-
зі вже не потрібно вигадувати принципово нове. На-
віть класичної спадщини вистачить на велику бібліо-
теку.

За ступенем складності криптограми можна поді-
лити на відкриті й закриті. У відкритих криптограмах
розв'язання частково підказується самою умовою зада-
чі або її формою. У закритих — жодної підказки.

Найпростіший вид відкритих криптограм — це так
звані підстановкові криптограми. У такій криптограмі
кожній літері алфавіту ставиться у відповідність певний
символ (можливо, й літера) і при кодуванні кожну літе-
ру позначають відповідним символом. Так, в украї-
ському алфавіті 32 літери. Якщо їх занумерувати в при-
родному порядку — А — 1, Б — 2, ... Ь — 32, то от-
римані 32 числа й дають можливість складати найпрості-
ші криптограми. Вважатимемо, що числа, сполучені
знаком тире, скрізь означають одне слово. Тоді відомі
українські приказки будуть закодовані таким чином:

1. 14—17—10—8—14—1 16—18—3—27—14—10
3—21—6 30—18—9—14—1—8—6.

2. 19—20—1—3—5—1 14—20—10—3—5—23
19—6—20—6 3—1—8—10—22—32.

3. У захоплюючому оповіданні Е. По «Золотий жук»
Легран, людина логічного складу розуму, на випадково
нагрітому аркуші пергаменту виявив зображення черепа
козеняти і рядки таємничих знаків. Він здогадався,
що перед ним написана симпатичним чорнилом крипто-
грама пірата Кідда (від лат. *kidd* — козеня).

Криптограма Кідда належала до виду підстановко-
вих, тобто до найпростіших. Складаючи таку крипто-
граму, кожній літері алфавіту ставлять у відповідність
певний символ (можна й літеру) і при кодуванні кожну
літеру замінюють відповідним символом-кодом.

Легран помітив, що не всі знаки з однаковою часто-
тою зустрічаються в тайнопису. Він знав також частоту
використання літер англійської мови. Саме це й допо-
могло йому розшифрувати криптограму. Давши можли-
вість читачам про деталі пошуку Леграна дізнатися з
оригіналу, пропонуємо аналогічне завдання. Зрозуміло,
ніяких скарбів воно не приховує. Це лише відомий лист
Тома Сойєра з повісті Марка Твена «Пригоди Тома Сой-
єра» (мал. 6.1).

Ключем до розшифрування тексту буде закон від-
носної частоти літер українського алфавіту. Як видно з
таблиці, найчастіша літера української мови «о». Її
відносна частота дорівнює 0,094. Це означає, що на
1000 літер українського тексту випадає в середньому
94 літери «о». Так само тлумачиться частота інших лі-
тер.

Літера	Частота	Літера	Частота
А	0,072	О	0,094
Б	0,017	П	0,029
В	0,052	Р	0,047
Г	0,016	С	0,041
Д	0,035	Т	0,055
Е	0,017	У	0,04
Є	0,008	Ф	0,001
Ж	0,009	Х	0,012
З	0,023	Ц	0,006
И	0,061	Ч	0,018
І	0,057	Ш	0,012
Ї	0,006	Щ	0,001
Й	0,008	Ю	0,004
К	0,035	Я	0,029
Л	0,036	Ь	0,029
М	0,031	Пробіл	0,17
Н	0,065		

4. Якщо текст криптограми невеликий, необхідно
володіти ключем для її розшифрування. У наступному
завданні він додається й допоможе прочитати висловлю-
вання про математику К. Е. Ціолковського (мал. 6.2).

Якщо позначити літери цифрами, то першим кроком
до ускладненого шифру буде позначення літер числа-
ми в спадному порядку: Ь—1, Я—2... Б — 31, А — 32.
Наступним може бути кодування за правилом «плюс х».
Розглянемо криптограму 22—4—18—14. Звичайна під-
становка ($x + 0$) дає ТГОК. При $X = 1$ криптограма
перетворюється в 23—5—19—15 і їй відповідає набір
букв УДПЛ, при $x = 2, 3, 4, 5$ отримаємо відповідно
набори літер ФЕРМ, ХЄСН, ЦЖТО, ЧЗУП, і лише при
$x = 6$ криптограма 28—10—24—20 дає слово ШИФР.

5. Правило «плюс х» можна застосовувати й до
ускладнених нумерацій літер алфавіту. Але ми цього не

робитимемо. Досить, щоб читач за неускладненим правилом «плюс х» відгадав, назви яких геометричних фігур тут зашифровані: 1—9—3—18—19—7—16—12, 17—2—10—18—14—16, 16—8—17—30—13—8—2—30.

Перебираючи старовинні рукописи, інколи натрапляємо на незрозумілу абракадабру — хаотичні суміші старослов'янських та іншомовних літер або позбавлені змісту групи літер. Проте це зовсім не безглузді утворення. Траплялися події, про які дуже хотілося розповісти нащадкам або й зафіксувати їх для себе, але й водночас такі, що відкрито говорити про них було небезпечно. Адже записки могли потрапити до небажаних рук. Тоді й вдавалися до різних форм тайнопису — тарабарської грамоти. Саме так в одному літописі розповідається про те, що зісланий в монастир князь Хованський побив палицею ігумена. Щоб зафіксувати такі події, одні літери замінювали іншими, писали не всі, а лише деякі частини літер, використовували різні комбінації цифр. Останнє легко було робити, бо в старослов'янському алфавіті літери одночасно служили й цифрами. Замість літер використовували й інші знаки.

Історики доклали багато зусиль, щоб розкрити таємниці різних форм тарабарської грамоти. Адже вони могли приховувати розповіді про невідомі й дуже важливі події минулого. Деякі зразки тайнопису виявилися такими хитромудрими, що були розкриті лише зовсім недавно. Так, лише академік Б. О. Рибаков розшифрував тайнопис, зроблений ще в 1359 р. на так званому Людогощинському хресті. (Див.: Рыбаков Б. А. Из истории культуры Древней Руси. М., МГУ, 1984, с. 50).

Тарабарською грамотою як шифром користувалися в таємному листуванні російські дипломати і старообрядці. Зразок такого таємного листування старообрядців використав російський письменник П. І. Мельников (Андрій Печерський) у романі «В лесах» (книга вторая. М., ГИХЛ, 1955, с. 20).

Як бачимо, тарабарська грамота включає як окремі варіанти підстановкові так і інші форми тайнопису.

Не злічити ситуацій, коли виникає потреба засекретити від непосвячених деяку інформацію або розшифрувати її зміст в явищах навколишнього світу, пам'ятках культури. Згадаймо хоч би зашифрований епізод у романі О. С. Пушкіна «Евгений Онегин»:

Татьяна пред окном стояла,
На стекла хладные дыша,
Задумавшись, моя душа,
Прелестным пальчиком писала
На отуманенном стекле
Заветный вензель О и Е.

Вензель (від польс. *węzel* — вузол) — то теж шифр, за допомогою якого художньо написані ініціали утворюють візерунок, зрозумілий тільки автору. Зрозуміло, що ми можемо запропонувати найпростіші варіанти криптограм.

6. Розшифруйте криптограму з повісті «Контрабандисти» сучасного індійського письменника Раджешкумара Джайна:

«Ч ар ри ле та ми ни о са та ку лі єм ок пир ної оск тук гру шам мі пи 1 : 3
по кра уч ві сам сот дом кор кум ляє рос іка мо 1 : 3
що ро ар сьо пі фор год ор ви ні або 7 10 5 3 1 : 3
ве ра ро чо ко кі ра оу за з ах хо бір скр 1 : 3
тр пр гр е кс кл ба про пар при сня вно йня кри ста ти 1 : 3
тер цор кар жро мін вак абе стр ове прт ла пта рі кап
сот рит шен мя ру ли ня сь 1 : 4
не на за ну бу ся дь кі те фо па ст ро фр ль ет і кр же мі то ск ни го 1 : 2».

7. Великий норвезький математик Н. Х. Абель (1802—1829) дату написання одного свого листа подав за допомогою такої криптограми: $\sqrt[3]{6064321219}$. Потрібно добре поміркувати, щоб видобути з неї число дня, місяця і року написання листа.

8. Розшифруйте звернення-пересторогу Леонардо да Вінчі до своїх читачів (мал. 6.3).

9. У повісті Ф. Вігдорової «Дорога в життя» розповідається про одне засідання ради дитячого будинку, протокол якого вів вихованець Андрій Репін. Протокол виявився записаний незрозумілою тарабарщиною:

«Узрачичи: бевлий хасщ левсує бо їтачьщі, тгурий бо трогу, дгедій бо гзотаз».

Завідуючий дитячим будинком легко розгадав шифр жартівника. То була відома ще за часів Київської Русі проста літорея, на відміну від мудрої літореї — шифру складнішого. Проста літорея — різновид тарабарської грамоти. Якщо 32 літери українського алфавіту записати в два рядки — по шістнадцять в кожному:

А Б В Г Д Е Є Ж З И І Ї Й К Л М
Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ю Я Ь,

то виходить найпростіший код. Стародавні тайнописці на Русі користувалися часто найпростішим способом підміни літер верхнього рядка відповідними літерами нижнього і навпаки. Тоді слово КРИПТОГРАМА подається як ЮГЦВЕБРГНЬН. Складаючи шифрований ключ, Рєпін ще більше спростив просту літорею. А яким же був його шифрувальний ключ і як розшифровується наведений вище уривок з протоколу?

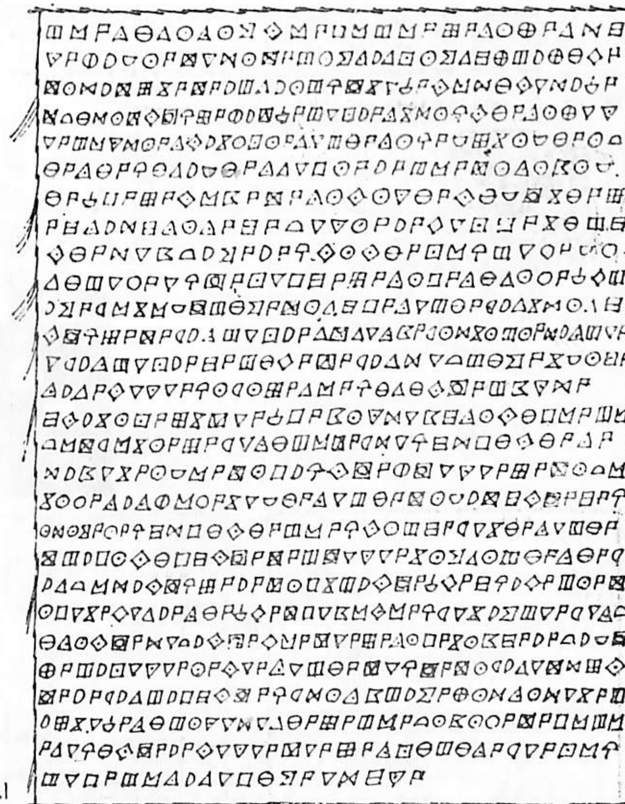
10. У пригодницькій повісті А. Рибакова «Кортик» розповідається, як троє друзів, розгадуючи зміст таємничих знаків на кортику, натрапили на слід небезпечних злочинців і допомогли їх викрити. Таємничі знаки виявилися знаками мудрої літореї. Алфавіт (можливо, не весь) розбивали на три групи, по десять літер у кожній. Літери першого десятка позначали точками: а — ·, б — :, в — ⋮ і т. д., літери другого десятка — відповідною кількістю рисок: і — —, ї — =, й — ≡ і т. д., літери третього десятка — кружечками. Текст, зашифрований у такий спосіб, розділяли по горизонталі на дві рівні частини, які належало зберігати нарізно. Розшифрувати записаний мудрою літореєю текст можна було, лише маючи обидві половинки шифру.

Для сучасного українського алфавіту можна складати одинадцятизначну літорею, а ряди шифру ділити у відношенні 6 : 5 або 5 : 6.

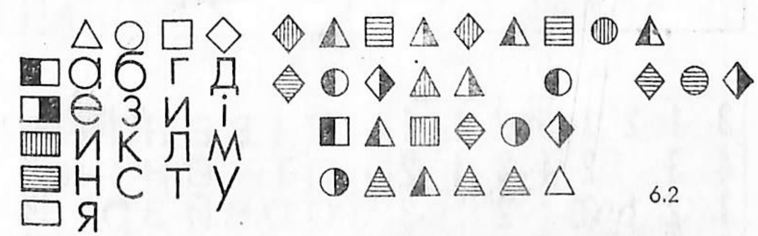
Часто вдається розшифрувати мудру літорею і за допомогою лише однієї її частини. Можливо, й ви прочитаєте українську приказку лише за однією частиною шифру (мал. 6.4). (З двома частинами задача стає тривіальною).

11. Роман Жюля Верна «Матіас Шандор» розпочинається з драматичних подій. Угорські патріоти, які готують повстання, ведуть таємне листування. Їхні вороги перехоплюють шифровку патріотів (текст подано за російським виданням твору письменника):

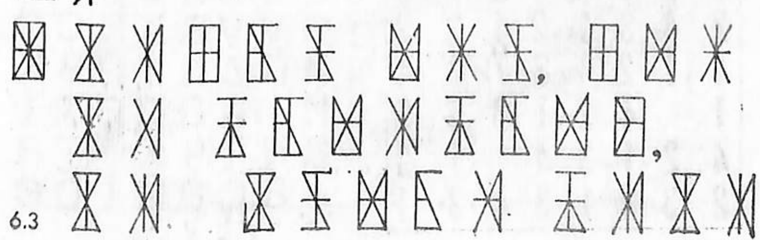
+ ЭЦИФНУ	ИСИТЧУ	ОЕХИВО
СИГДКН	ЫУЕЛМС	ИОЕТТЖ
ОИШЕВК	+ОНИВВП	ОШЗЯОГ
ВЭААНЬ	ЛНАОДА	РИЕВЙО
КЗТЯСИ	ТЛНСГО	СМПЬСИ
ЕОНРАМ	СИУПВС	ЕАДНЖР +



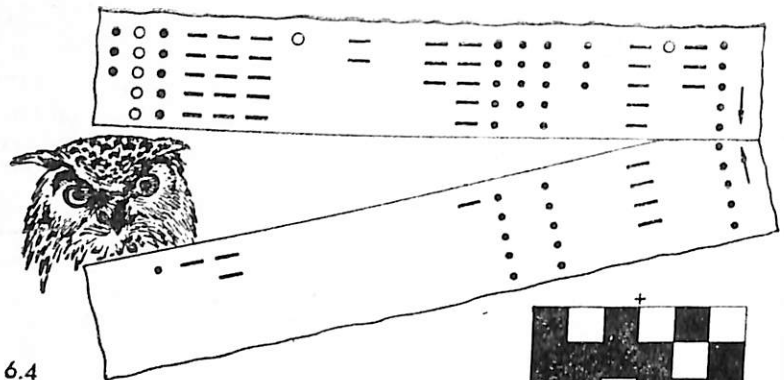
6.1



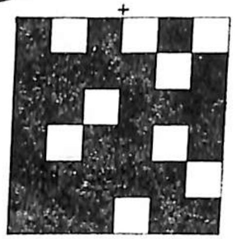
6.2



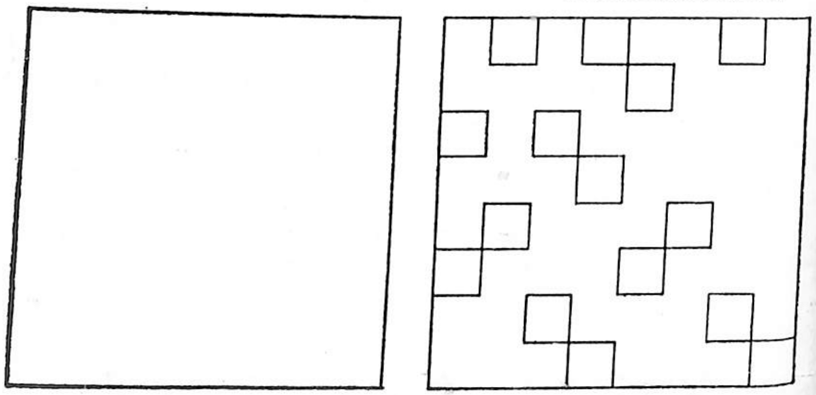
6.3



6.4



6.5



6.6

3	1	2	1	3	2	1	4
4	3		2	1	3	4	2
1	2	1	3	4	2		3
2	4	3	1	2	4	3	2
4	1	2	4	3	1	2	4
1		4	2	1	3	4	3
4	2	1	3	4		1	2
2	3	4	1	3	4	3	1

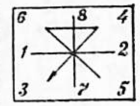
ц	і	в	в	я	і	а	і
л	т		в	н	і	я	т
о	о	в	й	з	р		з
о	у	у	а	к	п	с	о
и	п	д	н	т	р	в	к
и		й	а	л	р	т	і
а	н	і	ч	к		т	а
д	а	с	а	й	і	б	є

	1	2	3	4	5
1	а	б	в	г	д
2	е	є	ж	з	и
3	і	ї	й	к	л
4	м	н	о	п	р
5	с	т	у	ф	х
6	ц	ч	ш	щ	ю
7	я	ь			

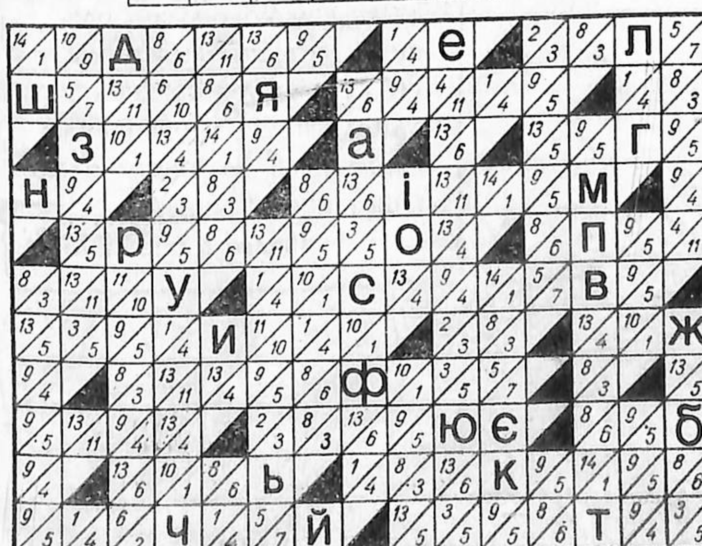
43 34 32 24 52 33 51 12 24 27 37 31
17 43 52 33 31 52 24 12 44 34 44 34
31 24 52 53 52 15 31 34 22 23 34 15
31 13 25 52 37 55 34 26 11 21 14 11
53 12 24 27 43 52 14 37 11 53 12 24
34 31 52 14 51 53 17 31 11 15 43 35
15 43. 34 14 42 24 11 24 27 47 31 31
11 32 11 33 25 12. 21 12 42 44 54 13
51 24 34 13 21 12 42 44 34 31 34 54
34 25 24 34 51 53 17 15 12 21 12 31
25 54 11 26 12 24 52 14 57

6.7

кор	ят	зн	а	хн	і
ись	під	ють	які	на,	те
е	х	в	мі	а	май
н	т	ють	і	бут	ік
-ск	лад	ше	лю	на	бу-
на	нього	дям	ми	де	во



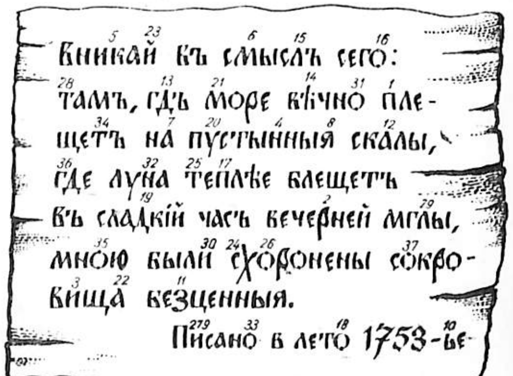
6.8



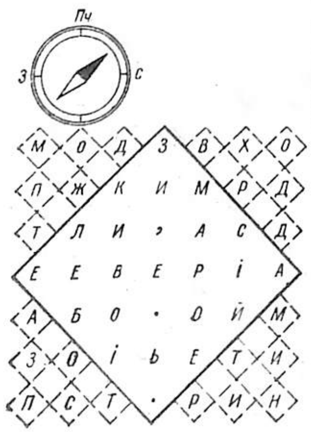
6.9

у	м	т	р	о	х	х	·	з	в	о	в	·	в	н	т	р
х	е	с	и	й	і	р	щ	и	у	к	и	и	к	о	л	о
а	н	і	р	·	в	а	о	ч	й	с	й	м	р	о	і	й
ц	а	з	п	в	а	д	а	б	и	и	г	і	д	н	б	о
і	о	б	н	я	в	і	в	о	л	а	н	в	т	е	л	і
ї	р	і	н	а	н	д	т	і	т	л	п	а	р	м	у	к
а	т	т	а	х	и	а	о	в	с	ь	р	а	р	а	р	о
н	с	·	з	т	с	л	м	а	т	т	и	п	і	н	о	б
ц	и	д	і	у	о	б	н	ч	и	ю	в	х	и	н	т	и
і	ї	н	в	і	с	н	о	и	л	а	і	д	л	е	б	о
е	к	о	о	ц	е	а	д	с	т	ц	л	о	н	н	л	а
р	у	м	р	п	ї	і	ц	а	в	и	я	п	я	а	н	д
у	н	н	е	х	а	п	а	з	и	н	г	а	в	м	а	т
в	а	і	м	а	з	р	о	а	т	б	а	е	т	о	з	и
и	м	а	м	н	і	р	г	м	о	о	р	и	і	ц	а	
і	р	а	з	і	н	а	ю	·	т	г	о	в	я			
у	п	б	л	і	н	м	о	а	в	о	ь	с	в			

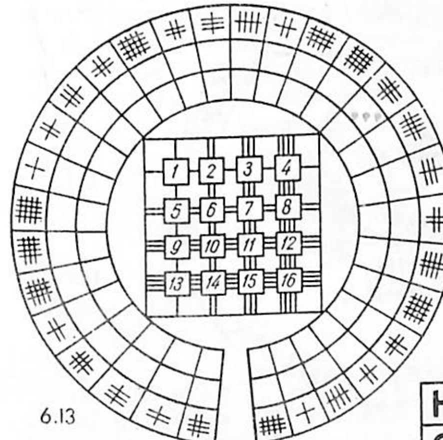
6.10


Вникай въ смыслъ сего:
тамъ, гдѣ море вѣчно пле-
щетъ на пустынныя скалы,
гдѣ луна теплѣе блещетъ
въ сладкій часъ вечерней мглы,
мною были схоронены сокро-
вища безценныя.
Писано в лето 1753-ье

6.11



6.12



6.13

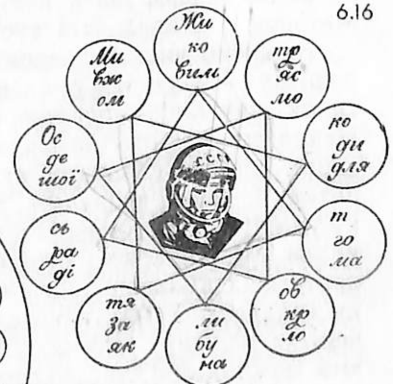
Х	П	С	Д	В	М	И
І	И	І	О	Т	И	В
О	Я	К	Т	О	С	И
І	О	Н		Ь	Е	Н
Л	Д	Л	И	·	Л	Я
Д	Т	Т	І	И	И	Д
Ь	Ш	,	-	У	Ч	К

6.15

Н	О	Т	!	К	У	Д,	С
О	Ь	У	З	С	А	О	Т
В	А	Р	Т	К	А	М	Н
Т	Я	·	З	Е	И	У	Р
В	О	А	Н	Н	К	О	М
В	Н	Е	В	М,	Я	Ь	І
Р	О	М	И	В	Ю	С	Л
І	Ч	О	Ю	У	С	Н	Т

6.16

6.14



6.18

6.17

6.19

Вони прочитали її, коли здобули решітку для розшифрування тайнопису (мал. 6.5).

Жюль Верн у кількох своїх творах використав різні способи криптографії. У романі «Матіас Шандор» він звернувся до винаходу італійського математика і різностороннього вченого Джероламо Кардано (1501 — 1576) — решітки Кардано. У шифрувальній справі решітку Кардано широко використовували дипломати, починаючи з XVI—XVII ст., діючи таким чином. Нехай потрібно зашифрувати повідомлення «Іванова прилітає вівторок о дванадцятій зустрічай біля зупинки таксі».

Візьмемо чистий квадрат 8×8 і такого ж розміру решітку — квадрат, у якому п'ятнадцать деяких клітинок вирізані — перетворені у віконця (мал. 6.6). Накладемо решітку на чистий квадрат і впишемо у клітинки чистого квадрата, які припадуть на віконця решітки, перші п'ятнадцать літер шифровки. На малюнку ці клітинки позначені цифрою 1. Повернувши решітку за годинниковою стрілкою на 90°, помічаємо, що проти всіх віконець тепер виявилися нові чисті клітинки квадрата. У них вписуємо наступні 15 літер (позначені на малюнку цифрою 2). Наступні два повороти дають можливість вписати третю й четверту групи літер. У вільні чотири клітинки можна вписати будь-які літери, і шифрограма готова. Справді, без решітки в отриманому лабіринті літер дуже важко знайти замасковану інформацію. Математики розробили точні вказівки — які саме клітинки квадрата можна вирізати, щоб отримана решітка годилася для шифрування. Варіантів

конструювання решіток надзвичайно багато. З квадрата 8×8 їх можна виготовити понад 4 мільярди. Зрозуміло, що шифрування за допомогою решітки Кардано часто супроводжується й додатковими ускладненнями. Так, за допомогою викраденої решітки шифровка угорських патріотів перетворилася на нову, яку знову потрібно було розшифрувати:

ц ф у к ш э н и р	с т у м и н д о п	е и р т з и й и н
г н е в ь т с о м	е с в л а н г и с	е ж я р о п с а р
и с и в а з е н а	й ы а в о л с у в	х и ш а в м е д ж
з н и д о к а к я	и ч у л о п а т с	о в о т о г е с в

Що там було записано?

12. Таємним листуванням широко користувалися й вітчизняні революціонери-підпільники у нашій країні.

Якось керівник міської підпільної організації більшовиків отримав з центру термінову шифровку. Користуючись відомою уже решіткою Кардано, прочитайте, який наказ він отримав (російською мовою).

о с в о л р б п
р и е а р ц ж й
а о н и д н и я
а е к е о н е т
а д м а м е е н
л т т н е о о п
н и г р а т о е
п е б т д е у о

Знайомства з деякими найпростішими методами тайнопису і криптоаналізу цілком достатньо, щоб розв'язати завдання пропонованої криптографічної суміші.

13. Скориставшись запропонованим ключем, прочитайте висловлювання К. С. Станіславського (мал. 6.7).

14. Запропонований ключ допоможе прочитати уривок із звернення академіка П. М. Лебедева до школярів, що й сьогодні залишається актуальним (мал. 6.8).

15. Підберіть ключ і розшифруйте відомий вислів К. Е. Ціолковського (мал. 6.9).

16. Читати тайнопис треба по окремих лініях, які повинні бути неперервними і не повинні мати спільних точок. Двічі до одного квадратика звертатися не треба (мал. 6.10).

Виконавши ці умови, прочитайте, у чому полягає суть автоматизації виробництва.

17. Наступне завдання продовжує космічну тему, хоча й у фантастичному ракурсі.

Проблему зв'язку з позаземними цивілізаціями коротко називають СЕТІ, за першими буквами англійських слів *Communication with Extraterrestrial Intelligence* – зв'язок з позаземним розумом. У дні роботи однієї з міжнародних конференцій за програмою СЕТІ астрономи отримали з космосу сигнали. Вони складалися з п'яти послідовних серій імпульсів. Числа в кожній серії є відстанями між імпульсами (виміряні в частках тривалості одного імпульсу, тобто $t/\Delta t$).

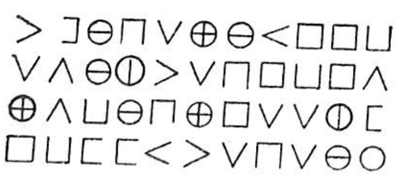
Оскільки в кожній послідовності повторювалася одна й та сама серія імпульсів, учені зрозуміли, що досить узяти з кожної послідовності по одній серії імпульсів, щоб отримати всю інформацію від позаземного розуму. Вони дістали таку серію імпульсів:

7645
4361
4553
4361
7625

Що передавав позаземний розум?

18. Знаками закодовані цифри й знаки +, —, =. Кожний рядок шифровки містить одну з арифметичних дій типу: $25 + 184 = 209$ або $2568 = 2573 - 5$.

Розшифруйте числові рівності:



19. Тут кожний рядок літер шифрує один арифметичний приклад (додавання, віднімання, множення або ділення).

А Р И Ф М Е Т И К А
А А А Б Т Е М Н Н Ш
О С У М О М Е У А А
К Т Р М И Е М С Н Н
С О Л И П Ш В И И К

Літерами зашифровані також знаки арифметичних дій: +, —, ×, : і знак рівності. Розшифровуючи приклади, враховуйте, що однакові літери скрізь потрібно розшифровувати однаковими знаками, різні літери — різними знаками.

20. Туристи знайшли в печері пожовклу від часу грамоту з текстом загадкового змісту (мал. 6.11).

— Оце знахідка!— вигукнув один.— Вважайте, що ми натрапили на старовинний скарб.

Майже всі погодилися з ним. Лише один, прочитавши текст, розсміявся.

— Дурниці!— сказав він.— Очевидна підробка.

Його не послухали. Вирішивши, що числа над літерами вказують точніше місцезнаходження скарбу, туристи зайнялися розшифруванням тайнопису. Великих труднощів це не становило, у чому, дещо поміркувавши, може переконатися кожний. Але висловлювання, прочитане таким чином, хоча й містило корисну пораду, не надихало на подальший пошук обіцяного скарбу.

Який текст зашифрований у згаданій грамоті і що змусило одного з туристів відразу піддати сумніву достовірність документа?

21. Командир третього загону військової гри «Зірниця» отримав від розвідників загону шифровку (мал. 6.12). Про що повідомляли в ній розвідники?

22. Верхня смуга дуги заповнена знаками, якими закодовані числа квадратної таблиці (мал. 6.13). Якщо вписати їх у клітинки середньої смуги, то отримаємо цифрову криптограму. Її можна розгадати за допомогою чотирьох ключових слів. Вони закодовані тими самими числами:

1. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 3, 2 — опера Дж. Верді.
2. 7, 8, 9, 10 — комедія В. В. Маяковського.
3. 11, 12, 8 — річка в Африці.
4. 13, 11, 7, 9, 2 — молодий дописувач у газету.

Знайшовши їх, легко прочитати українську приказку.

23. До розвідників першого загону гри «Зірниця» потрапила шифровка командира другого загону (мал. 6.14). У математичному гуртку він вивчав магічні квадрати і використав їхні властивості в своєму таємному листі. Його можна прочитати лише тоді, коли переставити кубики так, що числа, записані на верхніх гранях, утворять магічний квадрат п'ятого порядку. Що було записано в листі?

24. Обійшовши ходом коня всі клітинки цієї шахівниці 7×7, прочитайте висловлювання Ж. Ж. Руссо про складність шляху до істини (мал. 6.15).

25. Ніхто не знає, скількома різними способами можна обійти ходом коня всі клітинки шахівниці 8×8. Лише один різновид маршрутів нараховує близько мільйона. Отже, шахівниця — невичерпна схованка криптограм, яких вистачить на мільйони років занять шанувальників головоломок. Ми висловлювання двох визначних вітчизняних полководців зашифрували замкненим ходом, знайденим у 1759 р. Л. Ейлером (мал. 6.16). Цей маршрут цікавий тим, що він спочатку пролягає по нижній частині шахівниці, а потім переходить на верхню. Початок маршруту позначений великою літерою. Хто ж і що говорив?

26. Напевне, найкраще про значення для людини вивчення математики сказав М. В. Ломоносов (мал. 6.17). Розшифруйте цю криптограму і переконаєтеся, що краще й справді не скажеш.

27. Прочитайте висловлювання Ю. О. Гагаріна про Миколу Островського (мал. 6.18).

28. Праця над головоломками виявилася не такою вже й легкою, але радісною справою. Так буває завжди, якщо заняття припадає до душі. Афоризм В. Шекспіра на цю тему прочитаєте, якщо дешифруєте останню криптограму нашої суміші (мал. 6.19).

ВИКОРИСТАНА ТА РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Литцман В. Где ошибка? М. : Физматгиз, 1963.

Литцман В. Веселое и занимательное о числах и фигурах. М.: Физматгиз, 1963.

Лойд Сэм. Математическая мозаика. М. : Мир, 1984.

Мочалов Л. П. Головоломки. М. : Наука, 1980.

Нагибин Ф. Ф., Канин Е. С. Математическая шкатулка. М. : Просвещение, 1988.

Олехник С. Н., Нестеренко Ю. В., Потапов М. К. Старинные занимательные задачи. М. : Наука, 1985.

Оре О. Приглашение в теорию чисел. М. : Наука, 1980.

7

Досвідчене око бачить глибоко

Математику й письменство інколи ставлять на протилежних полюсах людського знання. Проте мости між літературою й точними науками ніколи не були розведеними. Бо не можна відділити людський інтелект від емоцій. І холодні формули не ізольовані від гарячого випромінювання людських почуттів. «Дедалі мистецтво стає науковим, а наука — художньою; розлучившись біля підніжжя, вони зустрінуться коли-небудь на вершині»,— сказав Г. Флобер.

З різних причин математика проникала в літературу, навіть тому, що осягнення драматичного змісту життя потребувало його логічного впорядкування. І тут, зрозуміло, йдеться зовсім не про математизацію літератури. Сьогодні як жарт розповідають про претензію англійського математика, творця прообразу сучасної ЕОМ Чарлза Беббеджа (1792—1871) до свого земляка поета Теннісона. Коли Теннісон опублікував поему «Видіння гріха», Беббедж надіслав йому листа такого змісту: «Пане, у вашій поемі є такі рядки:

Кожної миті народжується людина,
Кожної миті вмирає людина.

Це не точно, оскільки приріст населення земної кулі збільшується. Я раджу вам виправити вашу поему й записати так:

Кожної миті вмирає людина,
Кожної миті народжується 1 і 1/6 людини.

Насправді потрібно було б вмістити складніший дріб, але нехай і так — для поезії згодиться й ця цифра».

Разом з тим кузен Жюля Верна математик Анрі Гарсе зробив на його прохання обчислення для його роману «Із Землі на Місяць», які обгрунтовували можливість міжпланетної подорожі, якщо відразу снаряду буде надано початкової швидкості 11 км/сек. Математичні викладки внесені в текст роману.

Цей приклад не виняток у красному письменстві. Та хіба може бути інакше? Адже розв'язування задач — основа всього нашого існування. Великі й малі, вони атакують нас щоденно, щогодинно. Деякі з них прості, деякі нерозв'язувані в принципі, але майже всі належать до компетенції математики.

Шерлок Холмс не стільки шукав злочинців, скільки обчислював їх за допомогою логічного аналізу наявних, як правило, досить незначних фактів.

Вивчення математики в школі часто залишає сліди на все життя. І не завжди приємні. В «Автобіографії», відомому творі класика сербської літератури Бранислава Нушича, першому коханню відведено 7 сторінок, а шкільній математиці — 12.

Здавна побутує в літературі й жанр математичної пародії. Ще Арістофан у комедії «Птахи» подає діалог між учнем-землеміром Метоном і афінянином Пісфетором, у якому землемір за допомогою циркуля та лінійки нахваляється здійснити квадратуру круга, тобто розв'язати одну з найвідоміших геометричних задач давнини. До математичних пародій належать і «Задачі божевільного професора» А. П. Чехова, «Паралелепіпед» і «Як полювати на тигра» Остапа Вишні — класичні зразки цього жанру, якому притаманне несподіване, цікаве й дотепне використання математичних понять та методів.

Наведеними далі прикладами освоєних письменниками островів безмежного океану математики прагнемо рівною мірою привернути увагу читачів до математики і до літератури — двох могутніх знарядь пізнання і перетворення навколишнього світу, частиною якого є й сама людина.

Почнемо з часів майже апокрифічних. У IV ст. жив грецький епіграміст, автор праць з географії й астрономії Метродор. В історію математики й математичних головоломок він ввійшов як автор понад 30 цікавих задач, складених у віршованій формі. Задачі Метродора входили в рукописні збірники і в свій час були дуже поширеними. Дві епіграми із спадщини Метродора в перекладі українською мовою І. Я. Франка і відкривають цей розділ.

1. Зрабовані яблука

Ероса, що надійшов раз сумний, запитала Кіпріда:
«Що за жура долягла тобі, сину?» Він відповідає:
«Кинулись, наче шалені, усі музи на мене й забрали
Яблука, що я приніс у поділку аж із Гелікону.
Кліо взяла п'яту частину,
а дванадцяту вмкнула Евтерпе,
Восьму Талія взяла преподібна, а двадцяту тут же
Хап Мельпомена, а дрянь Терпсіхора четвертую вкрала.

Сьому захопила часть собі, знать, на придане Ерато,
А Полігімнія, бач, захарпачила яблучок тридцять.
Сто двадцять Уранія ще заграбала, а обтяжена
Страшенно Калліпа йшла, навантаживши яблучок триста.

Ось я додому прийшов, ади, майже з пустими руками,
Бо яблук лиш п'ятдесят мені всього лишили богині».

Скільки яблук ніс Ерос і скільки з них забрала кожна з богинь?

2. Учні Піфагора

«Піфагоре благородний,
Геліконських муз потомку,
На моє скажи питання,
Скільки учеників годних
Маєш ти у своїм домі,
Що, немов борці на площі,
Раді премії добиться?»
«Радо скажу, Полікрате.
Бачиш, учнів половина
Математику зглубляє,
А натомість четвертина
На безсмертную природу
Свої досліди звертає.
Сьома часть ніщо не робить,
Лиш заховує мовчання,
Лиш моє у душах своїх,
Знай, ховаючи мовчання.
Ще додай до них три жінки,
Що встають не дуже рано,—
Серед них найвизначніша
Моя любая Теано.
Ось і всі, яких по змозі
Я до мудрості доводжу,—
Може, муз їм пієрійських
Позискаю ласку божу».

Скільки ж учнів у Піфагора?

3. Коли Санчо Панса вступав на високу посаду губернатора острова Бараторія, він заприсягнувся дотримувати всіх законів. Скоро його попросили порадити, як можна виконати один дуже дивний закон у не дуже дивній ситуації.

Річка поділяє маєток на дві частини. Через річку перекинуто міст, тут же, скраю, стоїть шибениця і постійно засідає щось на зразок суду, який діє на основі суворого закону власника маєтку. Кожен, хто приходить до мосту, зобов'язаний сказати, куди й чого він іде. Хто скаже правду, наказано відпускати, того ж, хто збреше,— карати без усякої поблажливості. За час дії закону багато людей пройшло по мосту, говорили правду і простували далі в своїх справах. Та якось один пішохід заявив суду, що пройшов тільки тому, щоб його скарали на шибениці, яка стоїть поруч. Слова пішохода збентежили суддів. Якщо дозволити йому без перешкод іти далі, то це означатиме, що він сказав неправду і заслуговує покарання; якщо ж його скарати, то, оскільки він і казав, що прийшов саме тому, щоб його скарали, пішохода згідно із законом необхідно відпустити.

Санчо Панса вважав, що в пішохода-дивака стільки ж шансів умерти, скільки й лишитися живим. Отже, є однакові підстави, щоб його скарати і виправдати. Оскільки ж робити добро завжди правильніше, ніж зло, то дивака варто відпустити. Чи буде при цьому дотримано закону власника помістя?

Класик грузинської літератури Сулхан-Саба Орбеліані (1658—1725) був молодшим сучасником Сервантеса. Книга «Мудрість вимислу», яка обезсмертила ім'я автора, складена із притч, об'єднаних фабулою і підпорядкованих одній головній ідеї — засудженню різних пороків, невігластва і жорстокості, оцінці різних аспектів поведінки людей.

Вміщені в «Мудрості вимислу» й цікаві задачі, які й сьогодні служать надійним знаряддям тренування кмітливості і винахідливості

Наведемо деякі з них.

4. Вовк, коза та сіно.

Я перекину вузький місток, а ти переправ через нього поодинці на інший берег вовка, козу й в'язку сіна, але так, щоб вовк не розірвав козу і коза не з'їла сіно.

5. Троє незнайомих людей зустрілися на березі великої річки. З кожним була його дружина. Біля річки вони знайшли лише одного маленького човника, який міг вмістити тільки двох осіб.

Отже, перевези усіх шістьох через річку так, щоб жодний мужчина не залишився в човні з дружиною іншого.

6. Поділ кіз.

Прийшли якось до царя три брати із скаргою. Вони вирішили жити нарізно і поділити між собою все, крім кіз, бо щодо них ніяк не могли домовитися.

Доповіли вони царю про ці кози таке:

— В десяти з цих тридцяти кіз по козеняті, ще в десяти — по двоє козенят, у решти десяти — по троє. Ми хочемо поділити їх так, щоб жодному з братів не дісталося більше, ніж іншим, і щоб не відбирати жодного козеняти в матки.

Що порадити братам?

7. І. А. Крилов у байці «Бідний багач» розповів таку історію.

До бідняка з'явився чорт і подарував йому чарівний гаманець з одним червінцем усередині. Як тільки з гаманця виймали червінець, у ньому з'являвся другий. Бідняк міг вийняти з гаманця скільки завгодно червінців з однією лише умовою: перш ніж почати витрачати їх, він повинен був кинути в річку гаманець.

Бідняком оволоділа жадібність. Він діставав з гаманця червінець за червінцем.

...Проходит день, неделя, месяц, год...
Но чуть лишь день, а он опять за ту ж работу...
Бедняк мой похудел...
Он стал и слаб и хил...
И чем же кончил он?
На лавке, где своим богатством любовался,
На той же лавке он скончался,
Досчитывая свой девятый миллион.

Скільки часу могла тривати така історія?

Сучасники М. Ю. Лермонтова, які близько знали його, розповіли про математичні захоплення поета. Так, О. О. Лопухін, товариш Лермонтова по кавалерійському училищу, писав, що одного разу, приїхавши до нього в Москву, Лермонтов замкнувся в кабінеті і до пізньої ночі розв'язував якусь математичну задачу

Не розв'язавши її, змучений поет заснув. Задачу він розв'язував уві сні. Йому приснилося, що прийшов якийсь математик і підказав йому розв'язання задачі.

Поет успішно демонстрував свою математичну вправність і в зовсім несподіваних ситуаціях.

8. На початку 1841 р. Тенгінський полк стояв у Анапі. Нудьгуючі офіцери, серед них і Лермонтов, збиралися один в одного. Якось мова зайшла про вченого кардинала, який міг розв'язувати в думці найскладніші математичні задачі.

— Що ви скажете на це, Лермонтов?— звернувся до поета поважний командир, старий батальйонний з Георгієм.— Кажуть, ви теж добрий математик?

— Нічого тут дивного немає,—відповів поет.— Я теж можу продемонструвати вам, якщо хочете, дуже цікавий приклад математичних обчислень.

— Будь ласка.

— Задумайте яке завгодно число, і я за допомогою простих арифметичних дій визначу це число.

— Ну що ж, спробуйте,— розсміявся старий, який, мабуть, відчув сумнів.— Але яке ж велике має бути задумане число?

— А це вже байдуже. Та на перший раз, щоб швидше обчислювати, обмежимося числом з двох цифр...

Поет запропонував батальйонному додати до задуманого числа 25, потім ще 125, від суми відняти 37 і задумане число, різницю помножити на 5, добуток поділити на 2 і назвав остаточний результат: $282\frac{1}{2}$.

Командир аж підскочив від здивування, назвавши поета ворожбитом.

— Ворожбит не ворожбит, а математику вивчав,— усміхнувся Лермонтов.

Старий ще раз випробував математичний хист Лермонтова. Після цього, де б поет не з'являвся, до нього зверталися з проханням відгадати задумане число. Через кілька днів, коли замовлення набридли поету, він розкрив таємницю своєї математичної ворожби. У чому полягала ця таємниця?

9. У романі М. Є. Салтикова-Щедріна «Пани Головльови» читаємо: «Сьома година вечора. Порфирій Володимирович встиг уже виспатися після обіду і сидить у себе в кабінеті, списуючи цифровими викладками аркуші паперу. Цього разу його цікавить питання, скільки було б у нього грошей, якби матуся Орина Петрівна подаровані йому при народженні дідусем Петром Івановичем на зубок сто карбованців асигнаціями не привласнила собі, а поклала вкладом у ломбард на ім'я малолітнього Порфирія? Виходить, однак, небагато: вісімсот карбованців». У романі немає жодної вказівки на вік одіозного героя тоді, коли він робив підрахунки. І все ж, припустивши, що йому близько 50 років, обчисліть, скільки процентів річних платив ломбард у той час.

Із задач Л. М. Толстого.

10. Дві селянки продавали яблука, кожна по 30 штук. Перша продавала за 1 коп. 2 штуки, друга за 1 коп 3 штуки. Перша вторгувала 15 коп., друга — 10 коп. Якось інша селянка не змогла піти продавати свої яблука і попросила першу продати її яблука. Та продала 5 яблук за 2 коп, адже сама вона продавала за 1 коп. 2 штуки, а її сусідка за 1 коп. 3 штуки. Розбивши всі 60 яблук на купки по 5 штук, перша селянка й продавала всі 12 купок по 2 коп. кожна. Вторгувала вона 24 коп., а мала вторгувати 25. Куди поділася 1 коп?.

11. Артіль косарів мала скосити дві луки, з яких перша вдвічі більша за другу. Половину дня всі косарі косили першу луку. Після обіду артіль розділилася на дві рівні групи Перша група залишилася на більшій луці й викосила її до вечора. Друга група косила до вечора меншу луку, але на ній залишилася ділянка, яку наступного дня один косар викосив за день. Скільки косарів було в артілі?

12. На протилежних стінах кімнати певної довжини й ширини сидять муха й павук. Муха перебуває за півтора аршина від підлоги, павук за півтора аршина від стелі. Знайти найкоротшу відстань між ними.

13. Багато цікавих задач Л. М. Толстой пропонував гостям. Так, одного разу, коли всі сіли за стіл (було 20 чоловік), а Софія Андріївна затрималася — то їм було запропоновано відповісти на запитання: чи встигнуть усі, хто сидить за столом до її приходу, міняючись місцем із своїм сусідом, побувати на всіх можливих комбінаціях розміщень за столом. Деякі думали дослідом розв'язати цю задачу, але Толстой сказав, що на це потрібно понад 72 мільярди років, якщо на кожне пересідання витрачати 1 секунду. Усі були здивовані, а більшість не дуже повірили, що це пов'язане з таким величезним часом.

4 — 8 281

Невістка Л. М. Толстого, яка пригадала цей епізод з яснополянського життя, називає число пересідань $\frac{20!}{60^2\cdot 24\cdot 365}$. Перевірте правильність такого результату і знайдіть тривалість цієї кількості пересідань.

14. Ось як, за спогадами сина письменника Сергія Львовича, вчив Лев Миколайович арифметики своїх і селянських дітей в яснополянській школі: «Таблицю множення він, Лев Миколайович, примушував нас вчити напам'ять лише до п'яти, а множення чисел від шести до дев'яти виконувати на пальцях таким чином: відняти від кожного співмножника число п'ять, різниці відкласти на пальцях обох рук, зігнувши їх, і додати зігнуті пальці — це будуть десятки добутку, інші незігнуті пальці перемножити й додати до десятків. Наприклад, нехай потрібно перемножити: 7×9. Віднімаючи по 5 від кожного співмножника, отримуємо 2 і 4. На одній руці загинаємо 2 пальці, на другій — 4. Сума їх — 6. Це десятки. Інші незігнуті пальці перемножуємо: $3 \times 1 = 3$. Отже, добуток $7 \times 9 = 63$». Доведіть правильність множення за способом Л. М. Толстого. Виявіть математичну неточність в описуванні цього способу Сергієм Львовичем.

15. А. П. Чехов в оповіданні «Репетитор» з тонким гумором описує безпорадність семикласника Зіберова перед відомою арифметичною задачею:

«Купець купив 138 арш. чорного і синього сукна за 540 крб. Питається, скільки аршинів купив він того й іншого, якщо синє коштувало 5 крб. за аршин, а чорне 3 крб.?» Уважно прочитавши оригінал, читачі зможуть відповісти й на таке запитання: як намагався розв'язати задачу на рахівниці «по-невченому» батько Петі?

16. Стендаль у «Автобіографії» розповідає про роки свого навчання таке: «Я знайшов у нього (вчителя математики) Ейлера і його задачу про число яєць, які селянка несла на базар... Це було для мене відкриттям. Я зрозумів, що означає користуватися таким знаряддям, яке називається алгеброю. Але... ніхто мені про це не говорив...» Ось ця задача Л. Ейлера з книжки «Вступ до алгебри», яка справила таке сильне враження на молодого Стендаля: «Дві селянки принесли на базар разом 100 яєць, одна більше, ніж друга: обидві вторгували однакові суми. Перша мовила тоді другій: «Коли б у мене були твої яйця, я вторгувала б 15 крейцерів». Друга відповіла: «А якби твої яйця були в мене, я вторгувала б за них $6^2/_3$ крейцера». Скільки яєць було в кожної?

17. Прочитавши казку Льюїса Керролла «Аліса в країні чудес», англійська королева так захопилася нею, що наказала доставити їй всі книжки чарівного казкаря. Яке ж було здивування та розчарування, коли їй принесли книжки, на кожній сторінці яких рясніли формули і незрозумілі терміни. Королева не знала, що автор «Аліси» був математиком. Він залишався таким і в своїх казках, і в приватних листах.

Якось племінниця казкаря Іза Боумен надіслала йому листа, де від себе і двох своїх сестер надіслала «мільйони обіймів і поцілунків». Тоді Керролл відповів: «Я дуже радий, що ти надсилаєш мені в листі мільйони обіймів од себе, Неллі і Емсі. Але прошу тебе, подумай, скільки часу забрала б така кількість обіймів і поцілунків у твого старого і дуже зайнятого дядечка! Спробуй обнімати і цілувати Емсі протягом однієї хвилини за годинником — і ти переконаєшся, що зробити це швидше, ніж двадцять разів на хвилину, не можна. Мільйони ж означають в крайньому разі два мільйони...»

Виконавши необхідні розрахунки, Керрол продовжує: «Я не зміг би обнімати і цілувати вас більше, ніж 12 годин на добу, і не хотів би проводити за цим заняттям неділі. Отже, як бачиш, мені довелося б затратити 23 тижні важкої праці. Ні, люба моя дівчинко, я просто не в змозі так розтринькувати час».

Відновіть розрахунки математика Чарлза Латуїджа Доджсона — всесвітньовідомого письменника Льюїса Керролла.

18. В одному з оповідань Джека Лондона йдеться про те, як він на санках, запряжених п'ятьма собаками, поспішав із Скагвея до свого табору, щоб врятувати вмираючого товариша.

Протягом першої доби він рухався з певною, заздалегідь розрахованою швидкістю. Але потім дві собачки порвали упряж. Письменник продовжував шлях на трьох собаках, які тягнули санки з швидкістю, що дорівнювала 3/5 розрахованої швидкості. Внаслідок цього він прибув до табору на дві доби пізніше, ніж планував.

У зв'язку з цим письменник зауважив: «Якби дві собаки, що порвали упряж, пробули в упряжці ще 50 миль, то я спізнився б лише на один день проти розрахованого терміну».

В оповіданні нічого не говориться про відстань від Скагвея до табору. Але даних, наведених в оповіданні, досить, щоб її визначити. Обчисліть цю відстань.

19. У романі «Маленька господиня Великого Будинку» Джека Лондона є такий епізод: «Серед степу височіла сталева жердина, вкопана глибоко в землю. З верхівки жердини до краю поля тягнувся трос, прикріплений до трактора. Механіки натиснули на важіль, і мотор запрацював. Машина сама рушила вперед, описуючи коло навколо жердини, що служила її центром.

— Щоб остаточно вдосконалити машину,— сказав Грехем,— вам залишається перетворити коло, яке вона описує, у квадрат.

— Так, але на квадратному полі пропаде при такій системі дуже багато землі.

Грехем виконав деякі розрахунки, а потім зауважив:

— Втрачається приблизно три акри з кожних десяти.

— Не менше».

Чи правильно виконано обчислення?

20. У романі «Золоте теля» І. Ільфа і Є. Петрова є така задача-арифмоїд:

«На трьох станціях, Горобине, Шпакове і Дроздине, було по рівній кількості службовців. На станції Дроздине було комсомольців у шість разів менше, ніж на двох інших разом узятих, а на станції Горобине членів партії було на 12 осіб більше, ніж на станції Шпакове. Але на цій останній безпартійних було на 6 осіб більше, ніж на перших двох. Скільки службовців було на кожній станції і яким був там партійний та комсомольський прошарок?

Задача ця явно пародійна і розв'язання не має. Проте якщо ввести одну додаткову умову, то задачу можна розв'язати.

Спробуйте знайти цю додаткову умову і розв'язати задачу.

21. У повісті В. Шишкова «Прочани» є епізод, коли завідуючий дитячим будинком Іван Петрович знайомить з арифметичним фокусом вихованця дитбудинку Павлика, прозваного жартома Інженером Вошкіним. Ось як це все було.

«Іван Петрович вирвав з блокнота сторінку, подав хлопчикові й запитав:

— Олівець є? Пиши будь-яке число.

Хлопчик написав. Іван Петрович побіжно поглянув на це число, записав на окремому аркушику паперу своє якесь число, запхнув цей папірець у солому й прикрив капелюхом.

— Пиши під ним друге. Записав? Тепер я сам запишу

трете. Тепер усі три числа додавай. Тільки ретельно, не помиляйся.

Через дві хвилини була готова перевірена відповідь. Інженер Вошкін подав свої викладки:

$$\begin{array}{r} 46\,853 \\ 21\,398 \\ 78\,601 \\ \hline 146\,852 \end{array}$$

— Сто сорок шість тисяч вісімсот п'ятдесят два, Іване Петровичу.

— Довго лічиш. А в мене — ось вона, відповідь. Я вже знав її, коли ти ще перше число записав. Ось. Тягни з-під капелюшка.

Хлопчик вихопив папірець. Там значилося: 146 852. Здивоване обличчя Інженера Вошкіна витяглося, і волосся на потилиці настовбурчилося. Із острахом, здивуванням він витріщив очі на Івана Петровича і пошепки бурмотів:

— Ну... ось... як же? Га?..

Іван Петрович, усміхаючись і здвигаючи бровами, двічі пояснив, навів іще й приклад. Павлик ледве перевів подих від гордої радості, провів по волоссю рукою, неначе приводячи себе до тями, і вигукнув:

— Дай! Дай мені, будь ласка, папірці!

Він прожогом вискочив з бджоляника і десь зник. Задоволено усміхаючись, виліз і Іван Петрович.

Хлопчик розшукував Омеляна Кузьмича, який голився в своїй комірчині, і з азартом приголомшив його задачею. А Марколівна, якій Інженер Вошкін також «загнув» цей самий фокус, два дні ходила як навіжена. Вона списала цілий олівець, мудрувала так і так, радилася з Омеляном Кузьмичем. Той розгублено розводив руками. Інженер Вошкін тримав себе як переможець і на багаторазові приставання Марколівни казав їй:

— Я людина скромна. Я не хизуюсь. Я не індик якийсь. Тут справа дуже проста. До осені, напевне, й самі додумаєтеся. Тут уся справа в цифрі «9» і ще де в чому. Ось у цій скромній голові.— Він ударяв себе долонею по лобі і з виразом зверхності щоразу відходив осторонь, високо піднявши плечі.

Марколівна наодинці сказала Іванові Петровичу:

— А знаєте що. Я дійшла висновку, що Павлик геніальний. Ви можете собі уявити? Ви щось розумієте ось у цьому? — Облизнувши сухі губи, вона підсунула завідуючому таємничу задачу Інженера Вошкіна.

Іван Петрович по-дружньому поплескав її по плечі і голосно розсміявся».

У чому секрет задачі Інженера Вошкіна?

22. В оповідання Степана Васильченка «Мужицька арихметика» математична задача ввійшла як своєрідний детонатор ланцюгової реакції прикладів нещадної експлуатації трудящих у царській Росії.

Візник Антон прочитав умову задачі: «Крестьянин обязался перевезти из города 50 ламп с тем условием, чтобы за каждую доставленную лампу платили ему по 5 коп., а за каждую разбитую высчитывали с него по 1 р. 20 коп. При перевозке три лампы разбились. Сколько заработал крестьянин за перевозку ламп?». Чому задача викликала таку емоційну реакцію селян і привела їх до сутички з монопольщиком?

23. Головоломка «Вірьовочка» належить англійському письменнику Баррі Пену.

«— Ще вірьовочку? — запитала мати, виймаючи руки з балії з білизною. — Можна подумати, що я вся з вірьовочок. Тільки й чуєш: вірьовочку та вірьовочку. Адже я вчора дала тобі чималий клубок. Навіщо тобі так багато? Куди ти її подів?

— Куди подів вірьовочку? — відгукнувся хлопчик. — По-перше, половину ти сама забрала назад...

— А чим же накажеш мені обв'язувати пакети з білизною?

— Половину того, що залишилося, взяв у мене Том, щоб вудити в каналі колючок.

— Перед старшим братом ти завжди повинен поступатися.

— Я й поступився. Залишилося зовсім небагато, та й з того ще батько взяв для лагодження шлейок, які тріснули в нього від сміху, коли трапилася пригода з автомобілем. А після того знадобилося ще сестрі взяти дві п'ятих від того, що залишилося, щоб зав'язати своє волосся у вузол...

— Що ж ти зробив з рештою вірьовочки?

— З рештою? А решти було всього 30 см! Ось і влаштовуй телефон з такого обривка...»

Якої довжини була вірьовочка спочатку?

Велика теорема Ферма — героїня двох романів радянських письменників. У «Самшитовому лісі» Михайла Анчарова (Новый мир, 1979, №№ 9, 10) і О. П. Ка-

занцева «Острее шпаги» (М., Мол. гвардия, 1984, с. 3—224).

24. Герой «Самшитового лісу» Сапожников говорить: «Я, здається, справді розв'язав теорему Ферма! Не смійся, дивовижно простим способом. Слухай, скажи всім зацікавленим, що коли я справді її розв'язав, то її потрібно терміново в мене вкрасти. Кажуть, за її розв'язання дають Нобелівську премію».

І далі наводиться «хуліганське» доведення теореми Ферма: Теорема Ферма говорить, що $a^n + b^n \neq c^n$ при $n > 2$.

Доведення.

Теорема Піфагора говорить, що

$a^n + b^n = c^n$ за двох умов:

а) $n = 2$,

б) a, b, c — Піфагорові основи.

Виходить, при порушенні хоч би однієї з цих умов рівність порушується, тобто ми можемо стверджувати, що

$$a^n + b^n \neq c^n \text{ при } n > 2.$$

Що й потрібно було довести. Чому все ж таки герой роману не претендував на Нобелівську премію?

25. У науково-фантастичному романі про магістра прав, чисел і поезії П. Ферма і його сучасників маємо цілу низку цікавих математичних задач. У романі (нагадаємо, що він науково-фантастичний) Р. Декарт і П. Ферма мало не билися на дуелі з приводу розв'язання, до якого зводиться епітафія давньогрецького математика Діофанта, написана Метродором, із задач-загадок якого ми розпочали цей розділ:

Прах Діофанта гробниця ховає, вдивися — і камінь
Мудрим мистецтвом розкриє покійного вік:
З волі богів шосту частину життя був він дитина.
А ще половину шостої — стрів із пушком на щоках.
Тільки минула сьома, з коханою він одружився.
З нею п'ять років проживши, сина діждався мудрець.
Та півжиття свого тішився батько лиш сином:
Рано могила дитину у батька забрала.
Років двічі по два батько оплакував сина,
А по роках цих і сам стрів він кінець свій печальний.
Скільки років жив Діофант?

26. П'єр Ферма — один з фундаторів теорії ймовірності. Значну роль у формуванні основних понять і розв'язанні найпростіших теоретико-ймовірнісних за-

дач відіграли й азартні (від франц. *hasard* — випадок, ризик, з ісп. *azar*, від араб. *«аз-загр»* — гральна кістка) ігри.

У повній відповідності з дійсністю О. П. Казанцев зробив П. Ферма очевидцем гри в кості, яка супроводжувалася таким (малоймовірним) сюрпризом його величності випадку:

«...Массандр, не перемішуючи кості, перекинув кубок і навіть не подивився на кості, що випали. І лише за виразами облич тих, хто був навколо, зрозумів — трапилося щось надзвичайне, а тому повернув голову до столу... і завмер. На ньому лежало шість кісток з одним очком на кожній.

— Цього не може бути! — вигукнув прокурор.

— Я молився, я просив чуда, пане прокуроре,— тихо промовив капітан».

Зрозуміло, що молитви тут ні до чого, бо, як відзначив у вірші «Случайность» Вадим Шефнер:

Поскольку бога не было и нет,
За все благодари ничтожный случай.

В сложнейшей иерархии причин,
Несущих нам спасенья и кончины,
Порой главнейший обретают чин
Не очень-то большие величины.

Якою ж була величина, якщо появу її сам щасливець прирівняв до чуда, а інші просто вважали, що її не може бути?

27. Події, що відбуваються в оповіданні О. П. Казанцева «Криниця Лотоса» переносять нас у прадавнину історії — Стародавній Єгипет. Ревно оберігали межу своєї касти жерці бога Ра. Тому й випробування для бажаючих переступити її придумали важкі й жорстокі. У 1912 р. під час розкопок у дельті Нілу вчені виявили на стіні храму текст задачі, яка, напевне, була лише однією з екзаменаційних пасток для претендентів стати жерцем бога Ра. Ось її текст: «Ти стоїш перед стіною, за нею криниця Лотоса, як круг Сонця. Біля криниці покладено один камінь, одне долото, дві очеретини. Довжина однієї очеретини три міри, другої — дві міри. Очеретини перехрещуються на поверхні води криниці Лотоса, а ця поверхня на одну міру вища від дна. Хто повідомить число найдовшої прямої, яка міститься в ободі криниці Лотоса, той візьме обидві очеретини і буде жерцем бога Ра».

Але відразу жерці попереджали: «Знай: кожний може стати перед стіною. Хто зрозуміє справу рук жерців бога Ра, тому відкриється стіна для виходу. Але знай: коли ти ввійдеш, будеш замурованим. Вийдеш з очеретинами жерцем бога Ра; якщо ж голод переможе твоє тіло, не вийдеш жерцем бога Ра...

Крізь стіну криниці Лотоса пройшло багато, але мало хто став жерцем бога Ра. Думай. Цінуй своє життя. Так радять жерці бога Ра».

Важко було пробитися до істини. На слизькому й небезпечному шляху на багатьох чатувала смерть. Можна лише дивуватися, що в ті прадавні часи були й переможці. Як вони міркували?

28. Математика час від часу потрапляє на сторінки періодики. Наприклад, «Перець» якось опублікував репліку такого змісту:

«Згущена математика

Нове відкриття в галузі фізико-математичних наук зробили спеціалісти Городоцького комбінату молочних консервів (Хмельницька область). На банках із згущеним молоком, яке випускає в продаж цей комбінат, сказано: «Виготовлено з незбираного молока способом згущення з додатком цукру і складається з сухих речовин: молока 28,5 %, жиру 8,5%, бурякового цукру 43,5 %, вологи 26,5 %».

Яким «відкриттям» була зумовлена поява репліки «Перцю»?

29. У Михайла Зощенка є маленька новела «Дуже цікаве оповідання». У ній розповідається, що коли гітлерівці наближалися до села, одна сім'я готувалася до евакуації. Мама й бабуся заховали найцінніші речі; мама відрахувала 30 кроків від ганку, вони з бабусею викопали яму й заховали там скриню. Хлопчик вмів рахувати лише до десяти, тому відрахував десять кроків, викопав ямку й заховав дитячі скарби. Скінчилася війна. Сім'я повернулася додому, в пограбовану фашистами хату. Мама відрахувала 30 кроків від ганку і вирила скриню. Хлопчик теж відміряв десять кроків від ганку і при повному зборі дітей почав копати, але свого скарбу не знайшов. Діти сміялися, але хлопчик знав, що арифметика корисна наука, тому він сів на ганку і став думати. Потім він відрахував п'ять кроків від ганку і дуже швидко знайшов свій скарб. Арифметика й справді дуже корисна наука, але лише для тих, хто готовий думати.

Чому хлопчик вчинив саме так?

30. Динамічно живуть аборигени математики в мі-

5 8-281

ніатюрах Фелікса Кривіна. Більшість задач вони розв'язують самі, хоча й не зовсім на свою користь. І все тому, що недостатньо знають самих себе, як, наприклад, Одиниця в мініатюрі «Степінь».

«Багато років прослужила штатна Одиниця без жодного зауваження, і належало якось відзначити її заслуги!

Тому Одиницю вирішили піднести до степеня.

Спочатку піднесли її до другого степеня. Думали цим обмежитися, але знову Одиниця служить сумлінно, зауваження хоч би одне!

Піднесли Одиницю до третього степеня. І знову жодного зауваження. Піднесли до четвертого. Жодного зауваження! Подумати тільки!

Піднесли до п'ятого степеня, до шостого, до десятого, до сотого. Немає зауважень!

Далеко пішла Одиниця. Тепер вона Одиниця в тисячному степені.

А що змінилося від того? Нічого — абсолютно нічогісінько. Адже Одиниця в тисячному степені — та сама Одиниця.

І на тисячну частку не більша!»

А на скільки потрібно було б збільшити Одиницю, щоб тисячний степінь її збільшився на ту тисячну частку?

ВИКОРИСТАНА ТА РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Пекелис В. Д. Твои возможности, человек. М. : Знание, 1984.

Перельман Я. І. Жива математика. К. : Техніка, 1968.

Перельман Я. И. Занимательная геометрия. М. : Физматгиз, 1959.

Перельман Я. І. Цікава алгебра. К. : Техніка, 1973.

Петер Р. Игра с бесконечностью. М. : Просвещение, 1968.

Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М. : Наука, 1957.

Пойа Д. Математическое открытие. М. : Наука, 1970.

Не річ наказати — треба показати

(Відповіді до деяких задач)

ДО РОЗДІЛУ І

1. До керівника хлопці приходили день по дню в такому складі: а) Андрій і Дмитро; б) Андрій, Борис і Григорій; в) Андрій і Борис; г) Віктор і Григорій; д) Борис, Віктор і Дмитро; е) Борис, Віктор і Григорій; є) Борис і Віктор.

2. Мал. 1.1. У кожному з трьох рядів і трьох стовпчиків фігур є два прямокутники, розділені двома видами діагоналей на два прямокутні трикутники, і один прямокутник, розділений на два рівні прямокутники. У фігурах, на які розділені прямокутники, розміщені (у кожному ряду і кожному стовпчику) без повторень шість різних фігурок. У кожному рядку і кожному стовпчику набір шести маленьких фігурок повторюється в різних комбінаціях. Ця закономірність буде збережена, якщо на вільне місце вмістити фігуру 1. Мал. 1.3 — фігуру 4. Мал. 1.4 — фігуру 6. Мал. 1.5 — фігуру 2. Мал. 1.6. У кожному рядку і в кожному стовпчику є три різних типи м'ячів, три форми голови, три форми взуття і три положення рук. Ті форми й положення, яких нема в перших двох малюнках третього ряду, мають бути в пропущеному малюнку. Ці умови задовольняє фігура 1. В мал. 1.7 — фігура 6. В мал. 1.8 — фігура 3.

3. Див мал. 1, 2, 3.

4. Мал. 4.

5. В мал. 1.13 зайва фігура 8, усі інші можна сумістити переміщенням фігур у площині, в мал. 1.14 зайві 1, 3 і 8.

6. Фігура 7.

7. Деталі 2 і 4.

8. Кнопку 3.

10. Розбилася ваза 5.

11. Спортсмен долав снаряди в такому порядку: В, Д, С, А.

12. Вал К обертається проти годинникової стрілки.

13. Мал. 5.

14. Мал. 6.

15. При обертанні зубчастої передачі Фергюсона за годинниковою стрілкою триб С обертатиметься в тому самому напрямі, Д — у протилежному, а Е залишатиметься нерухомим.

16. Є сім різних варіантів закріплення бантиків (мал. 7). Перший потрібно відкинути, бо тоді б Катруся бачила перед собою два білих банти і відразу здогадалася б, що на її голові темний бант, а вона відповіла, що не знає, який бант на її голові. Другий і третій варіанти відпадають теж, бо тоді Зіна відповіла б: «Знаю». Вона міркувала б так: «Я бачу перед собою білий бант. Якби на мені був білий бант, то Катруся, яка стоїть за мною, відповіла б: «Знаю», бо вона б бачила два білі банти. З її відповіді: «Не знаю» випливає, що на мені темний бант. Отже, другий і третій варіанти виключаються. Залишаються четвертий, п'ятий, шостий і сьомий варіанти, при яких на мені мав бути тільки темний бант. Тому після відповідей Катрусі й Зіни я була впевнена, що у мене темний бант.

17. Усі мітки були чорними. Могла бути лише одна біла. Але тоді троє інших претендентів легко здогадалися б, що в них чорні мітки.

18. Потрібно дістати зі скриньки з написом «1 чорна і 1 біла».

19. 3 білі кульки, бо його товариші діставали чорні.

20. Оскільки перший сказав, що в нього лишилася в скриньці біла кулька, то на скриньці був напис «3 чорні». Другий не зміг визначити колір кульки в скриньці, діставши дві білі. А це могло бути лише в тому випадку, коли на його скриньці був напис «3 чорні» або «2 чорні, 1 біла». Але напис «3 чорні» — у першого, тому у другого — «2 чорні, 1 біла». А оскільки в його скриньці не три чорні, то три чорні в третій скриньці.

21. Єдиними комбінаціями скриньок і кульок, при яких двоє перших визначили кольори кульок, які лишаються в скриньках, а третій не зміг цього зробити, будуть такими:

Скринька	1	2	3	4
Написи	2 чорні 1 біла	1 чорна 2 білі	3 чорні	3 білі
Кульки	3 чорні	2 чорні 1 біла	3 білі	1 чорна 2 білі

Прийшовши до такого висновку, четвертий міг упевнено сказати, що в першій скриньці лишилася чорна кулька, у другій — чорна, у третій — біла.

22. Логіку потрібно було отримати відповідь на якесь запитання за умови, що той, хто відповідає, говорить «так» або «ні», і логіку при цьому невідомо, істинне це «так» («ні») чи хибне. Очевидно, що ставити запитання, яке безпосередньо цікавить, даремно: яка б не була відповідь («так» чи «ні») потрібне додаткове запитання, щоб з'ясувати, істинна чи хибна відповідь. Потрібне таке запитання, відповідь на яке — незалежно від значення істинної відповіді (тобто істинна вона чи хибна) — у випадку «так» означала один з можливих варіантів, а у випадку «ні» — другий.

Логік запитав: «Чи живете ви в цьому селищі?» Відповідь «так» означатиме, що він у Лицарському, а «ні» — у Рокоманському. Справді, нехай відповідь «так». Якщо вона істинна, то це означає, що острів'янин з цього селища — Лицарського. Якщо відповідь хибна, то співрозмовник з другого селища, але там рокоманці, отже, у цьому — лицарі, воно знову Лицарське.

Відповідь «ні». Якщо вона істинна, то зустрічний із іншого селища, у якому говорять правду. Тоді в даному селищі обдурюють. Отже, воно — Рокоманське. Якщо відповідь хибна, то острів'янин з цього-таки селища, у якому обдурюють, отже, знову воно — Рокоманське.

23. «Чи говорять у цьому селищі правду?» Якщо острів'янин відповість «так», він живе в цьому селищі, якщо «ні» — в другому.

24. Можливі варіанти: а) логік запитує лицаря, тоді другий острів'янин — рокоманець; б) запитує рокоманця, тоді другий — лицар. Логік запитав: «Якщо я запитаю твого товариша, чи веде ця дорога до озера, чи відповість він «так»?» Якщо при цьому і вказуватиме на дорогу до озера, то, як легко перевірити, в обох випадках відповідь буде «ні». Якщо вказуватиме на другу дорогу, відповідь буде «так».

25. Можливі чотири варіанти комбінацій дверей і воїнів:

а) двері без покарання, вартовий — лицар; б) двері без покарання, вартовий — рокоманець; в) двері до покарання, вартовий — лицар; г) двері до покарання, вартовий — рокоманець.

Логік запитав одного з вартових: «Що скаже другий вартовий про двері, які ти вартуєш?» У перших двох варіантах він почув би відповідь: «Він скаже, що це двері до покарання», у третьому та четвертому варіантах: «Це двері без покарання».

26. Логік двічі запитав острів'янина: «Чи чергуєш ти в розмові правду з неправдою?» Почувши у відповідь двічі «ні», логік встановив би, що перед ним лицар, дві стверджувальні відповіді дав би рокоманець, непостійний відповів би «так» та «ні».

27. Довговух — лицар, Косий, Борода, Авас — рокоманці, Кирпань — непостійний.

30. Першого разу були переставлені всі засуви, другого разу засуви переставили на дверях камер з парними номерами, третього — на дверях з номерами, які діляться на 3, і т. д. ...15-го разу поміняли місцями засув на камерах з номерами, які діляться на 15. Тому засув на кожних дверях виявився переставленим стільки разів, скільки дільників має номер на дверях. Ходжа знав, що квадрати натуральних чисел мають парне число дільників (доведіть це). Отже, виявилися відчиненими двері камер з номерами 1, 4, 9, 16, 25, 49, 64, 81 і 100. Про переведення в'язнів у ці камери (звичайно, за порадою Ходжі) потурбувалися друзі бідаків.

31. Помінятися на час поїздки до оазису верблюдами.

32. Знайомий почав розв'язувати задачу приблизно о 21-й год. 16 хв. 22 сек., а закінчив приблизно о 21-й год. 19 хв. 4 сек. Роздуми над головоломкою зайняли у нього приблизно 32 хв. 45 сек. Скільки міркували ви над 32-ю задачею, підрахуйте самі.

33. Із 30 витрачених музикантами марок 25 залишилися в адміністратора, 3 марки отримали здачі, 2 намагався привласнити портьє, який не тільки не чистий на руку, а й погано знав логіку.

34. Продавець сказав, що покупець рахує свої гроші так само, як рахував їх портьє у задачі 33.

35. Якщо припустити, що правдолюби завжди говорять правду, а брехуни — завжди неправду, то висловлювання Епіменіда (далі Е) не може бути ні істинним, ні хибним. Істинним воно не може бути, бо Е — брехун (як крітянин) і може бути автором лише хибних висловлювань. Але воно не може бути й хибним, бо це означало б, що крітяни говорять лише правду, а тому висловлювання Е істинне. Проте, як доведено вище, істинним воно бути не може. Якщо автор (далі А) висловив істину, то він справді сказав неправду і його висловлювання хибне. Якщо ж висловлювання А хибне, то невірно, що А сказав неправду. А сказав істину, і його висловлювання істинне. Отже, висловлювання А істинне тоді й тільки тоді, коли хибне, і навпаки — хибне тоді й тільки тоді, коли істинне. Воно — парадокс.

37. Якщо висловлювання «Я кажу неправду, що кажу неправду» істинне, то насправді я кажу правду — суперечності нема. Нема суперечності й за припущення, що це висловлювання хибне. Воно не є парадоксом.

Перевіркою можна встановити, що ланцюг з трьох «вкладених» одне в одне висловлювань «Я кажу неправду» є парадоксом, із чотирьох — не парадоксом і т. д. Методом математичної індукції можна довести теорему про те, що «навішування» на ланцюг додаткового твердження «Я кажу неправду» перетворює парадокс у непарадокс, а непарадокс у парадокс.

У чому причина появи розглянутого парадокса? Він виникає, якщо мовець як частина середовища — крітянин і разом з тим він не «розчиняється» у цьому середовищі, а має інше існування поза ним. Наша свідомість незалежно розглядає мовця; то як об'єкт, на який поширюється характерна ознака його як крітянина, то як суб'єкт, що генерує дію, несумісну з характеристикою, яку ми йому приписали. Результати одного (бути крітянином) суперечать другому (що мовець виголошує як крітянин). Уявна природність, буденність того, що говорить мовець, є наслідком замаскованого ігнорування особливого положення його як суб'єкта дії.

Якщо в казці припустити, що всі натуральні числа завжди говорять правду і при цьому число 7 скаже, що воно парне, то відразу можна заперечити — сімка такого сказати не може, оскільки має властивість правдолюбства, притаманну всім натуральним числам. Якщо припустити таке висловлювання в сімки, то й коло може сказати, що воно квадратне. І тут нема чого обговорювати: істинні такі висловлювання чи хибні — вони неможливі.

Не випадково, коли в 1947 р. вчені запропонували першій у світі ЕОМ, призначеній для розв'язування логічних задач, розв'язати парадокс «Брехун», вона ввійшла в коливний режим, видаючи при цьому неймовірний шум.

38. Діалог Платона й Сократа демонструє появу парадокса у висловлюваннях, де нема замаскованого твердження про самого себе, як у Епіменіда (задача 35). Жодне з висловлювань Платона чи Сократа не говорить про себе; коли ж розглядати їх разом, то одне твердження змінює значення істинності іншого на протилежне. У результаті й виникає парадокс, бо про жодне з них (коли розглядати їх разом) не можна сказати, істинне воно чи хибне. Об'єднання їх парадоксальне.

Англійський математик Журден запропонував такий варіант розглядуваного парадокса. З одного боку чистої картки паперу написано: «Твердження на протилежному боці цієї картки істинне». А на протилежному боці: «Твердження на протилежному боці цієї картки хибне».

Спробувавши встановити істиннісне значення цього словесного дуету, неодмінно потрапимо в нескінченний спуск, у якому кожне твердження з безконечною регулярністю стає то істинним, то хибним.

39, 40, 41. Дихотомія розкриває складність пояснення руху в поняттях науки, якщо вважати простір і час нескінченно подільними — неперервними. Щоб подолати відстань $AB = 1$, потрібно пройти кожний з нескінченної і актуально заданої усім набором множини відрізків $\ldots + 1/2^4 + 1/2^3 + 1/2^2 + 1/2$, у якій не існує першого відрізка. З одного боку, цей стартовий відрізок повинен мати протяжність, бо становить якусь частину AB, а з другого боку — дорівнювати нулю, бо $\lim\limits_{n\to\infty} 1/2^n = 0$. У другій апорії каменем спотикання стає останній відрізок, який є ніби симетричним до розглянутого. Математична модель неперервного руху легко розв'язує обидва парадокси за допомогою операції граничного переходу: $\lim\limits_{n\to\infty} (1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + {} + \ldots + 1/2^n + \ldots) = AB = 1$. Але вона не вичерпує проблем, поставлених Зеноном. Суть їх полягає в тому, що ні просторові відрізки, ні проміжки часу не можна розглядати як структури, утворені з нескінченно великого числа дискретних, ізольованих один від одного членів, як сліди, що їх лишив на піску Ахіллес. Простір і час не «розсипаються» на ізольовані елементи, а мають складнішу структуру, яку й провіщав у своїх апоріях філософ. Їм присвячена величезна література. (Див., наприклад, Наан Г. И. Понятие бесконечности в математике и космологии.— В кн.: Бесконечность и Вселенная. М., Мысль, 1969 г., с. 7—77). Апорії Зенона розкрили складності, які постають при розв'язанні питання про те, неперервні чи дискретні (квантовані) простір і час. Гіпотеза про дискретність простору і часу в структурі елементарних частинок не підтвердилася в експериментах у масштабі до 10^{-16}—10^{-17} см. Сьогодні

значення найменшої довжини прихильники квантування простору й часу відсувають до порядку 10^{-20} см, а для більшої надійності і «запасу міцності» — навіть до довжини 10^{-33} см. Тоді мінімальна миттєвість часу становитиме близько 10^{-43} сек. Ці значення настільки малі, що гіпотеза на багато століть застрахована від можливості перевірки її експериментом. На ці самі століття автоматично відсувається й проблема повного спростування чи реабілітації аргументів геніального елеата.

42. Причина виникнення парадокса полягає в тому, що не означено поняття «купи». У формуванні парадокса неявно застосовується метод математичної індукції. Якщо k піщинок не купа, то додавання до них однієї піщинки не зробить купою множину $(k + 1)$ піщинок. Тоді при довільному числі піщинок n множина їх не буде купою. Якщо означити купу як множину p піщинок, то індуктивний крок від p до $p + 1$ буде невірним. При уточненні задачі виявляється, що до проведення міркувань принцип математичної індукції не може бути застосованим.

43. Софістичний висновок виник унаслідок порушення логічного закону тотожності. Одну і ту саму домовленість Еватл розглядає в різних розуміннях. У першому — з точки зору юриста, який програє свій перший процес, у другому — з точки зору кривдника, якого суд виправдує. Протагор може одержати гонорар, якщо суддя винесе вирок: «Протагору в позові відмовити і дозволити ще раз звернутися в суд з позовом на Еватла»..

44. Будь-яка з двох можливих ситуацій, з яких крокодил робитиме вибір: «з'їсти» чи «не з'їсти», приводить до суперечності (якщо «з'їсти», то «не з'їсти», і навпаки). Якщо твердження матері «ти з'їси» істинне, то мати відгадала дії крокодила. Дитина, за умовою, повертається їй. Якщо ж воно хибне, то мати не відгадала, крокодил розправляється з дитиною, і твердження матері істинне. Мати ніби опосередковано, через дії і оцінку крокодила, говорить: «Я говорю неправду».

46. 1/ Голити. У цьому випадку перукар (далі П) голиться сам, а кожного чоловіка — мешканця села, який голиться сам, він, за умовою, голити не може: якщо «голити», то «не голити». II) Не голити. Отже, П сам не голиться і як той, що «сам не голиться», має себе голити: якщо «не голити», то «голити». Твердження «П голить себе» («П не голить себе») одночасно істинне і хибне, тобто суперечливе, парадоксальне. Воно не є висловлюванням.

Парадокс виник тому, що властивості П як мешканця села, елемента множини людей, і П як «особливого елемента», який не «розчинився» в середовищі односельців, а отримав особливий статус (одних голить, а інших не голить), суперечить одна одній. Дії людини А щодо себе (голиться, не голиться) за умовою протилежні дії П щодо A_i (не голить, голить). Це не викликає сумнівів і непорозумінь, доки $A_i \neq П$. Якщо ж $A_i = П$, то маємо: дія П щодо себе протилежна дії П щодо себе, тобто суперечність. П опосередковано, через множину чоловіків-односельців, елементом яких він є сам, бере участь у власному визначенні. Ми не маємо права на зроблену підстановку $A_i = П$, бо це є поширенням на П властивостей всіх його односельців: голитися у П, якщо чоловік не голиться сам, і навпаки. П має бути виключений з множини односельців, на яких поширюється ця властивість. Цю ситуацію Б. Рассел так висловив (у своєму принципі хибного кола) «Множина не може містити елементів, які означуються лише через цю множину».

«Сільський перукар» — це адаптований Б. Расселом варіант парадокса, який він сформулював у листі від 16.6.1902 р. до професора Ієнського університету Г. Фреге. Останній віддав понад 20 років теоретико-множинному і логічному обгрунтуванню арифметики як теоретичного фундаменту усієї математики. Перший том його великої праці «Основні закони арифметики» вийшов у 1893 р. Він читав верстку другого тому, коли отримав листа від Б. Рассела. Сформульований у листі парадокс означав, що у першому томі праці вченого в неявній формі проникла формально-логічна суперечність. Наявність її обезцінювала величезну працю Г. Фреге. Це була глибока драма ідей і людей, яка вразила не лише Г. Фреге, а й самого Б. Рассела. Г. Фреге після виявлення парадокса в його логічній системі більше не опубліковував жодної значної праці з математичної логіки, хоча прожив ще понад 20 років. Б. Расселл після свого відкриття надовго втратив здатність думати про щось інше і місяцями просиджував над чистим аркушем паперу.

47. Природа парадокса та сама, що й у попередньому завданні. Справді, для будь-якого мера, за умовою, властивість «бути мешканцем свого кантону» одночасно означає «не жити в цьому кантоні». Для перукаря було навпаки: голитися самому означало потрапити до

множини чоловіків, яких він не має права голити. Вигадана країна не випадково названа Канторією. Парадокси «Сільський перукар» та «Мери Канторії» свідчили про неблагополуччя в святая святих математики кінця XIX ст.— канторівській теорії множин. Вона претендувала на роль теоретичного фундаменту всієї класичної математики. Ці та інші парадокси свідчили, що у логічному фундаменті є загрозливі тріщини.

48, 49. Два розглянутих сюжети моделюють один і той самий парадокс, що вперше з'явився на початку 40-х років. Більшість вважає, що перший крок у міркуваннях учителя правильний, а коли так, то доводиться вважати правильними всі інші кроки міркувань. Але на першому кроці припускаємося помилки. Припустімо, що претендент благополучно відчинив усі двері, крім останніх. Чи буде після цього логічно бездоганним висновок про те, що за останніми дверима теж немає тигра? Не буде. Бо, прийнявши такий висновок, вчитель танців міг би відкрити останні двері й абсолютно несподівано для себе виявити за ними смугасту небезпеку. Отже, парадокс залишається в силі і в тому випадку, коли невідчинені одні-єдині двері логіки сходяться на тому, що король знає, що дотримує даного їм слова, але претенденту про це нічого не відомо. Отже, він, навіть міркуючи логічно (або й проконсультувавшись з логіком), може прийти до висновку, що за будь-якими, в тому числі й останніми, дверима тигра нема.

50. Оскільки канат розтягується рівномірно, то при кожному розтягуванні він переносить на собі й гнома. За першу секунду гном пройде 1/100 000 довжини каната, за другу секунду він пройде ще 1 см, що становить 1/200 000 нової двокілометрової довжини каната, за третю секунду він пройде 1/3 000 000 трикілометрової довжини каната і т. д., а через k секунд 1/1000 000 (1 + 1/2 + 1/3 + … + 1/k). У дужках маємо суму перших членів гармонічного ряду (H_k). Із збільшенням k H_k зростає надзвичайно повільно:

$$H_{1000}=7{,}485,\quad H_{1\,000\,000}=14{,}393,\quad H_{2^{143}} < 100,\quad H_{2^{144}} > 100.$$

Якщо кожний дріб гармонічного ряду записати на 1 см паперу, то тільки 2^{100} квадратиками можна було б покрити земну кулю в 400 млрд. шарів. Гном же фінішує після $2^{200\,000}$ сек., точніше $e^{100\,000}$ сек., де $e \approx 2{,}7$ — основа натуральних логарифмів. Довжина каната тоді у багато разів перевищуватиме діаметр відомої нам частини всесвіту за оцінками сучасної космології.

Незалежно від довжини каната, швидкості гнома і сталої довжини відрізка, на яку канат збільшується щосекунди, гном завжди фінішує за скінченний, хоча й надзвичайно довгий проміжок часу. Якщо ж довжина відрізка збільшуватиметься за законом геометричної прогресії, гном ніколи не досягне фінішу.

ДО РОЗДІЛУ 2

2. Перший: А, 12, 8, 16, 6, 14, 4, 8, 2, Б; другий: А, 11, 9, 13, 15, 9, 5, 13, 11, Б; третій: А, 11, 7, 2, 5, 13, 3, 19, 3, 17, 2, Б; четвертий: А, 18, 3, 6, 12, Б.

3. I) $1 + 2 + 9 + 10 = 22$, II) $8 + 12 + 21 + 9 + 10 = 60$.

4. $13 + 1169 + 281 + 461 + 76 = 1000$, найбільша сума $372 + 373 + 281 + 461 + 76 = 1563$.

5. I) $1 + 2 + 6 + 7 + 8 + 5 + 6 + 9 + 9 + 7 = 60$, $1 + 2 + 6 + 7 + 8 + 5 + 7 + 4 + 1 + 9 = 50$, $1 + 9 + 1 + 7 + 2 + 6 + 2 + 3 + 7 + 4 + 3 = 45$; II) $1 + 2 + 6 + 7 + 6 + 9 + 5 + 9 + 7 = 61$; III) $1 + 3 + 5 + 4 + 2 + 8 + 2 + 3 + 1 + 5 = 29$.

6. $1 + 9 + 1 + 7 + 2 + 6 + 2 + 3 + 7 + 4 + 3 = 45$.

7. Єдиний можливий маршрут: 1—2—3—7—8—9—4—5—10—15—14—19—20—25—24—23—22—21—16—11—17—18—13—12—6—1.

8. $1 + 9 - 8 + 2 + 7 - 6 + 5 - 4 + 3 - 2 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 1 - 9 + 4 - 1 + 3 - 5 - 4 - 1 = 0$.

9. Мал. 8.

10. $50 + 30 + 25 + 3 + 25 + 3 = 136$, $2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 3 = 12$, $24 + 312 + 45 + 47 + 15 + 17 + 40 = 60 + 21 + 38 + 47 + 15 + 17 + 302 = 89 + 25 + 45 + 99 + 15 + 41 + 186 = 500$, $50 + 30 + 25 + 20 + 25 + 3 = 153$.

11. Мал. 9.

12. Мал. 10.

13. Мал. 11.

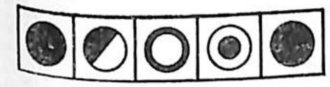
14. Мал. 12.

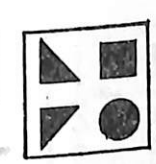
15. $1 + 7 + 2 + 6 + 9 + 2 + 8 + 5 + 5 + 5 = 50$.

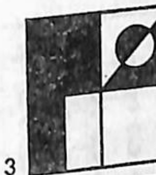
16. $24 + 13 + 31 + 16 + 17 + 35 + 53 + 11 + 21 + 14 + 15 = 250$, $43 + 76 + 21 + 19 + 53 + 48 + 63 + 12 + 12 = 350$.

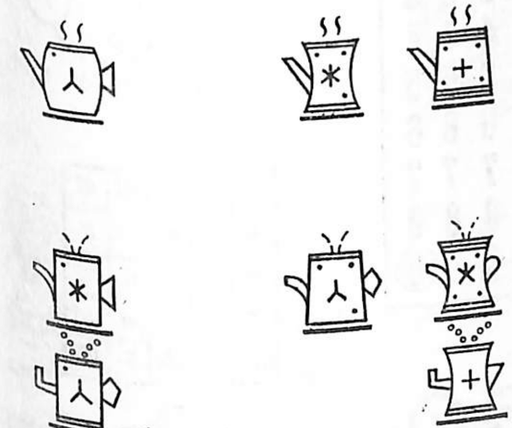
17. $252 \times 37 = 31524$.

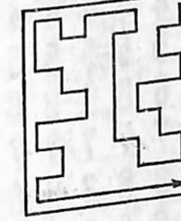
19. $88\,375 : 35 = 2525$.

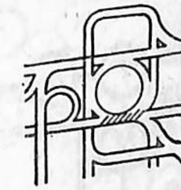

1

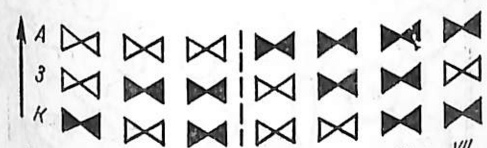

2


3

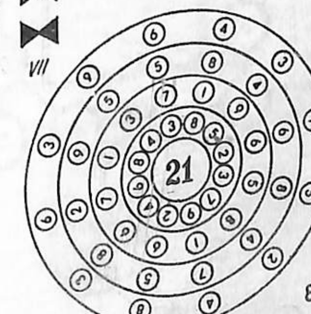

4


5

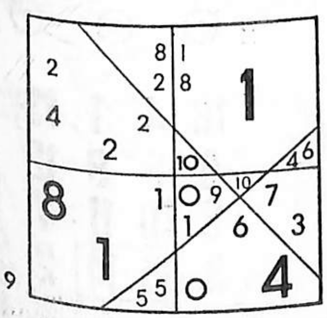

6

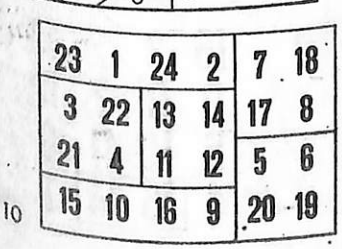


7



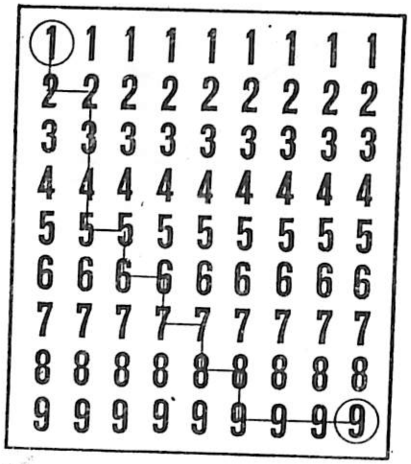
8.


9

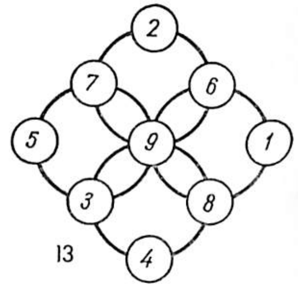


10

11



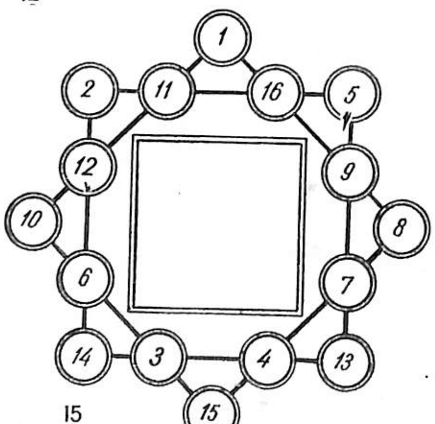
12



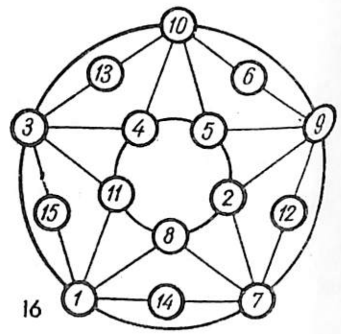
13

16	6	6	16	16
6	16	16	16	6
16	6	16	6	16
6	16	16	16	6
16	16	6	6	16

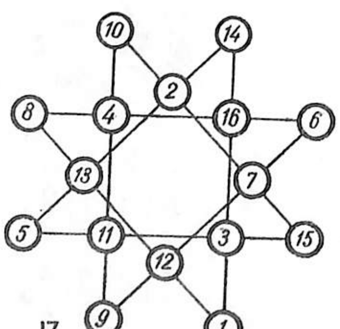
14



15



16



17

16	4	1	13
9	5	8	12
6	10	11	7
3	15	14	2

16	3	2	13
9	6	7	12
5	10	11	8
4	15	14	1

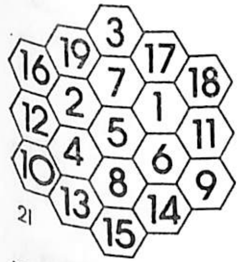
18

17	6	5	23	14
3	24	12	16	10
11	20	8	4	22
9	2	21	15	18
25	13	19	7	1

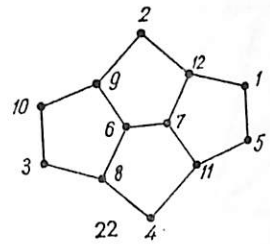
19

31	**8**	22	15	**30**	**5**
20	11	24	16	28	12
17	26	13	21	9	25
34	**1**	23	14	**35**	**4**
7	**32**	10	27	**6**	**29**
2	**33**	19	18	**3**	**36**

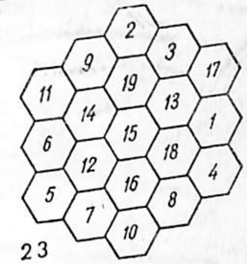
20



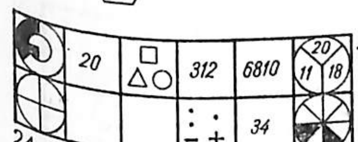
21



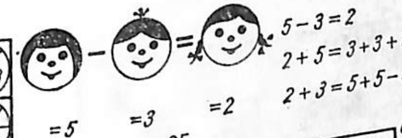
22



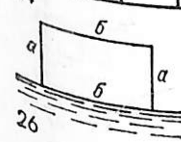
23



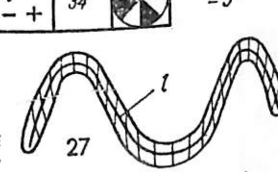
24



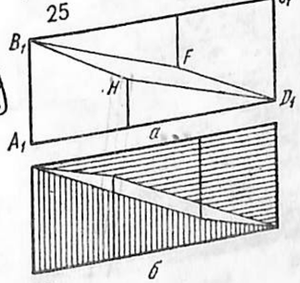
25



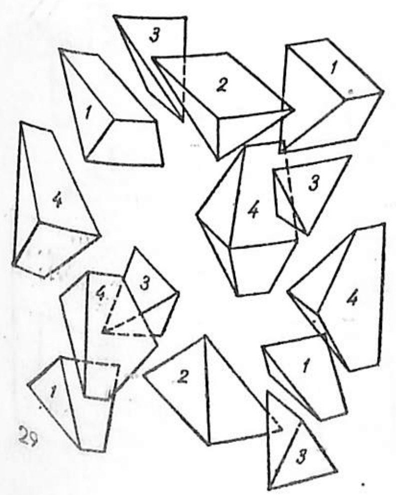
26



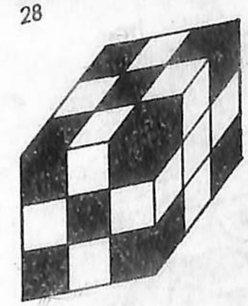
27



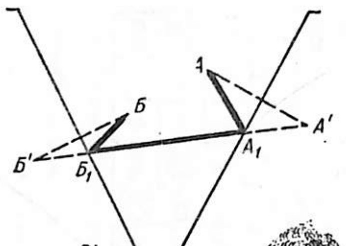
28



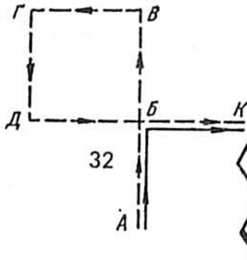
29



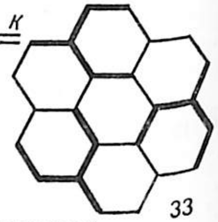
30

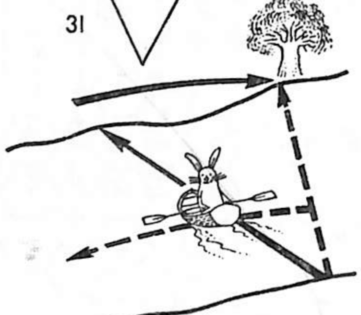


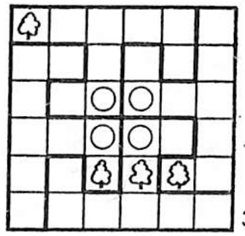
31

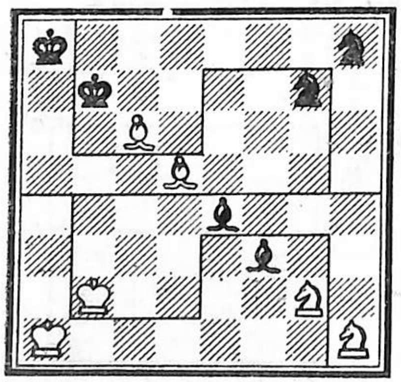


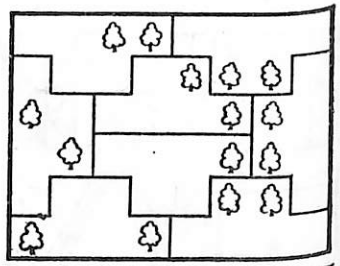
32

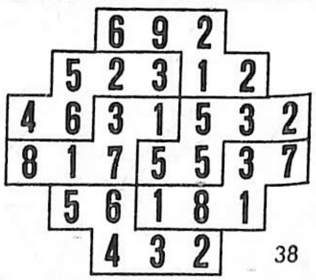

33


34

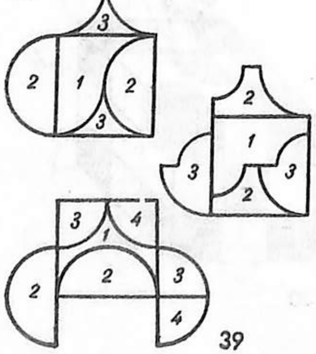

35


36

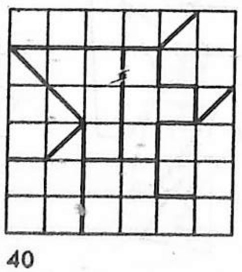

37

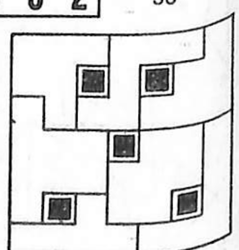


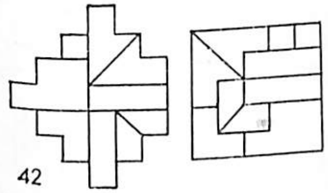
38

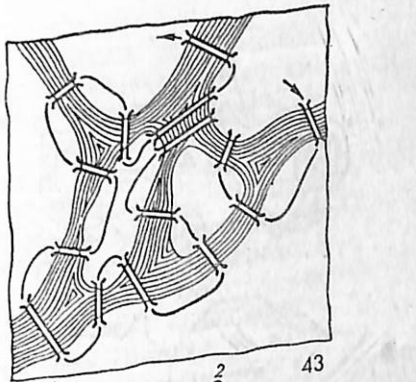


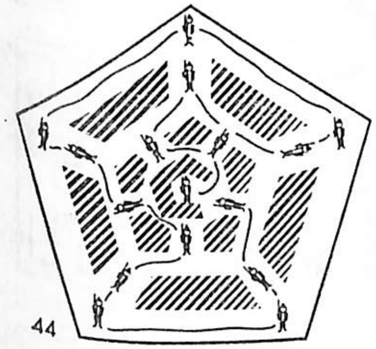
39

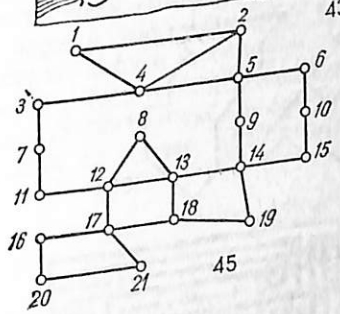

40


41

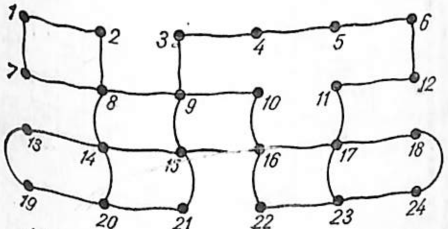

42


43

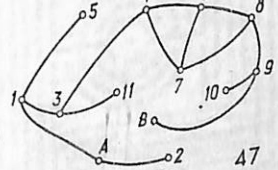

44



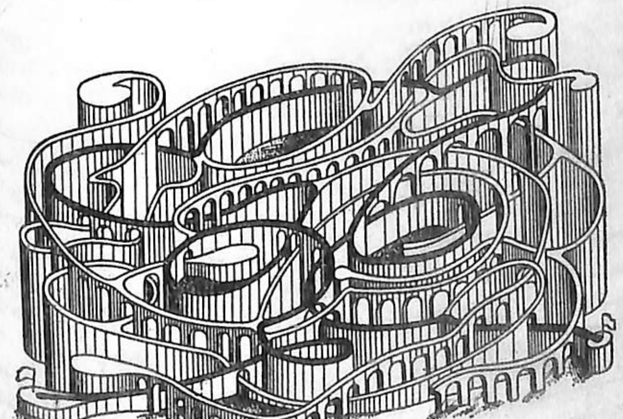
45

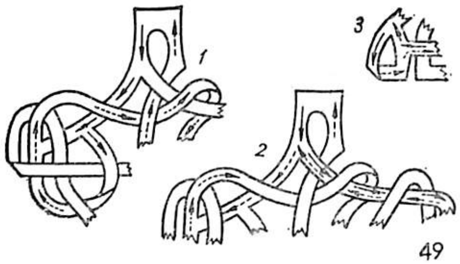


46

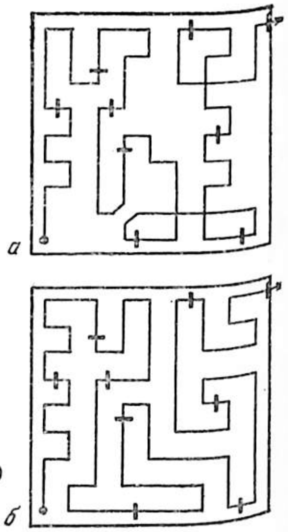


47


48



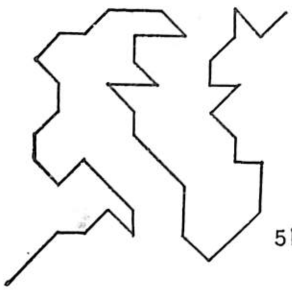
49



а

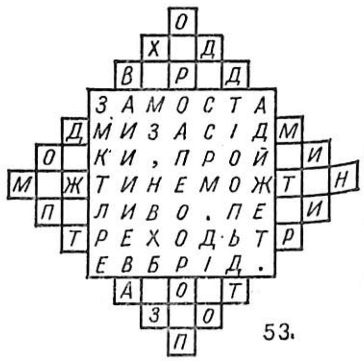
б

50



51

52



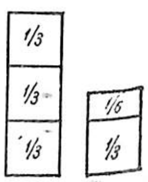
53

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

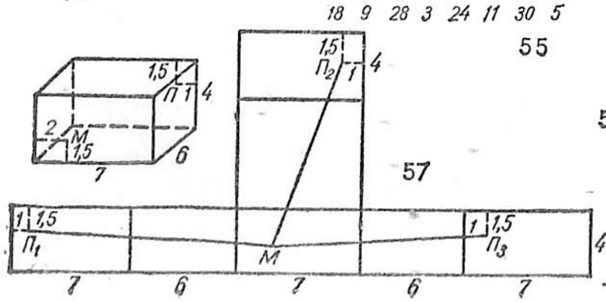
54

37	62	43	56	35	60	41	50
44	55	36	61	42	49	34	59
63	38	53	46	57	40	51	48
54	45	64	39	52	47	58	33
1	26	15	20	7	32	13	22
16	19	8	25	14	21	6	31
27	2	17	10	29	4	23	12
18	9	28	3	24	11	30	5

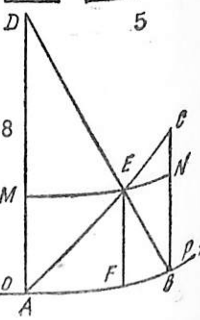
55



5



57



58

20. Найкоротший вихід здійснюється за допомогою руху туди й назад вздовж єдиної діагоналі: в напрямі ПдЗ — на 4, в напрямі ПдЗ — на 6, в напрямі ПчС — на 6, в напрямі ПчС — на 2, в напрямі ПчС — на 5, в напрямі ПдЗ — на 4, і потім короткий ривок на ПчЗ, і ви вийшли з лабіринту.

21. Всі трикутники виду ▽ заповнені непарними числами, а виду △ — парними. При цьому при переході від одного трикутника до наступного види трикутників змінюються. Якщо Л проходить маршрут із непарного числа кроків, вказаного в непарному трикутнику виду ▽, то неодмінно потрапить у парний трикутник виду ▽. Якщо ж він робить чергову серію кроків із трикутника △, в якому записане парне число, то потрапить знову в парний трикутник △. Будинок Л знаходиться в сукупності непарних трикутників виду ▽. Отже, додому він ніколи не потрапить.

22. Мал. 13.

23. Мал. 14.

24. Мал. 15.

25. А: $f_1(n) = 2k - 1$, тобто 280; Б: $f_2(n) = k^2 - 1$, має бути число 15 745 023; В: $f_3(n) = 3k$, має бути число 480, Г: $f_4(n) = n_1 + 3$, має бути 16.

26. Мал. 16.

27. На мал. 17 приведено лише один з 112 можливих розв'язків задачі для восьмикутної зірки.

28. Міг би ще двома способами. Див. мал. 18.

29. Оскільки числа в квадраті 4 × 4 не перевищують 16, можливі лише два роки: 1515-й і 1516-й. Перший, очевидно, виключається (в магічному квадраті кожне число фігурує один раз). У другому випадку побудувати магічний квадрат, виявляється, неможливо.

30. Сума будь-яких пар чисел МК, симетричних відносно центра, дорівнює 17. Ця властивість дозволяє виділити в квадраті багато четвірок чисел (крім рядків, стовпчиків і головних діагоналей), суми яких також дорівнюють 34. Такі четвірки чисел утворюють маленькі квадратики 2 × 2, розміщені в вершинах і в центрі даного МК. В кожному рядку є пара суміжних чисел, сума яких дорівнює 15 і пара таких суміжних чисел, сума яких дорівнює 19. Суми квадратів чисел крайніх рядків рівні і дорівнюють 438, суми квадратів чисел в двох середніх рядках теж рівні і дорівнюють 310. Зрозуміло, що цими несподіванками світ дюрерівського квадрата далеко не вичерпується.

5*

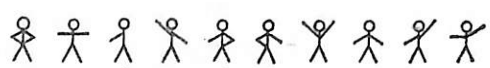
31. Мал. 19.
32. Мал. 20.
33. Можливі й такі варіанти магічного трикутника:

	А	Б	В	Г	Д	Е	Є	Ж	З	И	І	Ї	Й	К	Л
1	15	3	13	1	8	6	11	5	10	2	9	4	7	12	14
2	12	2	11	1	14	6	9	4	7	3	13	5	8	10	15
3	10	2	11	3	14	4	7	6	9	1	15	5	8	12	13
4	13	1	15	3	8	4	11	5	12	2	7	6	9	10	14
5	14	6	13	2	5	8	7	9	11	1	10	4	3	15	12
6	11	7	14	5	3	8	4	12	13	1	9	6	2	15	10
7	13	12	3	2	10	11	9	6	4	7	15	1	5	14	8
8	15	10	3	5	7	11	8	12	2	4	13	6	1	14	9

34. Мал. 21.
35. Мал. 22.
36. Мал. 23.
38. Мал. 24.
39. Ух — Ех — Ах — Ох — Іх — Ух.
40. Мал. 25.
41. $1000 = 2^3 \cdot 5^3$. Маршрут може бути таким: 1, 2, 1, 2, 5, 2, 1, 5, 5.

43. Оскільки ■ не 0 і не 1, а ■ · ■ закінчується цифрою ■, то ■ = 5 або 6. Оскільки останні цифри інших добутків різні, то ■ = 6. З додавання десятків видно, що ◩ = 0, тому ⊟ =5. Оскільки ⊟ непарне число, яке не 1 і менше 5, то ⊟ =3. Тоді ◩ =8 і ◧ =2, а ■ = 1. З першого добутку знаходимо множене (276 × × 356).

44. Щоб легше було оперувати із значками-чоловічками, замінимо їх (перекодуємо) на звичніші знаки-літери:



а б в г д е є ж з і

Тоді отримаємо приклад на множення

$$
\begin{array}{r}
\times \begin{array}{r} а\,б\,в\,г\,д\,е \\ є\,ж\,б\,з\,і \end{array} \\
\hline
є\,а\,є\,в\,г\,ж\,з \\
+\begin{array}{r} а\,б\,і\,з\,б\,з \\ є\,б\,б\,г\,г\,а\,ж \\ а\,б\,в\,г\,д\,е \end{array} \\
\hline
е\,ж\,б\,е\,е\,ж\,а\,б\,б\,з
\end{array}
$$

З того, що при п'ятицифровому множнику отримано чотири частинних доданки, випливає, що $б = 0$. Множене і останній з чотирьох частинних доданків однакові, тому $є = 1$. В стовпці сотень сума двох чисел $(г + в)$ закінчується на 0 $(б = 0)$, при цьому один із доданків також дорівнює 0. Тому другий доданок $(г)$ дорівнює 9 (при сумі $ж + з = 10$).

Із стовпчика, утвореного із сотень мільйонів, в стовпчик мільярдів переходить 2 мільярди, тому $в + в + 2 = 10$, звідки $в = 4$. В стовпчику, утвореному тисячами, є доданки $в$ і $ж$, сума яких дорівнює 10. Із стовпчика сотень в стовпчик тисяч переходить одиниця. Тому $а = 5$. Із першого стовпчика видно, що $є + а = е$, тому $е = 6$.

Оскільки в стовпчику десятків тисяч всі цифри відомі, а з попереднього стовпчика перейшов один десяток тисяч, тому можна знайти суму в цьому стовпчику, рівну 220 тисячам. Отже, $ж = 2$, звідки $з = 8$.

Лишається розшифрувати $і$ та $д$. Оскільки в першому рядку добуток $і$ на $е$ дорівнює 8, то звідси $і = 3$, отже, $д = 7$. Чоловічки витанцьовують, що $504976 \cdot 12083 = 6101625008$.

45. Золота — 7,1005 кг, срібла — 2,8995 кг.

ДО РОЗДІЛУ 3

1. Швидкість рівна 55 кг/год.

2. $АГ = 3\frac{1}{3}$ км.

3. Найкоротший шлях А Б В З В Г Д Є Д Е Ж Б З Г Є З Ж Є Е А Ж. Загальний шлях становить 211 км. Двічі пройдемо ділянки В З і Д Є.

4. Відповідь: 22 пункти (якщо рахувати старт-фініш), відстань між кожними двома сусідніми пунктами 15 км. Пункти передачі естафети всі рівноправні (будь-який з них можна прийняти за «старт»), тому вони ділять дорогу на n однакових відрізків по d км. Отже, потрібно знайти таке найменше n, щоб $75\,n$ ділилося на 330 або (що те ж саме) $5n$ ділилося на 22. Отримуємо $n = 22$. Відстань між сусідніми пунктами дорівнює $330 : 22 = 15$. В загальному випадку, якщо дорога має довжину a, а етап — b (a та b — натуральні числа, $a > b$). Тоді пункти, де передається естафета, знаходяться в вершинах правильного многокутника, відстань між якими по дорозі становить $l =$ Н С Д (a, b), а їх число $n = a : b$.

5. Четверта зустріч відбулася через $26\frac{2}{3}$ хв. Учні проїхали за цей час відстані : $6\frac{2}{3}$ км, $5\frac{1}{3}$ км, 4 км і $2\frac{1}{3}$ км.

6. Проведені міркування і викладки доводять лише таке: якщо прямокутник, про який йдеться в умові задачі, існує, то його гіпотенуза дорівнює $a\sqrt{5/3}$. Але саме існування такого трикутника нізвідки не виходить. Легко переконатися, що насправді такого трикутника не існує. У протилежному випадку величина плоского кута АРБ тригранного кута ВАОБ була б більшою суми величин двох інших плоских кутів АВД і ОВБ.

7. Нехай a і b — довжини сторін прямокутника. Тоді $a + b = l/2$, а площа цього прямокутника $S = ab = 1/4 \; ((a + b)^2 - (a - b)^2) = 1/4 \; (b^2/4 - (a - b)^2)$. З одержаного співвідношення видно, що площа прямокутника буде максимальною, коли $a = b$ і він стає квадратом. Тоді $S = l^2/16$. Тим самим доведено, що з усіх прямокутників з периметром l найбільшу площу має квадрат.

Дідона, напевне, скористалася тим, що вибирала ділянку на березі моря (мал. 26) і використала берегову лінію моря як одну із сторін прямокутника. Тоді $S = ab = (2a + b)^2 - (2a - b)^2 = 1/8 \; (l^2 - (2a - b)^2)$. Площа набирає максимального значення, якщо $b = 2a$, тобто при $a = l/4$ і $b = l/2$, і дорівнює $l^2/8$. При такому варіанті площа стає вдвічі більшою.

Можна довести, що серед усіх трикутників з двома даними сторонами a і b найбільшу площу (що дорівнює $l^2/8$) має той, у якого ці сторони взаємно перпендикулярні. А серед усіх прямокутних трикутників з даною сумою катетів найбільшу площу має рівнобедрений трикутник. Найбільшу площу на березі моря можна обмежити півколом з радіусом l/π, ця площа дорівнює $l^2/2\pi$.

8. Десантник, напевне, вийде з лісу, якщо йтиме по колу радіуса $r\sqrt{s/\pi}$. Справді, якби все це коло вміщувалося в середині лісу, то площа лісу була б більшою $\pi r^2 = S$.

Шлях має бути обов'язково замкненим або принаймні не містити точок самоперетину. В супротивному випадку, яким би довгим не був шлях l, існує ліс такої вузької смуги поовіч шляху l, що його площа не перевищує S (мал. 27). Уточнюючи проведені міркування, можна сказати, що десантник має йти по деякому замкненому маршруту l. Для того щоб при будь-якій формі лісу можна було гарантувати вихід на околицю лісу, необхідно і достатньо, щоб площа S, обмежена лінією l, була не меншою за S. При цьому якщо маршрут l вибраний найкоротший із можливих, то при найнесприятливіших ситуаціях десантнику, щоб вийти з лісу, доведеться пройти увесь (або майже увесь) маршрут l. Таким чином, задача при виборі «ефективної стратегії», зводиться до вибору поміж усіх замкнутих кривих, які обмежують площу S, найти криву найменшої довжини. А це вже відома нам ізопериметрична задача Дідони. (Дет. див. Радемахер Г., Теплиц О Числа и фигуры. М, Физматгиз, 1962, с. 169—174).

9. Стежка, яка починається біля найвищого дерева, потім йде прямо до наступного за висотою дерева, потім — до третього за висотою і т. д. до найнижчого дерева, має довжину меншу 40 м. Обгородивши парканом (довжиною 80 м) цю стежку, яка сполучає всі дерева, ми тим самим обгородимо парканом і весь ліс.

10. S серпк. $= 1/8 \, \pi b^2 + 1/8 \, \pi a^2 - 1/8 \pi c^2 + 1/2 \, ab = 1/8 \, \pi \, (a^2 + b^2 - c^2) + 1/2 \; ab = 1/8 \, \pi \cdot 0 + 1/2 \, ab = 1/2 \, ab$.

11. S арб. $= 1/2 \, \pi \, (AB/2)^2 - 1/2 \, \pi \, (A\Gamma/2)^2 - 1/2 \, \pi \, (\Gamma B/2)^2 = \pi/8 \, (AB^2 - A\Gamma^2 - B\Gamma^2) = \pi/8 \, ((A\Gamma + \Gamma B)^2 - A\Gamma^2 - \Gamma B^2) = \pi/4 \, A\Gamma \cdot \Gamma B = \pi \, (B\Gamma/2)^2$.

Для обчислення S сал. легко встановлюється рівність : $AБ^2 + \Gamma B^2 = 4/AE^2 + BE^2) = 2 \, (ДЄ^2 + AF^2)$. Її можна подати у термінах відношення площ кругів : $\pi \cdot AБ^2 + \pi \cdot \Gamma B^2 = 2 \, (\pi ДЄ^2 + \pi \, AF^2)$, або $1/2 \, \pi AБ^2 + 1/2 \, \pi \, \Gamma B^2 = \pi ДЄ^2 + \pi AF^2$. Але $\pi AF^2 = 1/2 \, \pi AF^2 + 1/2 \, \pi AБ^2$, тому $1/2 \, \pi AБ^2 + 1/2 \, \pi \Gamma B^2 - 1/2 \, \pi AF^2 - 1/2 \, \pi BБ^2 = \pi ДЄ^2$. Що й потрібно було довести.

12. Площі рівні.

13. Трикутники $AБE$ і $БCE$ рівнобедрені. З властивості зовнішнього кута ΔACE дістанемо $\angle\alpha = \angle 1 + \angle 3$, а $\angle 1 = \angle 2$ і $\angle 2 = \angle 4 + \angle 3$. Тому $\angle\alpha = 2\angle 4 + \angle 3 = 3\angle 4$. Звідки $\angle 4 = \alpha/3$.

14. $tg \; \angle 1 = 3 : 8 = 15 : 40$, $tg \angle 2 = 2 : 5 = 16 : 40$. Оскільки $A_1A_2 \parallel ББ_2$ то $AA_1Б$ не є відрізок прямої, а ламана, яка складається з ланок AA_1 і $A_1Б_1$, при цьому $AA_1 \nparallel Б_1Б$ і $< AA_1Б < 180°$. Аналогічно доводиться, що ламаними є $ББ_1B$, $BB_1\Gamma$ і $\Gamma\Gamma_1A$. Таким чином, фігура $AA_1ББ_1BB_1\Gamma\Gamma_1A$ є не квадрат, а опуклий восьмикутник. Аналогічно доводиться, що $A'A'_1Б'Б'_1B'B'_1\Gamma'\Gamma'_1A'$ теж не є квадратом, а угнутим восьмикутником. Непомітні для ока згини ліній далі при конструюванні нової

фігури різницю площі, рівновелику площі одного маленького квадратика. Таким чином, дві фігури не тільки не рівні, а й нерівновеликі.

15. Проаналізуємо варіанти перекроювання квадрата, при яких відбувається «приріст» і «втрата» площі, наприклад, коли: а) $x = 5$, $y = 3$; б) $x = 8$; $y = 5$.

І) Якщо E_1 і F належать прямій $B_1Д_1$, то $\Delta A_1B_1D \sim \sim \Delta MED$. $A_1B_1 : ME_1 = A_1D_1 : МД_1$, $5 : 3 = 13 : 8$, $40 : 24 = 39 : 24$. Але $40/24 \neq 39/24$, тому трикутники $A_1B_1D_1$ і ME_1D не є подібними і точка E_1 не належить прямій B_1D_1. Коли б вона належала цій прямій, то справджувалися б такі співвідношення:

$$5 : E_1M = 13 : 8,\ \ E_1M = \frac{40}{13} = 3\frac{1}{3} > 3.$$

Аналогічно можна довести, що F_1 не належить прямій B_1D_1 (коли б F_1 належала цій прямій, то виконувалася б рівність $NF = 3\frac{1}{13}$). Звідси випливає, що фігура $A_1B_1C_1D_1$ не є суцільною. Вона має всередині вузьку щілину у формі паралелограма $BFD_1\ H$ (мал. 28 а), площа якого дорівнює 1. Площа ж фігури, утвореної з частин даного квадрата, дорівнює:

$$2 \cdot 1/2 \cdot 3 - 8 + 2(3 + 5) : 2 \cdot 5 = 24 + 15 + 25 = 64.$$

ІІ) Для випадку $S = 169$ і $S_1 = 168$ матимемо не щілину в прямокутній фігурі, а навпаки — часткове перекриття площі (мал. 28 б).

Легко перевірити (зробіть це самостійно), що фігура перекриття має форму паралелограма, площа якого дорівнює 1.

Лишається відповісти ще на два запитання: 1) Чи можливий такий поділ сторін квадрата $ABCD$, при якому $S = S_1 = S_2 = S_3$? 2) Чому в розглянутих випадках $S - S_1 = S - S_2 = S - S_3 = 1$?

Як видно з малюнка, $S = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, $S = S_2 = 2x^2 + xy$, $S_3 = 3xy + 2y^2$, $S_1 - S = x^2 - - xy - y^2$, $S_3 - S = y^2 + xy - x^2 = -(x^2 - xy - y^2)$. $S = S_1 = S_2 = S_3$ тоді і тільки тоді, коли $x^2 - xy - - y^2 = 0$, або (якщо $x/y = \varphi$) $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ (1). $\varphi_{1,2} = = (1 \pm \sqrt{5}) : 2$.

Отже, якщо вибрати натуральні x та y такими, щоб їх відношення з певним ступенем точності наближалося до величини $(1 + \sqrt{5}) : 2$, то S_1, S_2, S_3 будуть як завгодно близько наближатися до S — площі квадрата $ABCD$. І тільки коли $x/y = (1 + \sqrt{5})/2$, то $S_1 = = S_2 = S_3 = S$.

Число φ надзвичайно популярне в математиці і її застосуваннях. Геометричний смисл його полягає в тому, що точка N здійснює «золотий переріз» відрізка AB. Справді, $(x + y)\ x = x/y$, $xy + y^2 = x^2$, $x^2 - xy - y^2 = = 0$. А додатним коренем останнього рівняння і є число φ.

Числове значення «золотого перерізу» позначають грецькою літерою φ (на честь визначного древньогрецького скульптора Фідія — III ст. до н. е.), який часто використовував його в своїх скульптурах, або τ (тау), від грецького τομπ — переріз.

Довжини відрізків, на які ділили відрізок BD у «сприятливих» випадках виражалися теж популярними в математиці числами. Вони пов'язані із задачею про кролів визначного середньовічного математика Леонардо Пізанського (бл. 1170 — після 1228), відомого за прізвиськом Фібоначчі (син Боначчо). Розв'язання її приводить до адитивного ряду 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... $U_n = U_{n-2} + U_{n-1}$, ... (чисел Фібоначчі). Хоча номери n і самі числа натуральні, залежність U_n від n виражається формулою $U_n = 1/\sqrt{5}\ ((1 + \sqrt{5})^n/2^n - (1 - \sqrt{5})^n/2)^n)$.

Формула дає $U_1 = U_2 = 1$, $U_3 = 2$, $U_4 = 3$ і т. д. При цьому виявляється, що $\lim\limits_{n\to\infty} (U_{n+1}) : U_n = \varphi$.

Таким чином, парадокс виникає в тих випадках, коли при розрізуванні квадрата x і y будуть послідовними членами ряду Фібоначчі або будь-якого адитивного ряду виду $a, b, a + b, a + 2b, 2a + 3b, \ldots U_n = U_{n-2} + + U_{n-1}, \ldots$

Якщо x і y — раціональні числа, то $S - S_1 \neq 0$, якщо ж вони натуральні, то $\min (S - S_1) = 1$. Ця найменша різниця досягається, коли x і y — послідовні пари ряду Фібоначчі виду: ($y = 3$, $x = 5$), ($y = 8$, $x = 13$), ($y = 13$, $x = 21$) і т. д. Це зрозуміло, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} U_{n+1} : U_n = \varphi$.

Чим більшими будемо вибирати числа Фібоначчі для довжини сторони квадрата, тим непомітнішим буде перекриття (щілина). Для малих чисел воно стає очевидним, й ілюзія парадокса зникає.

Використовуючи різні ряди Фібоначчі, можна дістати як завгодно багато варіантів парадокса цього типу.

Наприклад, квадрати, пов'язані з рядом 2, 4, 6, 10, 16, 26, ... дають приріст або втрату чотирьох одиниць площі, а квадрати, пов'язані з рядом 3, 6, 9, 15, 24, 39, ... — шести одиниць площі. В загальному випадку величину втрат або приростів площі можна обчислити як різницю: $U_n^2 - U_{n-1} \cdot U_{n+2}$.

Позначимо U_n, U_{n+1}, U_{n+2} через a, b, c, а втрату або приріст площі — через x. Матимемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a + b = c \\ b^2 = ac \pm x. \end{cases}$$

Підставивши замість x значення бажаного приросту або втрати площі, а замість b — значення довжини сторони квадрата, дістанемо рівняння, корені якого дадуть значення a і c, причому якщо квадрат перекроювати в фігури з раціональними довжинами сторін, то приріст або втрата площі ніколи не дорівнюватиме двом або трьом одиницям площі. Приріст або втрату в дві одиниці площі дає ряд Фібоначчі $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$, ... а втрату або приріст в три одиниці — ряд $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$, $5\sqrt{3}$, ..

Можна довести, що $U_n^2 = U_{n-1} \cdot U_{n+1} \pm 1$. Наприклад: $1^2 = 2 - 1$, $2^2 = 1 \cdot 3 + 1$, $3^2 = 2 \cdot 5 - 1$, $5^2 = 3 \times 8 + 1$ і т. д.

Ця властивість чисел Фібоначчі і регулює появу або зникнення одиниці площі. Якщо $AD = 5$, $x = 3$, $y = 8$, то $S = 25$ кв. од., $S = 24$ кв. од.; при $AD = 8$ $x = 13$ $y = 5$ $S = 64$, $S_1 = 65$ кв. од. Отже, вибираючи сторони квадрата із значеннями довжин з ряду 5, 13 34... ми втрачатимемо одиницю площі, а вибираючи їх з ряду 8, 21, 55 ... — маємо явний приріст.

$S = S_1$ лише тоді, коли $x : y = (1 + \sqrt{5}) : 2$. Це пояснюється тим, що тоді x і y беруться як послідовні члени адитивного ряду 1, φ, $\varphi + 1$, $2\varphi + 1$, $3\varphi + 2$... (інший — «мультиплікативний» запис його буде таким: 1, φ, φ^2, φ^3, φ^4, ...). А це єдиний адитивний ряд, в якому відношення будь-яких послідовних членів стале і дорівнює φ.

Докладніше про число φ і числа Фібоначчі див.: Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. М., 1978; Попов Є. Д. Алгебраїчні властивості відношення золотого перерізу.— У кн.: У світі математики. Вип. II. К., 1980; Реньи А. Трилогия о математике. М., 1980.

16. Периметр трикутника, за умовою дорівнює 3 ($Po = 3$), після першої побудови $P_1 = 4$, після другої $P_2 = 49/9$, $P_3 = 192/27$. Послідовність змінних периметрів можна записати так:

$$Po = 3 = 3 \cdot (4/3)^0,\ P_1 = 3 \cdot (4/3),\ P_2 = 48/9 = 3 \times \times (4/3)^2,$$

$P_3 = 192/27 = 3 \cdot (4/3)^3$, ... $P_n = 3 \cdot (4/3)^n$, ... Оскільки $\lim\limits_{n \to \infty} 3 \cdot (4/3)^n = \infty$, то периметр фігури, отриманої в результаті нескінченної послідовності побудов, буде нескінченної довжини. Отримана фігура називається сніжинкою Коха, або лінією Б. Л. Ван дер Вардена, за іменами математиків, які її відкрили і досліджували. В побудові лінії Ван дер Вардена нема ніякого парадокса. Такі лінії називаються фрактальними, або фракталями, і мають ряд цікавих властивостей. (Див.: Майсюк А. Фракталы — странности реального мира. Техника молодежи, 1979, № 2).

17. Після першої побудови ми викинули внутрішню частину квадрата, площа якого 1/9, а площа фігури, що утворилася, $S_1 = 1 - 1/9 = 8/9$. Легко перевірити, що $S_2 = 8/9 - 8/81 = 64/81 = (8/9)^2$, $S_3 = (8/9)^3$, ... $S_n = (8/9)^n$, ...

А оскільки $\lim\limits_{n \to \infty} (8/9)^n = 0$, то площа килима Серпінського дорівнює нулю.

18. Мал. 29.

19. Всі фігури побудовані шляхом відсікання площинами кутів ікосаедра. Якщо відсікати пірамідки з довжиною a бічного ребра, що дорівнює $(2 - \sqrt{2}) : 2$, отримаємо многогранник — зрізаний гексаедр (1); якщо $a = 0{,}5$ — кубооктаедр (2); при $a = 3/4$ — зрізаний октаедр (3); при $a = 1$ — октаедр (4).

20. Позначаємо радіус Землі r. Коло земної кулі (шлях, який проходить ступні туриста) дорівнює $2\pi r = 2 \cdot 3{,}14r$. Коло, по якому рухається його голова, матиме довжину $2 \cdot 3{,}14 \cdot (r + 175)$. Різниця пройдених шляхів дорівнюватиме $2 \cdot 3{,}14 \cdot (r + 175) - 2 \cdot 3{,}14 = 2 \times \times 3{,}14 \cdot 117 \approx 1100$ см $= 11$ м. Оскільки при обчисленнях радіус Землі скоротився, то не має значення буде турист мандрувати по Землі, Місяці чи футбольному м'ячу.

21. Нехай r_1, r_2, r_3, r_4 — радіуси концентричних кругів. Круги містять відповідно 1, 3, 7 і 15 частин. Оскільки площа кожного круга дорівнює πr_i ($i = 1$,

2, 3, 4), то з умови задачі виходить, що площі кругів відносяться між собою як $\pi r_1^2 : \pi r_2^2 : \pi r_3^2 : \pi r_4^2 = 1 : : 3 : 7 : 15$, звідки (враховуючи, що $r_i > 0$) $r_1 : r_2 : : r_3 : r_4 = 1 : \sqrt{3} : \sqrt{7} : \sqrt{15}$.

22. Розділимо квадрат прямими, паралельними сторонами, на 25 менших квадратиків із стороною 1/5. Якби в кожний квадратик потрапило не більше двох точок, то всього на 25 квадратиків потрапило б не більше 50 точок. Отже, знайдеться принаймні один квадратик, в який потрапили три точки. Оскільки діагональ цього квадратика $\sqrt{2/5} = \sqrt{4/50}$ менша, ніж $2/7 = \sqrt{4/49}$, то цей квадратик можна покрити кругом діаметра 2/7.

23. 4 км/год. Сума периметрів усіх кварталів дорівнює подвоєній довжині всіх вулиць плюс довжина кільцевої дороги.

24. Досить припустити, що куб складений чергуванням чорних і білих одиничних кубиків (мал. 30). Чорних кубиків виявиться 14, а білих 13. 13 цеглинок заповнять 13 чорних і 13 білих кубиків. З даних цеглинок можна утворити тіло, якщо з кубика $3 \times 3 \times 3$ усунути будь-який чорний кубик.

25. Переможця не буде тому, що такий маршрут прокласти неможливо.

26. Можна, якщо розмістити станції в вершинах куба, вписаного в кулю.

27. Побудуємо точку A', симетричну точці A відпо-відно берега Молочної річки, і точку $Б'$, симетричну точці $Б$ відносно берега Кисільної річки (мал. 31). Сполучимо точки A' і $Б'$ відрізком прямої. Шлях $A'A_1Б_1Б'$ — найкоротший.

28. $AB = 1/3$ шляху, $ВГ = ГД = 1/6$ шляху, $ДК = 1/3$ шляху. Лісовик пройшов усього 300 верстов. Івасик міркував так, якщо пройти на північ півдоби і повернути на схід, то ще через півдоби він буде в таборі (мал. 32). Шлях Лісовика позначений пунктирною, а Івасика — суцільною лініями.

29. Мал. 33.

30. Щоб потрапити в найближчу точку протилежного берега, де Лисиця залишила валізу, потрібно скерувати човен під кутом до течії річки (мал. 34). Оскільки Кролик гребе не набагато швидше течії, на цю переправу піде дуже багато часу. Кролику потрібно гребти прямо. Нехай човен дуже знесе за течією. Кролик відкомпенсує втрачений час, швидше добігши до валізи берегом.

31. На мал. 3.20 дано розгортку кубів 1 і 4, на мал. 3.21 – розгортку деталі 2.

32. Мал. 35.

33. Мал. 36.

36. Мал. 37.

37. Мал. 38.

38. Мал. 39.

39. Мал. 40.

40. Мал. 41.

41. Мал. 42.

43. Фрагмент 2.

44. Із міркувань симетрії зрозуміло, що черепахи можуть зустрінутися тільки в центрі квадрата. В кожну мить часу (до зустрічі) вони розміщуються в вершинах якогось квадрата.

Із умови задачі випливає, що коли повернути квадрат на 90° так, щоб вершина A перейшла в $Б$, $Б$ в $В$ і т. д., то траєкторія черепахи a (до певної миттєвості) співпаде з траєкторією $б$, траєкторія $б$ з траєкторією $в$ і т. д.

Оскільки кожна черепаха за умовою рухається весь час в напрямку наступної, то її швидкість в кожну мить часу скерована під кутом 45° до відрізка, який сполучає її з точкою 0. Словом, проекція швидкості на цей відрізок дорівнює $v/\sqrt{2}$. Таким чином, відстань черепахи від центра зменшується рівномірно із швидкістю $v/\sqrt{2}$. Отже, ця відстань дорівнюватиме нулю при $t = q/v$, спочатку вона дорівнює $q/\sqrt{2}$, тобто черепахи зустрінуться через проміжок часу q/v після початку руху.

45. $6 \cdot 10^{24} : 6 \cdot 10 = 10^{23}$ м; $1 \text{ м} \cdot 10^{23} = 10^{20}$ км. (Для порівняння нагадаємо, що відстань від Землі до Сонця близько $1{,}5 \cdot 10^8$ км).

ДО РОЗДІЛУ 4

1. 4 горобці і 3 стовпці.

2. 5 і 7.

3. 50.

4. 1, 2, 3, ... 9.

5. 36 гусей.

6. 24 000

7. Три сестри і чотири брати.

8. 1 чоловік, 5 жінок, 14 дітей.

9. Ця знаменита задача-мандрівниця була вміщена ще в давньоєгипетському папірусі, який писець Ахмес переписав ще з давніших джерел, близько XVIII ст. до н. е. Розв'язання її зводиться до обчислення п'ятого члена геометричної прогресії : 7, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5. Усіх паляниць $7^5 = 16\,807$. В інших варіантах запитується: скільки всього? Тоді потрібно обчислювати суму: $S_5 = 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 = 7 + 49 + 343 + 2401 + 16807 = 19\,607$. У давньоруській народній математиці задача відома понад тисячу років (див. задачу 9 цього розділу).

10. Лошат 64 000.

11. Задача зводиться до системи рівнянь:

$$\begin{cases} 10x + 5y + \frac{1}{2} z = 100 \\ x + y + z = 100, \end{cases} \qquad (1)$$

де x, y — відповідно позначають кількості куплених коней, корів і овець. Рівняння та системи рівнянь, у яких кількість невідомих більша за кількість самих рівнянь, називаються діофантовими на честь давньогрецького математика Діофанта, який першим дав алгоритми розв'язування деяких таких рівнянь та їх систем. Система (1) еквівалентна системі:

$$\begin{cases} 20x + 10y + z = 200 \\ x + y + z = 100. \end{cases}$$

Віднімаючи почленно від першого рівняння друге, дістанемо діофантове рівняння першого степеня з двома невідомими: $19x + 9y = 100$. Наступний хід розв'язання такий: $y = (100 - 19x) : 9 = 11 - 2x + (1 - x) : 9 = 11 - 2x + t$, де $t = (1 - x) : 9$, звідки $x = 1 - 9t$. Тому $y = 11 - 2(1 - 9t) + t = 11 - 2 + 18t + t = 9 + 19t$. Оскільки $x > 0$ і $y > 0$, то $1 - 9t > 0$ і $9 + 19t > 0$, тому $-19/9 < t < 1/9$, $t = 0$. Отже, $y = 9$, $19x + 9 \cdot 9 = 100$, $19x = 100 - 81$; $19x = 19$, $x = 1$; $1 + 9 + Z = 100$, $Z = 90$. Обчислені значення x, y, Z задовольняють і перше рівняння системи. Купили одного коня, 9 корів і 90 овець.

Народні числолюбці розв'язували аналогічні задачі методом добору. Ця була складна розумова робота. Адже автор таких задач мав уже володіти досить тонкими числовими залежностями.

12. Застосований народними умільцями розв'язок задачі на побудову правильного п'ятикутника можна об-

грунтувати таким доведенням. За теоремою Піфагора з трикутника OBE маємо:

$$BE = \sqrt{R^2 + (R/2)^2} = (R\sqrt{5}) : 2;$$

$$OF = EF - OE = BF - OF = R/2\,(\sqrt{5} - 1).$$

За теоремою Піфагора:

$$FB = \sqrt{R^2 + R^2/4\,(\sqrt{5} - 1)^2} = R^2/2\,\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Отже, дістали числовий вираз для довжини сторони правильного п'ятикутника, вписаного в коло.

13. $\Delta ABC \sim \Delta AB'C'$. Але в $\Delta AB'C'$ $AB' = B'C$, тому й в ΔABC $AB = BC$. Отже, висота дерева дорівнює відстані від голови людини до стовбура.

15. I) Подвоєний відрізок A_1L буде стороною квадрата, який задовольняє умову задачі. II) Сторона рівностороннього трикутника, площа якого дорівнює приблизно S, становить $2\,C_2D$. III) Сторона правильного шестикутника — це більший відрізок сторони квадрата, поділеної в «золотому відношенні», тобто лінія A_1D. IV) За діаметр круга можна взяти найбільшу сторону найбільшого прямокутника вавілона.

16. Камінь затягли в двір за 4 дня.

17. Сто мір пшениці; 75, 15, 10.

18. 7 дочок, 48 мотків.

19. $8 \cdot 7^4 = 19\,208$.

20. Батько склав заповіт непередбачливо: сума частин $1/2 + 1/3 + 1/9$ становить не одиницю, а 17/18. Точне виконання заповіту, якщо не рахуватися з вимогами доцільності і практичної реалізації, передбачає передачу старшому синові 17/2 верблюда, середньому 17/3, молодшому 17/9, що становить $289/18 = 16\,1/18$, а 17/18 від одного верблюда залишаються поза розподілом. Мудрець підмінив умови заповіту, приєднавши до спадщини свого верблюда. Тоді старший отримав $1/2 \cdot 18 = 9$, середній — $1/3 \cdot 18 = 6$, а молодший $1/9 \times 18 = 2$ верблюди. Але такий розв'язок не є точною реалізацією заповіту, а лише доцільним наближенням до його вимоги. Старший син фактично отримав більше на $9 - 17/2 = 1/2$ верблюда, середній на $6 - 17/3 = 1/3$, а молодший на $2 - 17/9 = 1/9$. Ці надбавки в сумі вичерпують 17/18 верблюда, які згідно із заповітом залишилися поза розподілом.

ДО РОЗДІЛУ 5

1. Усі п'ять вершин графа ейлерової задачі непарні, отже, граф її неунікурсальна крива. Здійснити прогулянку за заданих умов неможливо.

2. Мал 43.

3. Мал. 44.

4. На графі підземелля (мал. 45) — вершини кімнати, а ребра сполучають ті вершини, які відповідають кімнатам, зв'язаним дверима. Лише дві вершини графа непарні : 6 (крайня) і 18 (не крайня) Існує ейлерів шлях із 6 у 18.

5. *E* належить Манилову, *D* — Коробочці, *C* — Ноздрьову, *A* — Собакевичу, *B* — Плюшкіну, *M* — Тентетникову, *F* — Бетрищеву, *H* — Петуху, *K* — Констанжогло, *O* — Кошкарьову.

6. Вважатимемо кожне дерево вершиною графа, а шлях зайця від дерева до дерева — ребром графа. Усі вершини графа (крім вершин *B* і *L*) парні. Отже, або заєць перебуває під деревом, позначеним літерою *L*, а його нора під деревом *B*, або навпаки. Задача має два розв'язання.

9. З графа даної ситуації (мал. 46) бачимо, що він унікурсальний і має лише дві непарні вершини (20 і 23). Розв'язання задачі звелося до можливості викреслити цей граф одним розчерком.

11. 6 або 7 (на одному з них початок екскурсії, на іншому — кінець).

12. 2 або 6, якщо рух розпочинати з перехрестя 2, то гараж знаходиться на перехресті 6, і навпаки.

13. Вважатимемо, що, крім п'яти кімнат, вказаних на плані, (мал. 5.13), є ще й шоста — та, у яку ведуть зовнішні двері (територія, що оточує склад). Існування маршруту із заданими властивостями залежить лише від кількості кімнат з непарним числом дверей. У складі до реконструкції було лише дві кімнати з непарним числом дверей — «зовнішня» (на територію, що оточувала склад, виходило 7 дверей) і кімната *B* (5 дверей). Після реконструкції стало чотири кімнати з непарним числом дверей (*B*, *D*, *E* і «зовнішні»). Тому шуканий маршрут повинен мати два розрізнених початки і два розрізнених кінці, тобто неперервним бути не може. Щоб такий маршрут був можливим, необхідно замурувати одні двері, спільні для двох кімнат з непарним числом дверей.

14. I) Навряд, бо існує багато варіантів обходу виставки з використанням умов задачі. Наприклад: 1, 2, 3, 20, 19, 16, 17, 18, 14, 8, 7, 6, 5, 11, 12, 13, 15, 10, 9, 4, 1. II) Звичайно! Але виконати основну умову — побувати в кожній залі лише по одному разу — не вдасться. III) Зможе, наприклад, ідучи таким маршрутом: 11, 5, 6, 7, 12, 13, 15, 17, 16, 19, 20, 18, 14, 8, 3, 2, 1, 9, 10, 11. Або скористатись головним маршрутом (відповідь на запитання I). IV) Зможе. V) Є багато варіантів відповіді. Наприклад: 11, 10, 9, 2, 4, 5, 6, 2, 3, 20, 19, 16, 17, 15, 13, 14, 8, 7, 12, 11. Екскурсії по виставці є планіметричною інтерпретацією гри, придуманої визначним ірландським математиком У. Р. Гамільтоном (1805—1865) і названої «Подорожі по додекаедру». На прикладі «додекаедрової гри» вчений хотів продемонструвати деякі не зовсім звичайні властивості розробленого ним числення, багато в чому схожого з відкритим ним же численням кватерніонітів. Гамільтонова гра переросла в теорію гамільтонових графів, яка має не лише теоретичні, а й прикладні застосування.

15. Гемптон-Кортський лабіринт не є зв'язним. Він містить дві ізольовані стіни, що добре ілюструється графом лабіринту (мал. 47). Гарріс міг без кінця кружляти навколо однієї з цих стін, користуючись правилом правої руки (якщо йти за рухом годинникової стрілки) або лівої (при русі в протилежному напрямі).

17. Рухаючись до центру лабіринту (мал. 5.17) через вхід 1, не можна скористатися ні правилом правої, ні правилом лівої руки; вхід 2 дає можливість пройти до центру, скориставшись лише правилом лівої руки; вхід 3 — лише за допомогою правила правої руки.

24. Мал. 48.

26. Мал. 49.

27. Якщо рахувати кожні замкнені двері після того, як вони відкрилися, першими дверима в новій послідовності, то алгоритм виходу буде мал. 50 а, якщо ж їх не рахувати в новій послідовності, то мал. 50 б.

28. Мал. 51.

29. В обох випадках потрібно вставити деталь 4 (мал. 52).

ДО РОЗДІЛУ 6

1. Книжка мовчки все розкаже.

2. Правда кривду переважить.

3. Розгадані знаки шифру

Не виказуйте мене я ваш друг ціла зграя найвідчайдушніших злодюг з індіанської території збирається цієї ночі вкрасти вашого негра втікача вони вас лякали щоб ви сиділи вдома і не заважали їм я теж із ватаги тільки я повірив у бога і хочу кинути розбій і стати чесною людиною ось чому я вам викрив їхній пекельний задум вони підкрадуться з півночі вздовж паркана рівно опівночі у них є підроблений ключ від того сарая де сидить негр утікач якщо їм загрожуватиме небезпека я повинен просурмити в ріжок але замість цього я бекатиму як вівця коли вони залізуть у сарай я сурмити не буду поки вони зніматимуть з нього кайдани ви підкрадьтеся і замкніть їх усіх на замок тоді ви їх зможете спокійно повбивати робіть те що я вам кажу і більш нічого а то вони щось запідозрять і вчинять справжній шарварок ніякої винагороди я не бажаю з мене досить і того що я вчинив по чесному невідомий друг.

4. Математика увійде в усі галузі знання.

5. $x_1 = 2$, відрізок; $x_2 = 4$, сектор; $x_3 = 3$, піраміда. Остання криптограма при $x = 3$ перетворюється в 19—11—20—1—16—11—5—1.

Як можна отримати від додавання $30 + 3$ одиницю? $30 + 3 = 33$, але в українському алфавіті 32 букви, тому за числом 32 лічбу потрібно продовжити від 1.

6. В криптограмі записано:

«Члени таємної групи!

Повідомляємо,

сьогодні о п'ятій

вечора збір.

Треба прийняти

термінове рішення.

Не забудьте пароль і жетони».

(Детальніше див.: Перо рожевої чакви. Повісті, оповідання та казки. К.: Веселка, 1984, с. 47—48).

7. Прологарифмувавши за двійковою таблицею логарифмів шифр дати, отримаємо: $\sqrt[3]{6064321219} = 9{,}78 : 3 = 3{,}26$.

Припустімо, що характеристика числа вказує на дату. Вона завжди на одиницю більша. Отже, день можна вважати встановленим — 4-й. Місяць не може бути числом, яким записана мантиса. Але, коли скласти ці числа, отримаємо $2 + 6 = 8$. Такий місяць можливий — серпень. Рік, ймовірно, розгадаємо, обчисливши число за даним логарифмом. Користуючись п'ятірковими логарифмами, знайдемо число 1823.

Якщо ви міркували приблизно так, то були на вірному шляху, бо листа Абель написав 4 серпня 1823 року.

8. Нехай той, хто не математик, не читає мене.

9. Андрій виписав у два ряди лише двадцять приголосних букв, а решту залишив без зміни:

Б	В	Г	Д	Ж	З	К	Л	М	Н
Л	Р	С	Т	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ

У протоколі записано: «Ухвалили: перший загін чергує по їдальні, другий по двору, третій по сходах».

10. Ученому й книги в руки.

11. Текст потрібно читати з кінця: «Все готово. Ждем ваших распоряжений из Триеста. Получив условный сигнал, все поднимутся как один за независимость Венгрии. Эшкуфц». (Докладніше див.: Верн Ж. Собр. соч., т. 12, М., ГИХЛ, 1957. с. 52—60).

12. «Собрание делегатов района отмените. Полиция кем-то предупреждена. Антон».

13. «Кожний день, у який ви не поповнили своєї освіти, хоча б маленьким, але новим для вас куском знань ... вважайте безплідно й безповоротно для вас втраченим».

14. «Техніка майбутнього — складна техніка, вона буде підкорятись лише людям, які знають і вміють».

15. «У механізації робіт, дистанційному керуванні механізмами і управлінні за програмою, автоматизації процесів і захисту обладнання від аварій, у пристроях, що автоматично надсилають світловий чи звуковий сигнал при відхиленні параметра від норми, в контролі й обліку роботи обладнання полягає автоматизація всього виробництва».

16. Літера добирається в два прийоми. Чисельник дробу позначає порядковий номер квадратика, а знаменник — номер квадратика вже з літерою по вертикалі. Якщо вписати в квадратики замість дробу літери, прочитуються пророчі слова К. Е. Ціолковського: «Людство не залишиться вічно на землі, а в погоні за

світлом і простором спочатку несміливо проникатиме за межі атмосфери, а потім завоює собі весь навколишній простір».

17. Якщо отримані числа записати в двійковій системі числення і одне під одним, то отримаємо таблицю:

```
1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0 1
1 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 1
1 0 0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 1
1 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 1
1 1 1 0 1 1 1 0 0 1 0 0 1
```

Витерши нулі, отримаємо:

```
1 1 1   1 1 1   1 1 1   1
1       1         1     1
1       1 1 1     1     1
1       1         1     1
1 1 1   1 1 1     1     1
```

Отже, маємо назву конференції, яка працювала.

18. Визначимо спочатку, який із значків відповідає знаку = . Цей знак зустрічається по одному разу в кожному рядку, при цьому він не може стояти ні на початку, ні в кінці рядка. Легко побачити, що знак = зашифрований знаком П. Порівнюючи число знаків ліворуч і праворуч від нього, встановлюємо, що знак + зашифрований значком ⦶, а знак — значком<. Підставивши розшифровані знаки, отримаємо:

>]⊖ = ∨⊕⊖ − □□⊔

∨∧⊖ + > ∨ = □⊔□∧

⊕∧⊔⊖ = ⊕□∨∨ + [

□⊔[[− > ∨ = ∨⊖○

З четвертої рівності видно, що □ — 1, а ∨ — 9; потім знаходимо, якими значками зашифровані й інші цифри: ∧ — 2, ⊖ — 3, [— 4, ○ — 5,] — 6, ⊕ — 7, > — 8.

19. $9 \cdot 631 = 5679$, $999 + 5 = 1004$, $82 - 181 = -99$, $75 \times 16 = 12000$, $26 : 6 \approx 4{,}667$.

20. Якщо позначені номерами літери виписати в порядку зростання чисел, то утвориться текст висловлювання: «Принимаясь за дело, подумай, стоит ли оно того».

У загадковій грамоті наведено повністю перші чотири рядки вірша О. С. Пушкіна «Талисман». Насправді цього не могло бути, бо грамота датована роком, коли поет ще не народився.

21. Стрілка компаса, зображеного на шифровці, схилена на 45° Це означає, що й шифровку слід повернути за годинниковою стрілкою на 45°. В основі шифровки — квадрат сьомого порядку (мал. 53). Якщо кожну літеру, яка вписана за цим квадратом, перенести на сім клітинок (вгору, вниз, праворуч, ліворуч), то виявиться, що для кожної з них у квадраті є єдина вільна клітинка, яку позаквадратові літери заповнюють всі без пропусків. Тоді в квадраті й читається повідомлення розвідників.

22. Ключові слова: «трубадур», «клоп», «ніл», «юнкор». Зашифрована українська приказка: «Наука і труд добрі плоди дають».

23. (Мал. 54). «Загону рухатися в тому самому напрямі».

24. «Тисячі шляхів ведуть до помилки, до істини — тільки один».

25. Мал. 55. «Воюють не числом, а вмінням. Суворов». «Ні кроку назад, стояти на смерть! Кутузов».

26. «А математику ще й тому вивчати слід, що вона розум до ладу доводить».

27. «Життя Миколи Островського завжди буде яскравим маяком для нашої молоді».

28. «Праця, яка подобається, перестає бути працею». Читати потрібно, починаючи з літери, записаної в клітинці, позначеній крапкою, через дві клітинки — в третій.

ДО РОЗДІЛУ 7

1. Якщо позначити всю кількість яблук через x, то розв'язування задачі приводить до рівняння: $x - \frac{1}{12}x - \frac{1}{5}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{20}x - \frac{4}{4}x - \frac{1}{7}x - 30 - 120 - 300 = 50$, звідки $\frac{168}{25}x = 500$, $x = 3360$. Кліо взяла 672 яблука, Евтерпе — 280, Талія — 420, Терпсіхора — 840, Ерато — 480, Мельпомена — 168.

2. 28 учнів.

3. Потрібно розрізняти намір пішохода-дивака і майбутню подію, незалежну від його наміру. Якщо

йшлося про намір дивака закінчити своє життя на згаданій шибениці, то він міг сказати правду (тобто й справді міг хотіти розпрощатися з життям у такий спосіб). У цьому випадку його бажання не могли задовольнити судді, і ніякої суперечності тут не виникає. Закон власника помістя тут виконаний. Якщо ж висловлене диваком твердження стосувалося майбутньої події незалежно від його бажання, то воно стає парадоксом. Будь-який вирок суддів суперечитиме закону.

4. Розв'язання Орбеліані.

Перекинув Рукха місток. Привели вовка й козу, принесли в'язку сіна. Тоді прийшов Джумбер, узяв козу, перевів через місток і залишив її на тому боці. Повернувся, взяв вовка, перейшов міст, залишив його на тому боці й перевів назад козу. Залишив її, взяв сіно, перейшов міст і склав сіно на землі поруч з вовком.

Повернувся ще раз, узяв козу і перевів її на той бік.

5. Звали цих трьох чоловіків: Мелас, Метур і Марасан. Мелас притягнув човна, сів, посадив свою дружину, переправився на інший бік, висадив її на березі і повернувся назад. Двоє інших чоловіків посадили в човен своїх дружин, і ті переправилися до жінки, яка вже була на тому березі. Дружина Меласа сіла в човен і, переправившись назад, повернулася до свого чоловіка. Метур і Марасан сіли в човен і переправилися до своїх дружин. Метур сів у човен, узяв свою дружину і повернувся до Меласа. Метур і Мелас залишили своїх дружин на тому березі, а самі сіли в човен і переправилися до Марасана. Дружина Марасана сіла в човен і переправила на інший берег дружину Меласа. Тоді човен узяв Метур, перевіз свою дружину, і всі рушили далі.

6. Усього в них тридцять кіз і шістдесят козенят. Ті десять кіз, у яких по двоє козенят, віддайте старшому брату — це становитиме десять кіз і двадцять козенят. З тих кіз, які мають по троє козенят, віддайте п'ять разом з козенятами середньому братові і п'ять молодшому, що становитиме по п'ять кіз, по п'ятнадцять козенят на брата. З тих десяти кіз, що мають по одному козеняті, віддайте кожному з тих самих двох братів по п'ять кіз разом з козенятами, і буде в кожного всього по десять кіз і по двадцять козенят. Жодний з братів не одержить більше за інших, і жодне козеня не буде розлучене із своєю маткою.

7. Припустимо, що бідняк дістав двісті червінців за годину й працював по 15 годин на день. Тоді він діставав 3000 червінців за день і близько 1 000 000 за рік.

Отже, гаманець був у його руках понад дев'ять років.
За цей час можна посивіти ... Крилов обгрунтував свою
байку математично.

8. Вона полягає в тому, що людина, яка задумала
число, яке б воно не було, потім віднімає це число від
суми того самого числа і деяких інших підказаних чи-
сел. Тому демонстратору математичного фокуса легко
підрахувати остаточний результат. Наприклад: $((x +$
$+ 100 + 206 + 310 + 500 - x) : 2) \cdot 3 = 174$.

9. Для обчислень необхідно скористатися формулою
складних процентів. Припустімо, що ломбард випла-
чує p % річних і щорічно до внеску приховує процент-
ні гроші, наступного року процентні гроші нарахо-
вуються з процентного внеску і т. д. Через рік сума
внеску збільшиться на $p/100$ цієї суми і для нашого
прикладу становитиме $3 + (p/100) \cdot 3 = 3x\,(1 + p/100)$.

Через два роки внесок становитиме $3\,(1 + (p/100) +$
$+ 3\,(1 + p/100)\,p/100 = 3\,(1 + p/100)^2$ і т. д., а через
50 років, згідно з проведеним обчисленням, $3\,(1 +$
$+ p/100)^{50} = 800$.
Звідки $50 \lg (1 + p/100) = \lg 267 = 2,4265$, $\lg (1 +$
$+ p/100) = 0{,}04853$, $1 + p/100 = 1{,}1118$, $p/100 \approx$
$\approx 0{,}1118$, $p \approx 11{,}18$.

Апетит Порфирія Головльова перевершував реаль-
ність навіть при таких казкових процентах.

10. Першого разу селянка продавала свої яблука
по 1/2 коп., а другого разу свої й сусідчині продавала
по 2/5 коп., тому вона недоторгувала на своїх яблуках
$(1/2 - 2/5) \cdot 30 = 3$ коп., але за яблука сусідки вона
вторгувала більше, ніж вторгувала б сусідка, на $(2/5 -$
$- 1/3)\ 30 = 2$ коп. Отже, загальна втрата й становить
1 коп.

11. Сам Л. М. Толстой розв'язував цю задачу так.
Якщо більшу луку півдня косила вся артіль і півд-
ня пів-артілі, то ясно, що за півдня пів-артілі скошу-
ють 1/3 луки. Отже, на малій луці лишилася нескоше-
ною частина: $1/2 - 1/3 = 1/6$. Якщо один косар за день
скошує 1/6 луки, а скошено було $6/6 + 2/6 = 8/6$, то
косарів було 8.

Професор О. В. Цінгер згадує, що Л. М. Толстой,
який все життя любив фокуси і не вельми хитрі задачі,
цю задачу знав з молодих літ. Будучи вже старим, пись-
менник говорив, що його особливо захопило те, коли
задача стає значно яснішою і прозорішою, якщо при
розв'язуванні її користуватися дуже простим креслен-
ням. (мал. 55).

Алгебраїчне розв'язання:

Нехай x — число косарів артілі і y — розмір ділянки, яку один косар скошує за 1 день. Змінна y — допоміжна, вона вводиться лише для полегшення розрахунків, а потім від неї звільнюються. Площа більшої луки дорівнює $xy/2 + xy/4 = 3xy/4$, площа малої $xy/4 + y = (xy + 4y)/4$. За умовою площа більшої луки вдвічі більша за площу меншої, тому $3xy/4 : (xy + 4y)/4 = 2$, або $3xy : (xy + 4y) = 2$. Оскільки $y > 0$, то чисельник і знаменник лівої частини можна поділити на y. Отже, $3x/(x + 4) = 2$, звідки $x = 8$.

12. Про цю задачу згадує в щоденнику секретар Л. М. Толстого В. Булгаков (Л. Н. Толстой в последний год жизни. М., 1957, с. 402): «Дуже захоплюється сьогодні привезеною Тетяною Львівною з Кочетів задачею «Про муху та павука», усім її пропонує і запитує розв'язання ... Слід сказати, що задача ця розв'язується не відразу й не просто».

Нехай довжина кімнати 7 аршинів, ширина 6, висота 4. Припустімо, що муха сидить на більшій стіні на відстані 2 аршини від кутка, а павук на протилежній стіні — на відстані одного аршина від наближчого до нього кутка (мал. 56).

Виконаємо розгортку кімнати і сполучимо відрізками прямої точку, де сидить павук, з точкою, де сидить муха. Задача має три розв'язання залежно від трьох можливих розгорток. Справді, павук може повзти або тільки по стінах, або тільки по стінах і стелі, або тільки по стінах і долівці. Оскільки відстані від мухи до долівки і від павука до стелі однакові, то шляхи через долівку і стелю рівні. Тому для двох шляхів і береться спільна розгортка. Застосувавши теорему Піфагора, отримаємо:

$$МП_1 = \sqrt{197} \approx 14{,}04, \quad МП_2 = \sqrt{116} \approx 10{,}77,$$

$$МП_3 = \sqrt{145} \approx 12{,}04.$$

Найкоротшим буде шлях 10, 77 аршини, це і є розв'язання задачі.

13. У задачі йдеться лише про те, хто є сусідом кожного з гостей за столом ліворуч та праворуч. Тому потрібно ототожнювати два розміщення, якщо при переході від одного з цих розміщень до другого кожен з гостей за столом має в обох випадках одних і тих самих сусідів.

Взагалі число різних розміщень 20 чоловік на 20 місцях, тобто число перестановок цих 20 чоловік, дорівнює 20! незалежно від того, де знаходяться стільці,— за столом, біля стіни або де-небудь ще.

Розіб'ємо всі 20 розташувань на групи, віднісши до однієї групи ті і лише ті розташування, які можна ототожнити у відповідності до умови задачі. Число отриманих таким чином груп і буде відповіддю задачі. Щоб знайти це число, з'ясуємо спочатку, скільки розташувань виявиться в одній групі. Виберемо одну довільну таку групу і розглянемо розташування людей за столом, які до неї потрапили. У кожного в цих розташуваннях — сусід праворуч і ліворуч. Тому, щоб побудувати довільне розташування із даної групи, достатньо вказати людину, яка займе стілець № 1 (вважатимемо, що стільці занумеровані по колу числами від 1 до 20), після цього місця решти людей визначаються вже однозначно. Оскільки на місце № 1 можна посадити будь-кого з 20 чоловік, то кожна група складена з 20 розташувань. Щоб знайти тепер число груп, залишається розділити загальне число розташувань на число розташувань в одній групі: $20!/20 = 19! = 121\,645\,100\,408\,832\,000$.

У простому році $354 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 30\,585\,600$ секунд. Якщо на одне пересідання витратити 10 секунд і займатися цілодобово й без перерви цією справою, то на всі пересідання доведеться витратити $121\,645\,100\,408\,83\,20 : 305\,856 \approx 4\,000\,000\,000$ років.

14. Нехай x — перший множник, y — другий. Віднявши від кожного із співмножників число 5, дістанемо $x - 5$ і $y - 5$. Додавши знайдені різниці $x + y - 10$, маємо десятки добутку.

Тепер займемося незагнутими пальцями. Якщо загнуто $x - 5$ пальців, то незагнутих лишилося $5 - (x - 5) = 10 - x$. Отже, добуток незагнутих пальців дорівнює $(10 - x) \cdot (10 - y)$. Тому добуток дорівнює $10\,(x + y - 10) + (10 - x) \cdot (10 - y)$. Розкривши дужки, переконуємося, що добуток завжди дорівнює xy. При зведенні подібних членів усі, крім xy, скоротилися. Спосіб множення Л. М. Толстого завжди дає правильні результати.

Ми вважали, що десятки добутку — це $x + y - 10$. Але це правильно лише в тому випадку, коли добуток $(10 - x)\,(10 - y) < 10$. Оскільки ж x і y можуть набувати значень 6, 7, 8, 9, то $10 - x$ і $10 - y$ — це числа з множини (1, 2, 3, 4). Легко показати, що їх добуток може бути й більшим від 10. Тому при множенні за способом Л. М. Толстого 9×9 або 9×8 (а також 8×9) число десятків у добутку не дорівнює сумі загнутих пальців. Але й в цьому випадку добуток можна знайти, приклавши до числа десятків, яке дорівнює сумі загнутих пальців, добуток усіх незагнутих пальців.

15. Алгебраїчний метод приводить до розв'язування системи двох рівнянь з двома змінними першого степеня : $x + y = 138$, $5x + 3y = 540$, де x — число аршинів синього, а y — чорного сукна.

Арифметично задача розв'язується методом на припущення. Якби все сукно було синє, то за нього довелося б платити $5 \cdot 138 = 690$ крб., що на $690—540 = 150$ крб. більше того, що було заплачено насправді. Чорного сукна було куплено $150 : 2 = 7$ арш. синього $138 — 75 = 63$. Так мав розв'язувати задачу Удодов-молодший.

На рахівниці розв'язування задачі спрощується завдяки перевагам, які можна здобути, добре володіючи цим лічильним пристроєм. Удодов-старший діяв таким чином: $138 \cdot 10:2 = 690$, $(690 — 540):2 = 75$. Ці дії на рахівниці виконуються надзвичайно швидко в два прийоми. Остання дія дає: $138—75 = 63$. Таким чином, великий письменник і в математичній частині оповідання не поступився істиною.

16. Нехай у першої селянки було x яєць, тоді в другої $100 — x$. Якби перша мала $100 — x$ яєць, то вона виторгувала б 15 крейцерів. Отже, перша продавала яйця по $15:(100 — x)$ за штуку. Аналогічно міркуючи, знаходимо, що друга селянка продавала яйця по ціні $6\frac{2}{3}:x = \frac{20}{3x}$ за штуку.

Тепер визначимо справжній виторг кожної селянки: першої — $x\,(15:(100 — x)) = 15x:(100 — x)$, другої — $(100 — x)\;20/3x = (20\,(100 — x)):3x$. Оскільки виторги були однакові, то $15:(100 — x) = (20\,(100 — x)):3x$. Після перетворень отримуємо рівняння $x + 160x — 8000 = 0$, яке має корені $x = 40$, $x = —200$. Умову задачі задовольняє лише перший корінь. Перша селянка принесла 40 яєць, друга — 60.

Другий спосіб розв'язування. Припустімо, що друга селянка принесла в k разів більше яєць, ніж перша. Оскільки вторгували вони однаково, то це означає, що перша селянка свої яйця продавала в k разів дорожче, ніж друга. Коли б вони перед торгівлею помінялися місцями, то перша мала б у k разів більше яєць, ніж дру-

га, і продавала б їх у k разів дорожче. Це означає, що вона виторгувала б у k разів більше грошей, ніж друга. Отже, маємо $k^2 = 15:16\frac{2}{3} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4}$. Звідси $k = \frac{3}{2}$

Залишається 10 яєць поділити у відношенні 3:2. У результаті отримуємо, що перша селянка мала 40, а друга 60 яєць.

17. 2 000 000 (обіймів і поцілунків):20 = 100 000 хвилин. 100 000 (хвилин):60 = 1666 (годин). 1666 (годин)::12 = 138 (днів), вважаючи, що день триває 12 годин × × 138 (днів):6 = 23 (тижні).

18. Відстань від Скагвея до табору, куди поспішав Джек Лондон, становить $133\frac{1}{3}$ милі.

Справді, в умові задачі говориться, що 50 миль, пройдені з повною швидкістю, прискорили б приїзд Джека Лондона до табору на 1 день. Отже, 100 миль, пройдені з повною швидкістю, прискорили б його приїзд на 2 дні і Джек Лондон не запізнився б. З цього можемо зробити висновок, що на кінець першого дня подорожі залишилось ще 100 миль. Коли б Джек Лондон весь час пересувався з повною швидкістю, замість 100 миль він проїхав би $(100 \cdot \frac{5}{3} = 166\frac{2}{3}$ милі. Зайві $66\frac{2}{3}$ милі зекономили б йому 2 дні шляху. Звідси виходить, що розрахована Лондоном повна швидкість дорівнювала $33\frac{1}{3}$ милі в день. За першу добу він проїхав $33\frac{1}{3}$ милі. Додавши до цього ще 100 миль, матимемо шукану відстань. Вона дорівнюватиме: $100+33\frac{1}{3} = 133\frac{1}{3}$ милі.

19. Площа круга, вписаного в квадрат із стороною a, дорівнює $\pi a^2/4$. Тому необроблена частина поля дорівнює $a^2 — \pi a^2/4 = (1 — \pi/4)\;a^2 \approx 22a^2$, що становить лише 22 %, а не 30 %, як обчислив герой роману.

20. Додатковою умовою може бути: на ст. Дроздине — 15 членів партії. Тоді на ст. Шпакове — 1 член партії, 10 комсомольців, 11 безпартійних; на ст. Горобине — 13 членів партії, 8 комсомольців, 4 безпартійних. На кожній станції працюють 22 чоловіка.

21. Перше число пише Павлик: 46 853. Іван Петрович його бачить і записує на клаптику паперу відповідь: 146 852. Це означає, що він додав до початкового числа

99 999. Якщо друге число Павлика 21 398, то Іван Петрович пише під ним число 78 601, тобто таке, щоб у сумі ці два числа дали потрібні 99 999. Якщо б Павлик записав інше число, наприклад, 73 240, то потрібно було б третім числом записати 26 759 і т. д. У загальному випадку це можна записати так (на прикладі трицифрових чисел): перше число $100a + 10b + c$ (довільне), друге число $100r + 10s + t$ (довільне), третє число $100(9 - r) + 10(9 - s) + 9 - t$ (залежить від другого).

Відповідь (сума) завжди буде одна й та сама — первісне число плюс 999.

Справді, $100a + 10b + c + 100r + 10s + t + 900 - 100r + 90 - 10s + 9 - t = 100a + 10b + c + 999$.

22. За перевезення 50 ламп селянину нарахували заробітку $50 \times 5 = 2$ крб. 50 коп., а за три розбиті лампи з нього вирахували 1 крб. 20 коп. $\times 3 = 3$ крб. 60 коп.

В остаточному рахунку він «заробив» 2 крб. 50 коп.— 3 крб. 60 коп.= — 1 крб. 10 коп.

Очевидно, що подібні від'ємні заробітки були відомі слухачам із самого життя, що й викликало відповідні асоціації та емоції.

23. Після того як мати взяла половину, залишилася 1/2; після того як узяв брат, залишилася 1/4; після батька — 1/8, після сестри $1/8 \cdot 3/5 = 3/40$. Уся довжина дорівнює $30 : 3/40 = 400$ см., або 4 м.

24. Допущено логічну помилку підміни тези (лат. *ignoratio elenchi*), зумовлену порушенням у процесі міркувань закону тотожності. Суть цієї помилки в тому, що, почавши доводити одну тезу (твердження), непомітно, замасковано переходять до доведення іншої тези, тільки зовнішньо схожої на попередню. Саме тому теза, яку потрібно було довести, виявляється недоведеною.

У наведених міркуваннях доведено, що коли не виконуються умови 1 або 2, то $x^n + y^n \neq Z^n$, але це твердження лише «за формою» схоже на теорему Ферма, фактично ж воно не еквівалентне їй. Тому міркування героя не є доведенням славнозвісного твердження, яке не без підстав називають «вічним двигуном» математики.

25. Якщо позначити вік життя Діофанта через x, то епітафія приводить до рівняння $\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$, розв'язавши яке, визначаємо, що

вчений жив 84 роки. Про деталі суперечки Ферма і Декарта можна дізнатися з оригіналу.

26. Випадання кожної з шести граней кубика для гри в кості рівноможливі. Оскільки граней в кубику шість і одне очко вибите лише на одній з цих шести граней, то ймовірність випадання одного очка для кожного окремо взятого кубика дорівнює 1/6. Ймовірність же випадання одного очка на кожному з шести одночасно кинутих кубиків дорівнює $1/6 \cdot 1/6 \cdot 1/6 \cdot 1/6 \cdot 1/6 \cdot 1/6 = (1/6)^6 = 1/85\,536$. Це справді дуже мале число і таке випадання є унікальним явищем.

Автор пише далі, що Ферма підрахував, скільки кидків шести кубиків потрібно зробити, щоб стався такий неймовірний випадок. Ферма дістав кілька мільярдів кидків. Просто неймовірно, щоб він припустився такої величезної помилки. Її слід віднести на рахунок автора роману.

27. Математичною моделлю криниці Лотоса буде прямий круговий циліндр. На осьовому перерізі його (мал. 57) AC — очеретина довжиною дві міри ($AC = 2$), $BP = 3$ м, $EF = 1$ м. Потрібно обчислити $AB = 2r$, де r — радіус.

Позначимо $AD = x$, $BC = y$. Тоді $x^2 + AB^2 = 9$ і $y^2 + AB^2 = 4$, звідки $x^2 - y^2 = 5$. Оскільки $\triangle ABD \sim BEF$, то $x : EF = AB : BF$ і $x = (AB : BF) \cdot 1$; з того, що $\triangle AED \simeq BEC$, випливає $x : y = AF : BF$, тому $xy = x + y$.

Дістали систему двох рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = x + y, \end{cases}$$

яка приводить до повного рівняння четвертого степеня:

$$x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 10x - 5 = 0.$$

Алгоритм розв'язування рівнянь четвертого степеня в радикалах відкрив італійський математик Лудовіко Феррарі (1522—1565), цей алгоритм уперше був опублікований в 1545 році. Залишається метод добору. Застосувавши його, знаходимо, що $AB \approx 1{,}231$ міри.

Стародавні єгиптяни не знали ні теореми Піфагора, ні алгоритму розв'язування систем квадратних рівнянь, а тим паче — рівнянь четвертого степеня. Але ж не всім загадка жерців бога Ра вкорочувала віку. Як тоді могли розв'язувати її ті, хто витримував це випробування? Вони могли діяти таким чином. На підлозі кімнати креслили пряму OP і, враховуючи, що $BP - AC = 1$ м, проводили на відстані 1 м від OP пряму MN ($MN \parallel OP$). Потім опускали очеретини в криницю і позначали на них місце їх схрещення. Після цього очеретини клали на креслення так, щоб точка схрещення E лежала на прямій MN, і обертали їх, щоб мокрі кінці A та B очеретини потрапили на першу пряму OP. Далі вимірювали наближено AB, користуючись однією очеретиною.

28. Відповідь дається в останньому абзаці оригіналу репліки: «Яким чином удалося запхнути в одну банку згущеного молока аж 107 процентів компонентів, ще, на жаль, не з'ясовано. Це, як запевняють знавці,— фізико-математичний секрет фірми».

29. Видно, якою довгою була війна,— за цей час кроки хлопчика збільшилися вдвічі.

30. Позначимо через x число, на яке достатньо збільшити Одиницю, щоб $(1 + x)^{1000} = 1{,}001$. Скористаємося формулою бінома Ньютона:

$$(1 + x)^{1000} = 1^{1000} + 1000 \cdot 1^{999} \cdot x + \frac{1000 \cdot 999}{1 \cdot 2} 1^{998} x^2 + \ldots$$

Якщо $x = 0{,}000001$, то вже сума двох членів дасть 1,001.

ВИКОРИСТАНА ТА РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Серпинский В. 100 простых, но одновременно и трудных вопросов арифметики. М. : Учпедгиз, 1961.

Смаллиан Р. М. Как же называется эта книга? М. : Мир, 1981.

Смаллиан Р. М. Принцесса или тигр? М. : Мир, 1985. С. 222.

Смаллиан Р. М. Алиса в Стране Смекалки. М. : Мир, 1987. С. 182.

Сойер У. У. Прелюдии к математике. М. : Просвещение, 1972.

У світі математики (Зб. науково-популярних статей. Вип. 1—18). К.: Рад. шк., 1968—1987.

Фаермак Д. С. Задача пришла с картины. М. : Наука, 1974.

Фридман Л. М., Турецкий Е. Н. Как научиться решать задачи. М. : Просвещение, 1984. С. 175.

Штейнгауз Г. Задачи и размышления. М. : Мир, 1974.

Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. М. : Наука, 1981.

ЗМІСТ

Конфорович А. Г.
К65 Добрий день, Архімеде!: Цікаві задачі, ігри, головоломки.— К. : Молодь, 1988.— 152 с. : іл.
ISBN 5-7720-0026-8

Це збірник цікавих логічних і математичних задач, ігор та головоломок.

ББК 22.1

К $\frac{4403010000-117}{М228(04)-88}$ БЗ.18.7.87

Издание для досуга

Конфорович Андрей Григорьевич

ДОБРЫЙ ДЕНЬ, АРХИМЕД!

Занимательные задачи, игры, головоломки

Киев, издательство ЦК ЛКСМУ «Молодь»

На украинском языке

Редактор *С. В. Новохацький*
Художній редактор *К. О. Рязанов*
Технічний редактор *Т. І. Семченко*
Коректори *Н. І. Будзько, О. В. Мазна*

ИБ № 2784

Здано до набору 08.04.88 р. Підписано до друку 16.06.88. БФ 37783. Формат 84×108¹/₃₂. Папір друк. № 1. Гарнітура літературна. Друк високий. Умовн. друк. арк. 7,98. Умовн. фарбовідб. 8,4. Обл.-вид. арк. 8,41. Тираж 30 000 пр. Зам. 8-281. Ціна 80 к.

Ордена «Знак Пошани» видавництво ЦК ЛКСМУ «Молодь». 252119. Київ-119, Пархоменка, 38—44.

Набрано і відматрицьовано на Київській книжковій друкарні наукової книги. 252004. Київ-4, вул. Репіна, 4.

Віддруковано з матриць в поліграфкомбінаті ЦК ЛКСМ України «Молодь» ордена Трудового Червоного Прапора видавничо-поліграфічного об'єднання ЦК ВЛКСМ «Молодая гвардия». 252119 Київ, вул. Пархоменка, 38—44.